GHEORGHE MIHOC
VIRGIL CRAIU

TRATAT DE STATISTICĂ MATEMATICĂ

VOLUMUL III

ANALIZĂ SECVENȚIALĂ

EDITURA ACADEMIEI REPUBLICII SOCIALISTE ROMÂNIA

Scanned with OKEN Scanner

Scopul ultim al întregii cercetări științifice este de a construi un model care să permită trecerea de la condițiile unei experiențe la rezultatul care dă realizarea efectivă și aceasta fără a o efectua, sau cu alte cuvinte să facem economie de realizare efectivă. De exemplu, pornind de la caracteristicile unui motor electric : intensitate, voltaj, rezistență, număr de spire, suprafața spirelor etc., să determinăm puterea care se dezvoltă fără a da drumul curentului și mai mult fără a construi motorul. Un studiu științific este terminat cînd atinge un nivel de acest gen, fiind rezultatul coordonării unor multiple studii paralele, fiecare dintre ele făcînd numai o parte din drum, neconstituind decît o verigă a lanțului.

Ultimul scop fiind atins, se trag anumite concluzii, în particular o decizie asupra oportunității de a proceda sau de a renunța la realizarea efectivă. Studiile sînt la baza tuturor previziunilor și de asemenea la baza tuturor argumentelor prin care se justifică decizia de efectuare sau nu a unei acțiuni.

Scanned with OKEN Scanner

VIRGIL
CRAIU

TRATAT DE STATISTICĂ MATEMATICĂ

VOLUMUL III

ANALIZĂ SECVENȚIALĂ

EDITURA ACADEMIEI REPUBLICII SOCIALISTE ROMÂNIA

Scanned with OKEN Scanner

GHEORGHE MIHOC ◆ VIRGIL CRAIU

TRATAT de STATISTICĂ MATEMATICĂ

Volumul III

ANALIZĂ SECVENȚIALĂ

Scanned with OKEN Scanner

PREFAȚĂ

Analiza secvențială se referă la teoria și la metodele de rezolvare a problemelor de inferență statistică, cînd volumul și compoziția finală a datelor nu sînt fixate înaintea experimentului, însă depind, într-un mod specific, de însăși datele observate în cursul cercetării.

Evidențierea avantajelor unei astfel de cercetări (reducerea numărului de observații necesar în scopul atingerii aceluiași scop, dă soluții la unele probleme care nu sînt abordabile prin metodele bazate pe selecții de volum fix) nu are drept scop subaprecierea importanței analizei bazate pe selecții de volum fix. Cea mai mare parte a inferenței statistice este, în fapt, pusă în mișcare în scopul obținerii din datele care sînt la dispoziția statisticianului a informației maxime. În astfel de situații, dacă nu este posibil să se obțină observații suplimentare, analiza secvențială nu are nici un sens.

În capitolele XXI—XXVI ne vom ocupa de verificarea secvențială a ipotezelor statistice, iar în capitolul XXVII de estimația secvențială.

AUTORII

Scanned with OKEN Scanner

CUPRINS

Capitolul XXI

TESTE SECVENȚIALE

§ 1. Introducere 15
§ 2. Structura testului secvențial 17
2.1. Descrierea evenimentelor din testul secvențial 17
2.2. Probabilități în testul secvențial 18
2.3. Funcția valoare medie a volumului selecției (V.M.V.S.) 19
§ 3. Criterii pentru alegerea unui test 22
§ 4. Proprietăți ale funcției C.O. și funcției V.M.V.S. 24
§ 5. Margini pentru funcția V.M.V.S. 32

Capitolul XXII

TESTUL SECVENȚIAL AL RAPORTULUI PROBABILITĂȚILOR (T.S.R.P.)

§ 1. Ipoteze simple 37
1.1. Descrierea T.S.R.P. 37
1.2. Determinarea marginilor de stopare 39
1.3. Proprietatea optimă a T.S.R.P. 43
§ 2. Alternative unilaterale 44
2.1. Punerea problemei 44
2.2. Familii cu raportul de verosimilități monoton 45
2.3. O proprietate a T.S.R.P.U.C.M.E. 48
§ 3. Proprietatea de terminare 59
3.1. Cazul cînd $\{z_i\}$ sînt independente și identic repartizate 59
3.2. Cazul cînd $\{z_i\}$ nu sînt independente și identic repartizate. . . 62
§ 4. Funcțiile C.O. și V.M.V.S. 64
4.1. Aproximațiile lui Wald 64
4.2. Acuratețea aproximațiilor lui Wald 67
4.3. Aproximațiile Page (1954) — Kemp (1958) 70
4.4. Aproximațiile Kemp 73
4.5. Identitatea fundamentală 80
4.6. Margini pentru funcția C.O. 82
4.7. Margini pentru funcția V.M.V.S. 85
4.8. Repartiția V.D.S. 88
§ 5. Rezultate exacte. 92
5.1. Punerea problemei 92
5.2. Cazul cînd $\{z_i\}$ sînt discrete, independente și identic repartizate 92
5.3. Cazul cînd $\{z_i\}$ sînt continui, independente și identic repartizate 95

Scanned with OKEN Scanner

§ 6. Trunchierea și gruparea 96
6.1. Trunchierea 96
6.2. Gruparea 98
§ 7. Proprietăți ale testului secvențial al raportului probabilităților generalizat 100
§ 8. Proprietățile asimptotice ale T.S.R.P. 109

Capitolul XXIII

DISCRIMINAREA DINTRE $k \geqslant 2$ IPOTEZE. SUFICIENȚA FRASER

§ 1. Problema celor două selecții și suficiența Fraser 114
1.1. Familii Darmois-Koopman 114
1.2. Suficiența în sensul lui Fraser 119
1.3. Teste condiționate 121
1.4. Aplicarea suficienței în sensul lui Fraser la problema celor două selecții 124
§ 2. Discriminare dintre $k>2$ ipoteze 128
2.1. Punerea problemei 128
2.2. Testul Sobel-Wald 129
2.3. Problema celor k ipoteze 140
2.3.1. Procedeul lui Armitage 140
2.3.2. Procedeul lui Paulson privind media necunoscută a populației normale. 142

Capitolul XXIV

TESTE SECVENȚIALE PENTRU IPOTEZE COMPUSE

§ 1. Metoda funcțiilor de pondere a lui Wald (1947) 148
§ 2. Testul secvențial t 150
§ 3. Testul secvențial t^2 (sau t pentru alternative bilaterale) 152
§ 4. Analogul secvențial al testului în două etape al lui Stein 157
§ 5. Testul secvențial F 164
§ 6. Procedee secvențiale invariante 167
6.1. Principiul de invarianță 167
6.2. Suficiență invariantă 169
6.3. T.S.R.P. invariant. 171
6.4. Proprietăți asimptotice ale TSRP invariant 187
§ 7. Eficiența T.S.R.P. 193
7.1. Eficiența relativă în $\theta = \theta_0, \theta_1$ 193
7.2. Eficiența relativă în $\theta \neq \theta_0, \theta_1$ 196
7.3. Limitări ale proprietății optime a T.S.R.P. 197
7.4. Eficiența relativă limită a T.S.R.P. 201
7.5. Eficiența asimptotică a T.S.R.P. 203
§ 8. Eficiența asimptotică a testelor secvențiale 205
8.1. Eficiența asimptotică 205
8.2. Teste nesecvențiale U.C.M.P. 210
8.3. T.S.R.P. 211
8.4. T.S.R.P. trunchiat 212
8.5. T.S.R.P. trunchiat II 215
8.6. Test de semnificație repetat 216

Scanned with OKEN Scanner

Capitolul XXV

TESTUL SECVENȚIAL AL RAPORTULUI DE VEROSIMILITĂȚI

§ 1. Estimatori de verosimilitate maximă ai T.S.R.P. 219
§ 2. Testul secvențial al raportului de verosimilitați nesfîrșit pentru familii Koopman-Darmois 222
§ 3. Testul raportului de verosimilitați pentru problema a k selecții. 237
§ 4. Teste nesfîrșite și aproximații ale probabilităților erorilor . . . 243

Capitolul XXVI

TESTE NEPARAMETRICE

§ 1. Introducere 246
§ 2. Unele aspecte ale teoriei statisticilor de rang 248
2.1. Problema celor două selecții 248
2.2. Problema unei selecții 256
2.3. Problema celor c selecții 259
2.4. Alternative ordonate 263
§ 3. Testul semnelor 267
3.1. Testul semnelor pentru alternative unilaterale 267
3.2. Testul semnelor pentru alternative bilaterale.. 268
3.3. Testul semnelor în comparația pe perechi 271
§ 4. Teste de permutare 272
§ 5. Teste neparametrice secvențiale cu puterea unu 278
§ 6. Testul secvențial al semnului 284
§ 7. T.S.R.P. de rang bazate pe alternativa Lehmann (Cazul a două selecții) 284
§ 8. T.S.R.P. rangurilor pentru simetrie 285
§ 9. T.S.R.P. rangurilor în cazul a c selecții 303
§ 10. Teste secvențiale de rang pentru poziție 305
10.1 Introducere 305
10.2 Proprietăți ale testului secvențial al raportului de verosimilitați 307
10.3 Comparația testului secvențial al rangurilor statisticilor de ordine cu testul secvențial al raportului de verosimilitați (în teoria normală) și cu T.S.R.P. (Wald). 313

Capitolul XXVII

ESTIMARE SECVENȚIALĂ

§ 1. Formularea problemei estimării secvențiale prin intervale sau mulțimi 317
§ 2. Procedeul de estimare secvențială a lui Wald 318
§ 3. Concepte generale de estimație secvențială 318
§ 4. Inegalitatea Rao-Cramer 319
§ 5. Suficiența și completitudinea 323
§ 6. Limite de încredere secvențiale pentru parametrii populației normale 331

Scanned with OKEN Scanner

6.1. Limite de încredere secvențiale pentru media populației normale 331
6.2. Limite de încredere secvențiale pentru dispersie 332
6.3. Limite de încredere secvențiale pentru raportul dispersiilor . . 333
§ 7. Estimare prin selecție dublă 334
§ 8. Estimația secvențială în cazul selecțiilor de volum mare 341
§ 9. Teoria asimptotică a intervalelor de încredere secvențiale de lungime fixată pentru medie 350
§ 10. O metodă generală pentru determinarea intervalelor de lungime fixată 362
§ 11. Estimație secvențială pentru volumul populației finite 367
§ 12. Consistența unor estimatori secvențiali 373
§ 13. Intervale de încredere secvențiale neparametrice 381

Bibliografie 387

Scanned with OKEN Scanner

CONTENTS

Chapter XXI
SEQUENTIAL TESTS

§ 1. Introduction 15
§ 2. The structure of a sequential test 17
2.1. Description of events in a sequential test 17
2.2. Probability in a sequential test 18
2.3. The average sample number (A.S.N.) function 19
§ 3. Criteria for choosing a sequential test 22
§ 4. Properties of O.C. and A.S.N. function 24
§ 5. Bounds for the A.S.N. function 32

Chapter XXII
SEQUENTIAL PROBABILITY RATIO TESTS

§ 1. Simple hypotheses 37
1.1. Description of the SPRT 37
1.2. Determination of the stopping bounds 39
1.3. The optimum property of SPRT 43
§ 2. One-sided alternatives 44
2.1. Formulation of the problem 44
2.2. Monotone likelihood ratio families 45
2.3. A U.M.E. properties of SPRT 48
§ 3. The termination property 59
3.1. The case when $\{z_i\}$ are i.i.d. 59
3.2. The case when $\{z_i\}$ are not i.i.d. 62
§ 4. The O.C. and A.S.N. functions 64
4.1. The Wald approximations 64
4.2. Adequacy of the Wald approximations 67
4.3. The Page (1954) — Kemp (1958) approximations 70
4.4. The Kemp approximations 73
4.5. A fundamental identity 80
4.6. Bounds for the O.C. function. 82
4.7. Bounds for the A.S.N. function 85
4.8. The distribution of the D.S.N. 88
§ 5. Some exact results 92
5.1. Stating the problem 92
5.2. The case when $\{z_i\}$ are i.i.d. discrete 92
5.3. The case when $\{z_i\}$ are i.i.d. continous 95
§ 6. Truncation and grouping 96
6.1. Truncation 96

Scanned with OKEN Scanner

6.2. Grouping 98
§ 7. Properties of generalized sequential probability ratio tests . . . 100
§ 8. Asymtotic properties of SPRT's 109

Chapter XXIII

DISCRIMINATION AMONG $k \geq 2$ HYPOTHESES, FRASER SUFFICIENCY

§ 1. Two-sample problems and Fraser-sufficiency 114
1.1. Darmois-Koopman family 114
1.2. Fraser-sufficiency 119
1.3. Conditional tests 121
1.4. Application of Fraser-sufficiency to two-sample problems. . . . 124
§ 2. Discrimination among $k>2$ hypotheses 128
2.1. Stating the problem 128
2.2. The Sobel-Wald test 129
2.3. The problem of k hypotheses 140
2.3.1. Armitage's procedure. 140
2.3.2. Paulson's procedure concerning the unknown mean of normal population 142

Chapter XXIV

SEQUENTIAL TESTS FOR COMPOSITE HYPOTHESES

§ 1. Wald's (1947) method of weight functions 148
§ 2. Sequential t-test 150
§ 3. Sequential t^2-test (or t-test for two-sided alternatives) 152
§ 4. Sequential analogues of Stein's two-stage test 157
§ 5. Sequential F-test 164
§ 6. Invariant sequential procedures 167
6.1. Principle of invariance 167
6.2. Invariant sufficiency 169
6.3. The invariant SPRT 171
6.4. Asymptotic properties of invariant SPRT's 187
§ 7. The efficiency of the SPRT 193
7.1. The relative efficiency at $\theta = \theta_0, \theta_1$ 193
7.2. The relative efficiency at $\theta \neq \theta_0, \theta_1$ 196
7.3. Limitations of the optimum property of the SPRT 197
7.4. Limiting relative efficiency of the SPRT 201
7.5. Asymptotic efficiency of Wald SPRT 203
§ 8. Asymptotic efficiencies of sequential tests 205
8.1. Asymptotic efficiency 205
8.2. UMP nonsequential test 210
8.3. SPRT 211
8.4. TPRT: truncated SPRT 212
8.5. TPRT II 215
8.6. Repeated significance test 216

Chapter XXV

SEQUENTIAL LIKELIHOOD RATIO TEST

§ 1. Maximum likelihood SPRT's 219
§ 2. Open-ended likelihood ratio test for Koopman-Darmois families 222
§ 3. Likelihood ratio tests for k-decision problems 237
§ 4. Open-ended tests and error probability approximation 243

Scanned with OKEN Scanner

Chapter XXVI

NONPARAMETRIC TESTS

§ 1. Introduction 246
§ 2. Some aspects of the theory or rank-order statistics 248
2.1. The two-sample problem 248
2.2. One-sample problem 256
2.3. c-sample problem 259
2.4. Ordered alternatives 263
§ 3. The sign test 267
3.1. One-sided sign test 267
3.2. Two-sided sign test 268
3.3. The sign test for paired comparison 271
§ 4. Permutation tests 272
§ 5. Nonparametric sequential tests with power one 278
§ 6. Sequential sign test 284
§ 7. Rank order SPRT's basedon Lehmann alternatives. Two-sampl ecase 284
§ 8. One-sample rank order SPRT's for symetry 295
§ 9. c-sample rank order SPRT's 303
§ 10. Sequential rank tests (SRT) for location 305
10.1. Introduction 305
10.2. Properties of the sequential likelihood ratio test (SLRT) 307
10.3. Comparison of sequential rank order tests, sequential likelihood ratio test (in normal theory) and Wald SPRT 313

Chapter XXVII

SEQUENTIAL ESTIMATION

§ 1. Formulation of the problem of sequential estimation by intervals or sets 317
§ 2. Wald's sequential estimation procedures 318
§ 3. General concepts of sequential estimation 318
§ 4. Cramér-Rao lower bound 319
§ 5. Sufficiency and completeness 323
§ 6. Sequential confidence limits for the parameters of a normal population 331
6.1. Sequential confidence limits for the mean of a normal population 331
6.2. Sequential confidence limits for the variance 332
6.3. Sequential confidence limits for the ratio of variances 333
§ 7. Estimation by double sampling 334
§ 8. Large sample theory of sequential estimation 341
§ 9. The asymptotic theory of fixed-width sequential confidence intervals for the mean 350
§ 10. A general method of determining fixed-widh confidence intervals 362
§ 11. Sequential estimation of the size of a finite population 367
§ 12. Consistency of certain sequential estimators 373
§ 13. Sequential nonparametric confidence intervals 381

Bibliography 387

Scanned with OKEN Scanner

Capitolul XXI

TESTE SECVENȚIALE

§1. Introducere

Analiza secvențială își are originea în așa numita schemă a selecției duble (Dodge, Roming (1929)) pentru acceptarea loturilor de produse în controlul industrial al calității. Presupunem că un lot de N produse conține o proporție p necunoscută de articole defecte și se cere să se decidă respingerea sau acceptarea lotului după cum $p > p_0$ sau $p \leqslant p_0$ unde p_0 este cunoscută $(0 < p_0 < 1)$.

În schema Dodge, Roming se consideră o selecție preliminară de n_1 produse din lot și se înregistrează numărul de piese defecte d_1. Notăm selecția prin $x_1, x_2, \ldots, x_n$, unde x_i ia valoarea unu sau zero după cum piesa i este defectă sau corespunzătoare.

Deci $d_1 = \sum_1^{n_1} x_i$

Dacă

i) $d_1 \leqslant a$ lotul se acceptă
ii) $d_1 > b$ lotul se respinge
iii) $a < d_1 \leqslant b$ se consideră o nouă selecție de volum n_2 unde a și b $(> a)$ sînt două numere fixate.

Fie $x_{n_1+1}, x_{n_1+2}, \ldots, x_{n_1+n_2}$ această a două selecții și $d_2 = \sum_{n_1+1}^{n_1+n_2} x_i$ numărul pieselor defecte găsite în această nouă selecție.

Dacă

i) $d_1 + d_2 \leqslant b$ lotul se acceptă
ii) $d_1 + d_2 > b$ lotul se respinge

Planul selecției duble este complet determinat prin specificarea numerelor n_1, n_2, a și b. Volumul total al selecției este o variabilă aleatoare care poate lua două valori și anume n_1 și $n_1 + n_2$.

Pentru a vedea că planul selecției duble împreună cu deciziile asociate constituie un test statistic (pe care-l vom nota prin D) observăm că — respingerea lotului are loc dacă și numai dacă variabila aleatoare (d_1, d_2) cade în regiunea critică W definită de $E_1 \cup E_2$ unde E_1 este mulțimea punctelor din spațiul de selecție al variabilei (d_1, d_2) pentru care $d_1 > b$ și E_2 este mulțimea pentru care $a < d_1 \leqslant b$ și $d_1 + d_2 > b$.

Metoda selecției duble a fost extinsă de Bartky (1943) care dă așa numita *schemă de selecție multiplă* în care apar cel puțin două etape de selectare.

Scanned with OKEN Scanner

Bartky (1943) consideră o selecţie $x_1, \ldots, x_{n_1}$, $n_1 \geqslant 1$ şi acceptă lotul dacă

$$\sum_1^{n_1} x_i \leqslant a$$

sau respinge lotul dacă

$$\sum_1^{n_1} x_i > b$$

iar dacă

$$a < \sum_1^{n_1} x_i \leqslant b$$

consideră o nouă selecţie $x_{n_1+1}, \ldots, x_{n_1+n_2}$, $n_2 \geqslant 1$ şi acceptă lotul dacă

$$\sum_1^{n_1+n_2} x_i = a + 1$$

sau respinge lotul dacă

$$\sum_1^{n_1+n_2} x_i > b + 1.$$

În general, după ce a considerat k selecţii de volum n_2, acceptă lotul dacă

$$\sum_1^{n_1+kn_2} x_i = a + k$$

sau respinge lotul dacă

$$\sum_1^{n_1+kn_2} x_i > b + k.$$

Knudsen (1943) consideră problema verificării ipotezei
$H : \mu > \mu_0$, μ media variabilei $\sim N(\mu, \sigma^2)$, σ^2 necunoscută.
Densitatea de repartiţie a statisticii

$$T_n(x) = \frac{\mu_0 - \bar{x}_n}{w_n}$$

este independentă de σ cînd $\mu = \mu_0$
H va fi respinsă dacă $T_n(x) \geqslant T_{n;\,0,999}$
H va fi acceptată dacă $T_n(x) \leqslant T_{n;\,0,95}$
se va face o observaţie suplimentară x_{n+1} dacă,

$$T_{n;\,0,95} < T_n(x) < T_{n;\,0,999}.$$

Scanned with OKEN Scanner

În continuare regula de decizie este similară și va fi aplicată la

$$T_{n+1}(x),\quad T_{n+1;0,95}\quad \text{și}\quad T_{n+1;0,999}.$$

Logica procedurii este clară dacă se notează că $\alpha = 0{,}001$ și $\alpha = 0{,}05$ sînt minimum și respectiv maximum pragurilor

$P(H$ este respinsă$|\,H$ este adevărată).

Proprietățile testului nu au fost cercetate matematic, însă procedeul poate fi privit ca predecesorul verificării secvențiale a ipotezelor.

Wald (1943, 1945) formulează teoria generală a testelor secvențiale cînd modelul probabilistic conține un parametru real. Freeman (1944) dă aplicații ale acestei teorii: Barnard (1944, 1946) și Stockman (1944) dezvoltă, independent, teste secvențiale. Totuși, expunerea inițială a lui Barnard are o linie diferită de cea a lui Wald și privește situațiile pentru care repartițiile binomiale stau la baza modelului matematic. Multe dintre aceste rezultate sînt stabilite într-o formă generală în cartea lui Wald (1947). În cazul în care modelele au mai mulți parametrii, Wald introduce funcțiile de pondere care reduc noua problemă la aceea din cazul modelelor cu un parametru. Barnard (1952) dă o justificare a metodei funcțiilor de pondere. Cox (1952) dă o metodă unificată cu care se pot obține teste secvențiale pentru ipoteze compuse. Hall, Wijsman, Ghosh (1965) dă o justificare mai riguroasă a principiului lui Cox. Ghosh (1970) dă o tratare sistematică a teoriei matematice a analizei secvențiale cu referire la problemele de verificări de ipoteze, iar Govindarajulu (1975) prezintă din analiza secvențială estimarea secvențială, care a făcut în ultimul timp obiectul unui număr mare de cercetări.

§2. Structura testului secvențial

2.1. Descrierea evenimentelor din testul secvențial

Fie $(X_1, X_2, \ldots)$ un proces stochastic care depinde de un parametru real θ. Aceasta arată că fiecare mulțime finită de componente $X_1, X_2, \ldots$ are o funcție de repartiție ce depinde de θ, al cărui spațiu al parametrelor este Θ. Astfel $\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_n)$ are funcția de repartiție $F_n(\mathbf{x}, \theta)$.

Ne propunem să verificăm ipoteza

$$H_0 : \theta \in \omega \tag{1}$$

față de

$$H_1 : \theta \in \Theta - \omega. \tag{2}$$

Fie $E_1^{(i)}$ spațiul de selecție al variabilei X_i și

$$E_n = E_1^{(1)} \times \ldots \times E_1^{(n)}$$

spațiul de selecție al variabilei vectoriale $\mathbf{X}$, $n = 1,2, \ldots$ Pentru fiecare întreg pozitiv n, fie R_n^0, R_n^1 și R_n trei mulțimi disjuncte din E_n astfel încît

$$R_n^0 \cup R_n^1 \cup R_n = R_{n-1} \times E_1^{(n)}$$

382.557
BIBLIOTECA JUDEȚEANĂ „GH. ASACHI" IAȘI

DEFINIȚIA 1. Un test secvențial S pentru ipoteza H_0 față de alternativa H_1 este definit de regiunile $\{R_i^0\}$, $\{R_i^1\}$, $i = 1,2, \ldots, n$ și R_n pentru fiecare $n \geqslant 1$ cu regulile de decizie:
dacă

$$\begin{aligned} &x \in R_n^0 \text{ acceptăm } H_0 \text{ fără continuarea experimentului} \\ (3) \qquad &x \in R_n^1 \text{ respingem } H_0 \text{ fără continuarea experimentului} \\ &x \in R_n \text{ continuăm experimentul cu o nouă observație} \end{aligned}$$

$R_1, R_2, \ldots$ poartă numele de *șirul evenimentelor de continuare.*

Observație $R_1^0, R_2^0, \ldots, R_n^0, R_1^1, R_2^1, \ldots, R_n^1$ și R_n sînt $2n+1$ mulțimi disjuncte din E_n și pentru fiecare $n \geqslant 1$

$$(4) \qquad E_n = R_1^0 \cup \ldots \cup R_n^0 \cup R_1^1 \cup \ldots \cup R_n^1 \cup R_n.$$

Regiunea critică a testului secvențial S este

$$W_\alpha = R_1^1 \cup R_2^1 \cup \ldots$$

unde R_i^1 sînt alese astfel încît $P(W_\alpha | H_0) = \alpha$. Orice test pentru H_0, bazat pe o selecție de volum fix și avînd în spațiul de selecție regiunea critică W, poate fi privit ca un test secvențial degenerat în care $R_1^0, \ldots, R_{n-1}^0, R_1^1, \ldots, R_{n-1}^1, R_n$ sînt mulțimi vide, iar $R_n^1 = W$ și $R_n^0 = CW$.

DEFINIȚIA 2. Testul pentru ipoteza H_0 este închis dacă șirul de operații din (3) se termină cu probabilitatea unu, adică

$$(5) \qquad \lim_{n \to \infty} P(x \in R_n | \theta) = 0 \qquad \text{pentru fiecare } \theta \in \Theta.$$

Observație. Orice test bazat pe o selecție de volum fix este închis.

DEFINIȚIA 3. Un test secvențial pentru care (5) nu are loc pentru unul sau mai multe puncte din Θ poartă numele de test deschis.

DEFINIȚIA 4. (Wald (1963)). Vom spune că selecția $x_1, \ldots, x_n$ nu este efectivă dacă conține o selecție inițială $x_1, \ldots, x_{n'}$, unde $n' < n$ astfel încît $(x_1, \ldots, x_{n'})$ cade în $R_{n'}^0$ sau în $R_{n'}^1$. O selecție care nu este efectivă poartă numele de selecție efectivă.

Observație. Pentru un test secvențial vom avea selecție efectivă la fiecare pas al experimentului. Deci este suficient să stabilim la care dintre mulțimile R_n^0, R_n^1 și R_n va aparține selecția efectivă, deoarece în procesul secvențial nu pot apărea selecții care nu sînt efective.

2.2. Probabilități în testul secvențial

Probabilitatea ca orice test S să accepte (respingă), la pasul n, ipoteza H_0 este

$$(6) \qquad P(x \in R_n^0 | \theta) = \int_{R_n^0} dF_n(x, \theta) \left(P(x \in R_n^1 | \theta) = \int_{R_n^1} dF_n(x, \theta) \right).$$

Scanned with OKEN Scanner

Atunci

$$Q_n(\theta) = \sum_{i=1}^{n} P(\mathbf{x} \in R_i^0 \mid \theta), \quad P_n(\theta) = \sum_{i=1}^{n} P(\mathbf{x} \in R_i^1 \mid \theta)$$

sînt probabilităţile de acceptare, respectiv de respingere a ipotezei H_0 la pasul n sau înainte de pasul n.

Din (4) urmează că

$$P(\mathbf{x} \in R_n \mid \theta) = 1 - Q_n(\theta) - P_n(\theta) \tag{7}$$

dă probabilitatea de continuare a experimentului după pasul n. Deoarece $Q_n(\theta)$ şi $P_n(\theta)$ sînt nenegative, cu

$$0 \leqslant P_n(\theta) + Q_n(\theta) \leqslant 1$$

şi nedescrescătoare în raport cu n, există limitele lor $Q(\theta)$ şi $P(\theta)$, cînd $n \to \infty$. Cu alte cuvinte

$$Q(\theta) = \lim_{n\to\infty} Q_n(\theta) = \sum_{n=1}^{\infty} P(\mathbf{x} \in R_n^0 \mid \theta) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{R_n^0} dF_n(\mathbf{x};\ \theta) \tag{8}$$

$$P(\theta) = \lim_{n\to\infty} P_n(\theta) = \sum_{n=1}^{\infty} P(\mathbf{x} \in R_n^1 \mid \theta) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{R_n^1} dF_n(\mathbf{x};\ \theta) \tag{9}$$

sînt probabilităţile ca şirul de operaţii în (3) să se termine eventual cu acceptarea respectiv respingerea ipotezei H_0.

DEFINIŢIA 5. $Q(\theta)$ ca funcţie de θ poartă numele de funcţia caracteristică operatoare (C.O.) a testului S şi $P(\theta)$ de funcţia de putere a testului S.

Evaluate în $\theta \in \Theta - \omega$ dat, $Q(\theta)$ şi $P(\theta)$ sînt caracteristica operatoare şi respectiv puterea pentru alternativa particulară θ. Dacă θ este o valoare sau un vector real, graficul funcţiei $Q(\theta)$ pentru diferite valori ale lui $\theta \in \Theta$ poartă numele de curba caracteristică operatoare.

Observaţie. Pentru fiecare $\theta \in \Theta$, $0 \leqslant Q(\theta) \leqslant 1$ şi $0 \leqslant P(\theta) \leqslant 1$. Din (5) şi (7) urmează că pentru ca S să fie închis trebuie să avem

$$Q(\theta) = 1 - P(\theta) \quad \text{pentru fiecare} \quad \theta \in \Theta,$$

şi reciproc.

Probabilităţile erorilor de ordinul 1 şi 2 sînt

$$\alpha(\theta) = P(\theta) \quad \text{dacă} \quad \theta \in \omega \tag{10}$$

şi respectiv

$$\beta(\theta) = Q(\theta) \quad \text{dacă} \quad \theta \in \Theta - \omega. \tag{11}$$

2.3. Funcţia valoare medie a volumului selecţiei (V.M.V.S.)

Considerăm volumul final al selecţiei cerute de test. Acest număr se atinge numai cînd se ia o decizie terminală de acceptare sau respingere a ipotezei H_0.

Scanned with OKEN Scanner

DEFINIȚIA 6. Volumul decisiv al selecției este variabila aleatoare n asociată cu volumul final al selecției, care ia valoarea n dacă $\mathbf{x} \in R_n^0 \cup R_n^1$.

Observație n este necesar o variabilă aleatoare discretă care poate lua numai valori întregi pozitive cu probabilități nenule.

Funcția de frecvență a variabilei n este dată de

$$p(n, \theta) = P(n = n \mid \theta) = P(\mathbf{x} \in R_n^0 \mid \theta) + P(\mathbf{x} \in R_n^1 \mid \theta) =$$

$$= \int_{R_n^0 \cup R_n^1} dF_n(\mathbf{x}; \theta) \qquad \text{pentru } n = 1,2, \ldots \tag{12}$$

Dacă S este un test bazat pe o selecție de volum fix n, atunci

$$P(n = n \mid \theta) = 1$$

pentru toți $\theta \in \Theta$.

Deoarece pentru fiecare întreg N pozitiv

$$P(n > N \mid \theta) = P(\mathbf{x} \in R_N \mid \theta),$$

proprietatea de terminare (5) poate fi exprimată spunînd că testul secvențial este închis dacă și numai dacă

$$\lim_{N \to \infty} P(n > N \mid \theta) = \lim_{N \to \infty} \sum_{n=N+1}^{\infty} p(n; \theta) \qquad \text{pentru toți } \theta \in \Theta. \tag{13}$$

Aceasta implică că cererea ca $\Sigma p(n; \theta) = 1$ pentru ca $p(n; \theta)$ să fie o funcție de frecvență va fi satisfăcută numai dacă S este închis. Cu acestea noțiunea de volum de selecție decisiv este restrînsă numai la testele închise. Putem extinde definiția lui n la teste deschise punînd

$$p(\infty; \theta) = \gamma, \text{ unde } \gamma = 1 - \Sigma P(\mathbf{x} \in R_n^0 \cup R_n^1 \mid \theta).$$

Dacă același test S este repetat, n va lua diferite valori în repetările succesive cu probabilități date de (12).

DEFINIȚIA 7. Ca funcție de $\theta \in \Theta$,

$$M(n; \theta) = \sum_{n=1}^{\infty} np(n; \theta) \tag{14}$$

poartă numele de funcția valoare medie a volumului decisiv al selecției (dacă există) și o notăm prin V.M.V.D.

Observație $M(n \mid \theta)$ poate fi interpretat ca media volumelor selecțiilor care rezultă prin folosirea testului S într-un număr de repetări ale aceluiași experiment cînd valoarea adevărată a parametrului este θ.

Deoarece, pentru fiecare întreg pozitiv N și pentru orice $\theta \in \Theta$ fixat,

$$M(n; \theta) \geq \sum_{n=1}^{N} np(n; \theta) + NP(\mathbf{x} \in R_N \mid \theta),$$

Scanned with OKEN Scanner

este necesar, însă nu şi suficient, să avem

$$\lim_{N\to\infty} NP(\mathbf{x}\in R_N \mid \theta) < \infty$$

pentru ca $M(n;\ \theta)$ să fie finită. Cu alte cuvinte dacă nu are loc (5), atunci $M(n;\ \theta)$ nu există.

În particular, pentru orice test bazat pe o selecţie de volum n fix, funcţia V.M.V.D. este constantă

$$M(n\mid\theta) = n \text{ pentru toţi } \theta\in\Theta.$$

DEFINIŢIA 8. Dacă θ este o valoare reală sau un vector real, diagrama arătînd $M(n;\ \theta)$ faţă de diferite valori ale lui $\theta\in\Theta$ poartă numele de curba funcţiei V.M.V.D.

Pentru un test secvenţial închis este posibil să avem

$$M(n;\ \theta) < \infty \text{ pentru } \theta\in\omega'$$

în timp ce $M(n;\ \theta)$ nu există pentru $\theta\in\Theta-\omega'$, unde ω' este o submulţime a lui Θ.

O calitate căutată pentru orice test este ca $M(n;\ \theta)$ corespunzătoare să fie mică pentru toţi $\theta\in\Theta$ sau cel puţin pentru $\theta\in\omega$.

Exemplul 1. În schema selecţiei duble volumele de selecţie $n_1\geqslant 1$ şi $n_2\geqslant 1$ şi întregii pozitivi

$$a < b \qquad (0\leqslant a < n_1,\ a < b < n_1+n_2)$$

sînt determinaţi astfel încît

$$\alpha_D(p_0)\leqslant\alpha$$

Testul D este închis şi are

$$Q_D(p) = \sum_{\tau=0}^{a} C_{n_1}^{\tau}p^{\tau}(1-p)^{n_1-\tau} + \sum_{c=a+1}^{b} C_{n_1}^{c}p^{c}(1-p)^{n_1-c}\sum_{\nu=0}^{b-c} C_{n_2}^{\nu}p^{\nu}(1-p)^{n_2-\nu},$$

$$(15)\quad p_D(n,p) = \begin{cases} 1-\sum_{\tau=0}^{b} C_{n_1}^{\tau}p^{\tau}(1-p)^{n_1-\tau}+\sum_{\tau=0}^{a} C_{n_1}^{\tau}p^{\tau}(1-p)^{n_1-\tau} & \text{dacă } n=n_1 \\ \sum_{\tau=0}^{b} C_{n_1}^{\tau}p^{\tau}(1-p)^{n_1-\tau} - \sum_{\tau=0}^{a} C_{n_1}^{\tau}p^{\tau}(1-p)^{n_1-\tau} & \text{dacă } n=n_1+n_2 \end{cases}$$

$$M_D(n;p) = n_1 + n_2\left[\sum_{\tau=0}^{b} C_{n_1}^{\tau}p^{\tau}(1-p)^{n_1-\tau} - \sum_{\tau=0}^{a} C_{n_1}^{\tau}p^{\tau}(1-p)^{n_1-\tau}\right],$$

pentru toţi p, $0\leqslant p\leqslant 1$.

Observaţii i) Dat $(p_0,\ \alpha)$ relaţia

$$Q_D(p_0)\geqslant 1-\alpha$$

va fi satisfăcută de mai multe combinaţii de (n_1, n_2, a, b), ceea ce conduce la clasa procedeelor selecţiei duble.

ii) Dat (p_0, α, n_1, n_2) alegerea lui D poate să nu fie unică sau poate să nu existe. Cu anumite restricţii asupra lui D se poate, pentru o mulţime (p_0, α) dată, face o alegere unică pentru (n_1, n_2, a, b).

Exemplul 1'. În cazul selecţiei multiple pentru toţi p, $0 \leqslant p \leqslant 1$

$$Q(p) = \sum_{\tau=0}^{a} C_{n_1}^{\tau} p^{\tau}(1-p)^{n_1-\tau} + \frac{\zeta_{b-a+1}(p)}{\gamma_{b-a+1}(p)}, \tag{16}$$

$$M(n; p) = n_1 + n_2 \frac{\zeta_{b-a+1}(p)}{\gamma_{b-a+1}(p)} \sum_{j=1}^{b-a} \gamma_j(p) - n_2 \sum_{j=1}^{b-a} \zeta_j(p),$$

unde $\{\gamma_j(p)\}$ şi $\{\zeta_j(p)\}$ sînt, pentru orice p dat, determinate de identităţile

$$[(1-p+pu)^{n_2} - u]^{-1} = \gamma_1(p) + \gamma_2(p)u + \gamma_3(p)u^2 + \dots \tag{17}$$

$$\left[\sum_{j=1}^{b-a} C_{n_1}^{a+j} p^{a+j}(1-p)^{n_1-a-j}u^j\right][(1-p+pu)^{n_2} - u]^{-1} =$$

$$= \zeta_1(p) + \zeta_2(p)u + \zeta_3(p)u^2 + \dots$$

§3. Criteriu pentru alegerea unui test

Orice test pentru verificarea ipotezei $H_0: \theta \in \omega$ trebuie să se bucure de următoarele calităţi

— să fie închis

— să aibă

$$Q(\theta) = 1 \text{ pentru fiecare } \theta \in \omega$$

şi

$$Q(\theta) = 0 \text{ pentru fiecare } \theta \in \Theta - \omega$$

(deoarece scopul oricărui test este obţinerea unei decizii corecte privind H_0 cu probabilităţile erorilor cît mai mici)

— pentru toţi $\theta \in \Theta$, $M(n, \theta)$ să fie mică, adeseori mai mică decît o margine superioară $\bar{n}$ dată (din consideraţii economice).

Avînd în vedere că testele se bazează pe o selecţie, deci pe o parte din populaţie, este imposibil ca aceste trei calităţi să le aibă simultan un test. Dacă se renunţă la ultima cerinţă, a doua cerinţă se atinge considerînd o selecţie de volum suficient de mare. Aceste procedee nu sînt admisibile în practică, deoarece în cazul în care selecţia coincide cu întreaga populaţie nu mai avem de-a face cu o problemă de statistică. Un compromis rezonabil se obţine fixînd volumul selecţiei şi o margine superioară α $(0 \leqslant \alpha \leqslant 1)$ a probabilităţii erorii de ordinul I şi alegînd testul care minimizează probabilitatea erorii de ordinul II pentru toţi $\theta \in \Theta - \omega$ în raport cu alegerile posibile ale regiunii critice. Dacă n este dat, folosirea testelor secvenţiale se exclude. Pentru a permite atît procedeele bazate pe selecţii de volum fix cînd şi cele secvenţiale se poate face o modificare uşoară a criteriului anterior alegînd acel test care minimizează $Q(\theta)$ pentru

Scanned with OKEN Scanner

toți $\theta \in \Theta - \omega$ afară de testele ce satisfac

$$Q(\theta) \geqslant 1 - \alpha \text{ pentru toți } \theta \in \omega$$

și

$$M(n, \theta) \leqslant \bar{n} \text{ pentru toți } \theta \in \Theta,$$

unde $\bar{n}$ este un întreg pozitiv specificat.

Este rezonabil să specificăm margini superioare pentru probabilitatea erorii de tipul I cînd $\theta \in \omega_a$ pentru probabilitatea erorii de tipul II cînd $\theta \in \omega_r$, și atunci să facem minimă funcția valoare medie a volumului decisiv pentru anumiți sau toți $\theta \in \Theta$ în raport cu unele sau toate alegerile posibile ale testului S. Mai precis are loc

DEFINIȚIA 9. Fie $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$ și $0 \leqslant \beta \leqslant 1$ două numere reale specificate, numite riscuri prestabilite. Clasa $\mathcal{C}$ a testelor pentru $H_0 : \theta \in \omega$ este validă, dacă fiecare $S \in \mathcal{C}$ satisface condițiile

a) S este închis,

b) $\alpha_S(\theta) = 1 - Q_S(\theta) \leqslant \alpha$ pentru fiecare $\theta \in \omega_a$,

(18)

c) $\beta_S(\theta) = Q_S(\theta) \leqslant \beta$ pentru fiecare $\theta \in \omega_r$,

unde $\omega_a \subset \omega$ și $\omega_r \subset \Theta - \omega$ sînt mulțimi disjuncte din Θ,

$\alpha_S(\theta)$ pentru $\theta \in \omega_a$ și $\beta_S(\theta)$ pentru $\theta \in \omega_r$ poartă numele de riscuri adevărate asociate testului S.

Observație. În cazul în care

$$\omega = \omega_a \text{ și } \omega_r = \Theta - \omega$$

riscurile sînt aceleași cu probabilitățile erorilor de tipul I și II.

DEFINIȚIA 10. Spunem că un test atinge intensitatea (α, β) dacă în (18) are loc inegalitatea strictă.

Spunem că un test are intensitatea minimă sau riscul maxim (α, β) dacă cel puțin una din inegalitățile din (18) este strictă.

DEFINIȚIA 11. Vom spune că S_1 este mai puternic decît S_2 (S_1 și S_2 fiind teste valide) pentru H_0 dacă cel puțin una dintre inegalitățile

$$Q_{S_1}(\theta) \geqslant Q_{S_2}(\theta) \text{ pentru toți } \theta \in \omega_a,$$

(19)

$$Q_{S_1}(\theta) \leqslant Q_{S_2}(\theta) \text{ pentru toți } \theta \in \omega_r,$$

este strictă.

DEFINIȚIA 12. Dacă S_1 și S_2 sînt două teste valide pentru H_0, și

(20) $$M_{S_1}(n; \theta) < M_{S_2}(n; \theta) \text{ pentru } \theta \in \Theta,$$

vom spune că S_1 este mai eficient sau mai economic decît S_2 în θ.

DEFINIȚIA 13. $S^* \in \mathcal{C}$ este uniform (în raport cu θ) cel mai eficient (U.C.M.E.) pentru H_0 dacă

(21) $$\lim_{S \in \mathcal{C}} M_S(n; \theta) = M_{S^*}(n; \theta) \text{ pentru toți } \theta \in \Theta.$$

Scanned with OKEN Scanner

Cînd Θ conține numai două puncte în anumite condiții, există teste U.C.M.E. În general, pentru familiile $\{F_n(x;\theta),\ \theta\in\Theta\}$ ce au trei sau mai multe puncte distincte în Θ nu există teste uniform cel mai eficiente. În astfel de cazuri trebuie să se introducă un criteriu adițional pentru a defini un test optim în clasa testelor valide.

DEFINIȚIA 14. S^* este local uniform cel mai eficient (L.U.C.M.E.) dacă (21) este satisfăcută de S^* pentru toți $\theta\in\Theta'$ (Θ' fiind o anumită submulțime proprie a lui Θ).

Un alt criteriu rezonabil al optimalității este ca testul să minimizeze

$$\sup_{\theta\in\Theta} M_S(n;\theta) \text{ sau } \sup_{\theta\in\omega_a\cup\omega_r} M_S(n;\theta)$$

în raport cu toate alegerile posibile ale lui $S\in\mathcal{C}$.

Exemplul 2. Considerăm schema selecției duble. Deoarece cerințele (a) și (b) din (18) au fost discutate în exemplul 1, pentru validitate, trebuie să ajustăm constantele pentru a obține

$$Q(p_1)\leqslant\beta.$$

Pentru testul D, constantele n_1, n_2, a și b ($0\leqslant a<n_1$, $a<b<n_1+n_2$) sînt determinate de

$$\sum_{\tau=0}^{a} C_{n_1}^{\tau}p_0^{\tau}(1-p_0)^{n_1-\tau}+\sum_{c=a+1}^{b} C_{n_1}^{c}p_0^{c}(1-p_0)^{n_1-c}\sum_{\nu=0}^{b-c} C_{n_2}^{\nu}p_0^{\nu}(1-p_0)^{n_2-\nu}\geqslant 1-\alpha$$

(22)

$$\sum_{\tau=0}^{a} C_{n_1}^{\tau}p_1^{\tau}(1-p_1)^{n_1-\tau}+\sum_{c=a+1}^{b} C_{n_1}^{c}p_1^{c}(1-p_1)^{n_1-c}\sum_{\nu=0}^{b-c} C_{n_2}^{\nu}p_1^{\nu}(1-p_1)^{n_2-\nu}\leqslant\beta.$$

Pentru o mulțime $(p_0, p_1, \alpha, \beta)$ dată este, în general, posibil să dăm cel puțin o combinație de (n_1, n_2, a, b) care satisface cele două inegalități din (22). Se va alege acea combinație care minimizează $M_D(n;p)$ într-o valoare convenabilă a lui $p(p_0$ și $p_1)$.

O astfel de alegere dă în clasa tuturor procedeelor selecțiilor duble valide teste L.C.M.E.

§4. Proprietăți ale funcției C.O. și funcției V.M.V.S.

Ne propunem să obținem proprietățile funcțiilor C.O. și V.M.V.S. ale testului S pentru verificarea ipotezei

$$H_0:\theta\in\omega_a \text{ față de } H_1:\theta\in\omega_r,$$

unde θ este parametrul familiei $\{F_n(x;\theta),\ \theta\in\Theta\}$.

Fie $p(n;\theta)$ funcția de frecvență a variabilei n și T_n o statistică arbitrară pe E_n definită pentru fiecare întreg pozitiv. Putem să considerăm $\{T_n\}_{1<n<\infty}$ ca un șir de variabile aleatoare generat de S. Incluziunea succesivă de elemente în T_n încetează de îndată ce S oprește selecția cu

Scanned with OKEN Scanner

acceptarea sau cu respingerea ipotezei H_0. Introducem variabila aleatoare T_n.
Definim

$$P(T_n < T \mid \theta) = \sum_{n=1}^{\infty} P(T_n < T \mid n = n, \theta)\, p(n, \theta) =$$

$$(23) \qquad = \sum_{n=1}^{\infty} \int_A dF_n(\mathbf{x}; \theta), \quad A = \{x,\ T_n(\mathbf{x}) < T,\ T \text{ real}\} \subset R_n^0 \cup R_n^1$$

$$(24) \qquad M(T_n; \theta) = \sum_{n=1}^{\infty} M(T_n \mid n = n; \theta) p(n, \theta) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{R_n^0 \cup R_n^1} T_n(\mathbf{x}) dF_n(\mathbf{x}; \theta),$$

$$M(T_n \mid H_0 \text{ acceptată}; \theta) =$$

$$(25) \qquad = \sum_{n=1}^{\infty} M(T_n \mid n = n, H_0 \text{ acceptată}; \theta) P(n = n \mid H_0 \text{ acceptată}; \theta) =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \int_{R_n^0} \frac{T_n(\mathbf{x})\, dF_n(\mathbf{x}; \theta)}{Q(\theta)}.$$

Dacă S este închis, T_n poate fi privită ca o variabilă aleatoare deoarece membrul drept al selecției (23) reprezintă o funcție de repartiție. Această afirmație este adevărată cînd S este deschis (din definiția lui $p(\infty; \theta)$).

Observație. Pentru testul bazat pe o selecție de volum n fixat, $T_n \equiv T_n$.

Fie

$$(26) \qquad Z_n(x) = \ln \frac{f_n(x; \theta'')}{f_n(x; \theta')} \text{ pentru orice } \theta', \theta'' \in \Theta.$$

Fără a pierde din generalitate, definim

$$Z_n(x) = 0$$

cînd

$$f_n(x; \theta') = f_n(x; \theta'') = 0 \text{ pentru orice } x \in E_n.$$

Observație. Dacă $\theta = \theta'$ sau θ'', atît $f_n(x; \theta')$ cît și $f_n(x, \theta'')$ sînt zero cu probabilitatea zero.

Dacă x_i sînt independente cu densitățile $f_i(x_i; \theta)$ (26) se scrie

$$(27) \qquad Z_n(x) = \sum_{i=1}^{n} z_i(x_i), \text{ unde } z_i(x_i) = \ln \frac{f_i(x_i; \theta'')}{f_i(x_i; \theta')}.$$

Dacă x_i sînt independente și identic repartizate pentru un $\theta \in \Theta$, z_i vor fi de asemenea independente și identic repartizate pentru același θ cu repartiția comună $g(z; \theta)$. Pot exista cazuri cînd $\{z_i\}$ sînt independente și identic repartizate chiar cînd x_i nu sînt.

Scanned with OKEN Scanner

LEMA 1. *Pentru orice variabilă aleatoare u cu valoarea medie $M(u)$ finită are loc inegalitatea*

$$M(u) \leqslant \ln M(e^u). \quad \text{(Wald (1963))}. \tag{28}$$

Inegalitatea strictă are loc dacă și numai dacă

$$P(U = c) = 1$$

pentru o constantă c. În particular pentru orice $n \geqslant 1$, $\theta' \in \Theta$ și $\theta'' \in \Theta$

$$M(Z_n;\ \theta') \leqslant 0 \leqslant M(Z_n;\ \theta''). \tag{29}$$

Demonstrație. Pentru fiecare u real, teorema lui Taylor permite să scriem

$$e^{u - M(u)} = 1 + [u - M(u)] + \frac{1}{2}[u - M(u)]^2 e^{\xi(u)}$$

unde $\xi(u)$ variază între 0 și $u - M(u)$. Deoarece termenul al treilea din membrul drept este nenegativ pentru toți u reali

$$M(e^{u - M(u)}) = 1 + \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} [u - M(u)]^2 e^{\xi(u)}\, dP(u \leqslant u) \geqslant 1, \tag{30}$$

ceea ce demonstrează (28)

Dacă $P(u = c) = 1$, atunci $c = M(u)$ și al doilea termen din (30) se anulează și în consecință în (28) are loc inegalitate strictă. Reciproc, dacă

$$M(u) = \ln M(e^u)$$

atunci al doilea termen din (30) trebuie să se anuleze, și aceasta implică

$$P(u = c) = 1, \text{ cînd } c = M(u).$$

În sfîrșit, scriind succesiv în (28)

$$u = Z_n \quad \text{și} \quad u = -Z_n$$

și luînd media în $\theta = \theta'$ și respectiv $\theta = \theta''$ obținem (29). Avem inegalități stricte în (29) dacă și numai dacă

$$P(f_n(x;\ \theta')) = f_n((x;\ \theta'')|\theta) \text{ pentru } \theta = \theta' \text{ respectiv } \theta = \theta''$$

Observație. În anumite situații se poate ca

$$M(Z_n;\ \theta') = -\infty \text{ și (sau) } M(Z_n;\ \theta'') = \infty$$

Scanned with OKEN Scanner

TEOREMA 1. *Pentru orice test închis sau deschis, funcţiile* C.O. *şi de putere satisfac*

$$M(e^{z_n} \mid H_0 \text{ acceptată};\ \theta') = \frac{Q(\theta'')}{Q(\theta')} \tag{31}$$

$$M(e^{z_n} \mid H_0 \text{ respinsă};\ \theta') = \frac{P(Q'')}{P(Q')} \tag{32}$$

Demonstraţie. Din (25) şi din (26) avem

$$P(e^{z_n} \mid H_0 \text{ acceptată};\ \theta') =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \int_{R_n^0} \left[\frac{f_n(x;\ \theta'')}{f_n(x;\ \theta')} \right] dF_n(x;\ \theta') \Big/ \sum_{n=1}^{\infty} \int_{R_n^0} dF_n(x;\ \theta') =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \int_{R_n^0} dF_n(x;\ \theta'') \Big/ \sum_{n=1}^{\infty} \int_{R_n^0} dF_n(x;\ \theta') = \frac{Q(\theta'')}{Q(\theta')},$$

ceea ce demonstrează (31)
(32) rezultă asemănător.

Observaţii. i) Dacă testul este închis, atunci

$$P(\theta) = 1 - Q(\theta) \text{ pentru toţi } \theta \in \Theta$$

şi membrul drept al relaţiei (32) se poate scrie ca

$$[1 - Q(\theta'')]/[1 - Q(\theta')]$$

ii) Dacă testul este închis, teorema 1 arată cum se poate determina indirect C.O. în orice două puncte arbitrare θ' şi θ'' din Θ. Dacă membrii din stînga ai relaţiilor (31) şi (32), pe care să-l notăm prin $B(\theta', \theta'')$ şi respectiv prin $A(\theta', \theta'')$, pot fi găsiţi printr-o anumită metodă, atunci

$$Q(\theta') = \frac{A(\theta', \theta'') - 1}{A(\theta', \theta'') - B(\theta', \theta'')},\quad Q(\theta'') = B(\theta', \theta'')Q(\theta') \tag{33}$$

iii) Pentru o problemă de tipul

$$H_0 : \theta = \theta_0 \text{ faţă de } H_1 : \theta = \theta_1$$

putem verifica validitatea testului S, cercetînd dacă, pentru o pereche dată (α, β)

$$B(\theta_0, \theta_1) \leqslant \frac{\beta}{1 - \alpha},\quad A(\theta_0, \theta_1) \geqslant \frac{1 - \beta}{\alpha}. \tag{34}$$

Dacă testul S atinge tăria (α, β), atunci în (34) avem inegalităţi stricte.

Scanned with OKEN Scanner

Pentru o problemă de tipul

$$H_0 : \theta \leqslant \theta_0 \text{ față de } H_1 : \theta \geqslant \theta_1 \quad (\underline{\theta} < \theta_0 < \theta_1 < \overline{\theta})$$

într-o familie de repartiții cu un parametru se poate verifica validitatea testului S verificînd (34) și dacă $Q(\theta)$ este necrescătoare pe $[\underline{\theta}, \theta_0]$ și pe $[\theta_1, \overline{\theta}]$.

Fie $t_i = t_i(x_i)$ orice statistică ce depinde numai de x_i $(i = 1, 2, \ldots)$ și

$$T_n = \sum_{i=1}^{n} t_i \text{ pentru } n \geqslant 1$$

Elementele șirului $\{T_n\}$ sînt observate succesiv în test. Dacă $t_i = t$ pentru toți i și $\{x_i\}$ sînt independente și identic repartizate, atunci și $\{t_i\}$ sînt independente și identic repartizate, reciproca netrebuind să fie adevărată.

TEOREMA 2. (Wald (1945), Blackwell (1946)). *Presupunem că, pentru orice* $\theta \in \Theta$ *fixat,* $\{t_i\}$ *sînt independente cu aceeași medie* $M(t;\ \theta)$. *Dacă* $M(|t_i|;\ \theta) < \infty$ *pentru toți* $i \geqslant 1$ *și* $M(n;\ \theta) < \infty$, *avem*

$$M(T_n;\ \theta) = M(n;\ \theta)M(t,\ \theta) \tag{35}$$

Dacă $M\left(\sum_{1}^{n} |t_i|;\ \theta\right) < \infty$, *atunci atît* $M(n;\ \theta)$ *cît și* $M(t;\ \theta)$ *există și* (35) *are loc.*

Demonstrație. Prin definiție, membrul stîng al relației (35) se scrie

$$M(T_n;\ \theta) = \sum_{n=1}^{\infty} p(n;\ \theta)\left[\sum_{i=1}^{n} M(t_i \mid n = n;\ \theta)\right] =$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} p(n;\ \theta)M(t_i \mid n = n;\ \theta) = \tag{36}$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty} P(n \geqslant i \mid \theta)M(t_i \mid n \geqslant i;\ \theta).$$

Deoarece evenimentul $n \geqslant i$ depinde numai de $t_1, \ldots, t_{i-1}$ variabila t_i este independentă de evenimentul $n \geqslant i$ pentru fiecare $i \geqslant 1$.
În consecință

$$M(t_i \mid n \geqslant i;\ \theta) = M(t_i;\ \theta) = M(t;\ \theta) \text{ pentru toți } i \geqslant 1 \tag{37}$$

În continuare,

$$\sum_{i=1}^{\infty} P(n \geqslant i \mid \theta) = \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{n=i}^{\infty} p(n;\ \theta) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{n} p(n;\ \theta) = M(n;\ \theta) \tag{38}$$

Ținînd seama în (36) de (37) și (38) obținem (35). Rămîne să arătăm că în condițiile teoremei este valabilă rearanjarea seriei infinite în (36) și (38). Dacă $M(n;\ \theta) < \infty$, atunci este valabilă (38) și dacă în plus

Scanned with OKEN Scanner

$M(|t_i|;\ \theta) < \infty$ pentru toţi $i \geqslant 1$, atunci

$$M(|T_n|;\ \theta) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} p(n;\ \theta)\left[\sum_{i=1}^{n} M(|t_i||n=n;\ \theta)\right] = M(|t_i|;\ \theta)M(n;\ \theta) < \infty$$

Atunci seria din (36) este absolut convergentă şi prin urmare, rearanjarea sa este valabilă. În sfîrşit, dacă

$$M\left(\sum_{i=1}^{n} |t_i|;\ \theta\right) < \infty$$

atunci

$$M(|T_n|;\ \theta) \leqslant \sum_{i=1}^{\infty} P(n \geqslant i|\ \theta) M(|t_i|;\ \theta) < \infty$$

ceea ce implică că $M(t;\ \theta)$ şi $M(n;\ \theta)$ există. De asemenea aceasta implică convergenta absolută a lui (36) şi, prin urmare, (35) are loc.

Observaţie. Pentru teste bazate pe selecţii de volum fix (35) are loc întotdeauna.

Teorema 2 are loc pentru testele secvenţiale privind parametrii familiilor multidimensionale.

$$\{F(x_1, \ldots, x_k;\ \theta),\ \theta \in \Theta\}$$

şi atunci avem

$$t_i = t_i(x_{1i}, \ldots, x_{ki}) \text{ pentru } i \geqslant 1.$$

Blackwell şi Girshick (1946) dă un analog al relaţiei (35) în cazul k-dimensional şi Blackwell (1946) cercetează relaţia (35) în cazul $M(t;\ \theta) = 0$.

Pentru multe teste secvenţiale, $M(n;\ \theta)$ se determină cu dificultate din (14). Teorema 2 permite să se determine mai întîi $M(T_n;\ \theta)$ şi atunci

$$M(n;\ \theta) = \frac{M(T_n;\ \theta)}{M(t;\ \theta)} \text{ dacă } M(t:\ \theta) \neq 0 \tag{39}$$

Funcţiile $\{t_i\}$ au fost alese convenabil. Cînd pentru un $\theta \in \Theta$, $M(t;\ \theta) = 0$, se poate găsi o formulă generală asemănătoare cu (39), din

Teorema 3. *Presupunem că, pentru orice* θ *fixat,* $\theta \in \Theta$, $\{t_i\}$ *sînt independente cu aceeaşi medie* $M(t;\ \theta)$ *şi aceeaşi dispersie* $D^2(t;\ \theta)$. *Dacă* $D^2(t;\ \theta) < \infty$ *şi* $D^2(n;\ \theta) < \infty$, *atunci avem identic*

$$M\{[T_n - nM(t;\ \theta)]^2,\ \theta\} = M(n;\ \theta)\, D^2(t;\ \theta) \tag{40}$$

Dacă

$$M\left\{\left[\sum_{i=1}^{n} |t_i - M(t;\ \theta)|\right]^2;\ \theta\right\} < \infty$$

atunci

$$M(n;\ \theta) < \infty,\ D^2(t;\ \theta) < \infty \text{ şi are loc } (40)$$

Demonstrație. Prin definiție membrul stîng al relației (40) poate fi scris ca

$$M([T_n - nM(t;\ \theta)]^2;\ \theta) =$$

$$(41) \qquad = \sum_{n=1}^{\infty} p(n;\ \theta)\left[\sum_{i=1}^{n} M(\{t_i - M(t;\ \theta)\}^2 \mid n = n;\ \theta)\right] +$$

$$+ \sum_{n=2}^{\infty} p(n;\ \theta)\left[\sum_{i=1}^{n}\sum_{i\neq j}^{n} M(\{t_i - M(t;\ \theta)\}\{t_j - M(t;\ \theta)\} \mid n = n;\ \theta)\right]$$

Ca în teorema 2, prima sumă din (41) este

$$(42) \qquad \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{n=i}^{\infty} p(n;\ \theta) M([t_i - M(t;\ \theta)]^2 \mid n = n;\ \theta) = M(n;\ \theta) D^2(t;\ \theta)$$

A doua sumă din (41) poate fi scrisă în forma

$$2\sum_{n=2}^{\infty} p(n;\ \theta)\left[\sum_{i=2}^{n} M(y_i \mid n = n;\ \theta)\right] =$$

$$(43) \qquad = 2\sum_{i=2}^{\infty}\sum_{n=i}^{\infty} p(n;\ \theta) M(y_i \mid n = n;\ \theta) = 2\sum_{i=2}^{\infty} P(n \geqslant i \mid \theta) M(y_i \mid n \geqslant i;\ \theta),$$

unde

$$y_i = [t_i - M(t;\ \theta)] \sum_{j=1}^{i-1} [t_j - M(t;\ \theta)] \text{ pentru } i \geqslant 1.$$

Deoarece t_i este independentă de evenimentul $n \geqslant i$ pentru fiecare $i \geqslant 1$, avem

$$M(y_i \mid n \geqslant i;\ \theta) =$$

$$= M(t_i - M(t;\ \theta);\ \theta) \sum_{j=1}^{i-1} M(t_j - M(t;\ \theta) \mid n \geqslant i;\ \theta) = 0 \text{ pentru toți } i > 1.$$

În consecință, (42) și (43) conduc la (40).

Rămîne să justificăm rearanjarea seriei infinite din (42) și (43) în condițiile teoremei. Mai întîi observăm că dacă $D^2(n;\ \theta) < \infty$ atunci

$$M(n;\ \theta) < \infty \text{ și } M(n^2;\ \theta) < \infty.$$

Astfel în condițiile

$$D^2(t;\ \theta) < \infty \text{ și } D^2(n;\ \theta) < \infty$$

seria din (42) este convergentă și prin urmare ea poate fi aranjată în forma primei serii din (41). Folosind faptul că, pentru fiecare $i \geqslant 1$ și $j \geqslant 1$

$$M(|t_i - M(t;\ \theta)| \cdot |t_j - M(t;\ \theta)| : \theta) \leqslant D^2(t;\ \theta)$$

Scanned with OKEN Scanner

observăm că

$$2\sum_{i=2}^{\infty}\sum_{n=i}^{\infty}p(n;\ \theta)M(|y_i||n=n;\ \theta)\leqslant 2D^2(t;\ \theta)\sum_{i=2}^{\infty}(i-1)P(n\geqslant i|\theta)\leqslant$$

$$\leqslant D^2(t;\ \theta)[M(n^2;\ \theta)-M(n;\ \theta)]<\infty.$$

Astfel dacă $D^2(t;\ \theta)<\infty$ şi $D^2(n;\ \theta)<\infty$ a doua serie în (43) este absolut convergentă şi prin urmare poate fi aranjată în forma celei de-a doua serii în (41). În sfîrşit dacă

$$M\left(\left[\sum_{i=1}^{n}|t_i-M(t;\ \theta)|\right]^2;\ \theta\right)<\infty$$

atunci

$$M([T_n-nM(t;\ \theta)]^2;\ \theta)\leqslant M(n;\ \theta)D^2(t;\ \theta)+$$

$$+\sum_{n=2}^{\infty}p(n;\ \theta)\left[\sum_{i\neq j}^{n}\sum^{n}M(|t_i-M(t;\ \theta)|\cdot|t_j-M(t;\ \theta)||n=n;\ \theta\right]$$

care implică

$$M(n;\ \theta)<\infty \quad \text{şi} \quad D^2(t;\ \theta)<\infty$$

De asemenea implică convergenţa absolută a lui (43) şi prin urmare (40) are loc.

Observaţii. i) (40) are loc întotdeauna pentru testele bazate pe selecţii de volum fix.

ii) Din teorema 3 urmează că

$$M(n;\ \theta)=\frac{M(T_n^2;\ \theta)}{M(t^2;\ \theta)} \quad \text{dacă} \quad M(t;\ \theta)=0 \tag{44}$$

iii) Din teoremele 2 şi 3 se poate obţine o expresie pentru $D^2(n;\ \theta)$, cînd $M(t;\ \theta)\neq 0$, în termeni de $M(T_n;\ \theta)$, $D^2(T_n;\ \theta)$ şi $M(nT_n;\ \theta)$.

TEOREMA 4. (Chow, Robbins, Teicher (1965)). *Fie* $\{t_i\}$ *independente cu*

$$M(t_i;\ \theta)=\mu,\ D^2(t_i;\ \theta)=\sigma^2 \text{ şi } M([t_i-\mu]^3;\ \theta)=\zeta$$

pentru toţi $i\geqslant 1$.

a) *În oricare din condiţiile*

1) $M\left(\left[\sum_{i=1}^{n}|t_i-\mu|\right]^3;\ \theta\right)<\infty$,

2) $M(|t_i-\mu|^3;\ \theta)\leqslant k<\infty$ *pentru toţi* $i\geqslant 1$ *şi* $M(n^3;\ \theta)<\infty$,

3) $M([t_i-\mu]^4;\ \theta)\leqslant k<\infty$ *pentru toţi* $i\geqslant 1$ *şi* $M(n^2;\ \theta)<\infty$,

are loc identitatea

$$M([T_n-n\mu]^3;\ \theta)=\zeta M(n;\ \theta)+3\sigma^2M(n[T_n-n\mu];\ \theta) \tag{45}$$

Scanned with OKEN Scanner

b) *În oricare din condițiile*

1) $M\left(\left[\sum_{i=1}^{n} |t_i - \mu|\right]^4;\ \theta\right) < \infty$

2) $M(n^2;\ \theta) < \infty$

are loc identitatea

$$M([T_n - n\mu]^4;\ \theta) = 6\sigma^2 M(n[T_n - n\mu]^2;\ \theta) + 4\zeta M(n[T_n - n\mu];\ \theta) +$$

$$+ (\gamma - 3\sigma^4)M(n;\ \theta) - 3\sigma^4 M(n^2;\ \theta), \tag{46}$$

unde

$$\gamma = M([t_i - \mu]^4;\ \theta) < \infty \text{ pentru toți } i \geqslant 1. \tag{47}$$

§ 5. Margini pentru funcția V.M.V.S.

Adesori este dificil să evaluăm funcțiile V.M.V.S. ale testelor secvențiale prin folosirea teoremelor 2 și 3 sau a altor metode. În multe din aceste cazuri se pot obține margini inferioare pentru $M(n;\ \theta)$ în termeni de $\{z_i\}$. Astfel de margini sînt folositoare deoarece în lipsa cunoașterii lui $M(n;\ \theta)$ a unui test secvențial dat avem cel puțin o evaluare a valorii minime a lui $M(n;\ \theta)$. Mai mult, dacă $M(n;\ \theta)$ este cunoscută, o putem compara cu marginea inferioară. În cazul în care funcția C.O. a unui test dat este cunoscută are loc

TEOREMA 5. *Dacă, pentru* $\theta = \theta'$, $\{z_i\}$ *sînt independente, identic repartizate cu media comună* $M(z;\ \theta')$,

$$M(|z|;\ \theta') < \infty$$

și dacă

$$M(n;\ \theta') < \infty$$

atunci

$$-M(n;\ \theta)M(z;\ \theta') \geqslant Q(\theta') \ln \frac{Q(\theta')}{Q(\theta'')} +$$

$$+ [1 - Q(\theta')] \ln \frac{1 - Q(\theta')}{1 - Q(\theta'')} \tag{48}$$

(48) *se transformă în egalitate strictă dacă și numai dacă există constantele a și b astfel încît*

$$P(Z_n = b \mid H_0 \text{ acceptată},\ \theta') = 1 = P(Z_n = a \mid H_0 \text{ respinsă},\ \theta'). \tag{49}$$

Demonstrație. (Ghosh (1970)). Deoarece $M(n;\ \theta') < \infty$ testul se termină cu probabilitatea unu cînd $\theta = \theta'$ și prin urmare

$$P(H_0 \text{ este respinsă} \mid \theta') = 1 - Q(\theta')$$

Din teorema

$$M(n;\ \theta')M(z;\ \theta') = M(Z_n;\ \theta') = Q(\theta')M(Z_n \mid H_0 \text{ acceptată};\ \theta') +$$

$$+ [1 - Q(\theta')]M(Z_n \mid H_0 \text{ respinsă};\ \theta') \tag{50}$$

Scanned with OKEN Scanner

Din lema 1 și teorema 1

$$M(Z_n \mid H_0 \text{ acceptată};\ \theta') \leqslant \ln M(e^{Z_n} \mid H_0 \text{ acceptată}\ \theta') = \ln \frac{Q(\theta'')}{Q(\theta')}$$

$$M(Z_n \mid H_0 \text{ respinsă};\ \theta') \leqslant \ln M(e^{Z_n} \mid H_0 \text{ respinsă},\ \theta') = \ln \frac{1 - Q(\theta'')}{1 - Q(\theta')}$$

Inegalitățile se transformă în inegalități stricte, dacă și numai dacă (ca în lema 1) există constantele b și a satisfăcînd (49). Ținînd seama de aceste inegalități în (50), obținem (48).

Din (29) și din teorema 5, pentru $M(z;\ \theta') \neq 0$,

$$(51)\quad M(n;\theta') \geqslant \frac{Q(\theta')\ln[Q(\theta'')/Q(\theta')] + [1-Q(\theta')]\ln\{[1-Q(\theta'')]/[1-Q(\theta')]\}}{M(z;\ \theta')}$$

Deci, permițînd lui θ' să varieze în Θ se poate găsi o margine inferioară pentru $M(n;\ \theta')$ pentru diferiți $\theta' \in \Theta$. În practică avem situații cînd θ' și θ'' identifică doi membri distincți ai unei familii $\{F_n(x;\ \theta),\ \theta \in \Theta\}$ date astfel încît

$$P(f_n(x;\ \theta') = f_n(x;\ \theta'') \mid \theta') < 1$$

În consecință, din lema 1, $M(z;\ \theta') < 0$ și (51) are loc.

Presupunem acum că S este orice test valabil pentru ipoteza

$$H_0 : \theta \in \omega_a \text{ față de } H_1 : \theta \in \omega_r$$

bazat pe variabilele $\{x_i\}$ independente și identic repartizate. Atunci cînd $Q(\theta)$ este necunoscută este de folos să avem o margine inferioară pentru $M(n;\ \theta)$ în termeni de riscurile (α, β) prestabilite. Dacă atît H_0 cît și H_1 sînt ipoteze simple

$$\omega_a = (\theta_0), \quad \omega_r = (\theta_1)$$

și se știe că S atinge tăria (α, β) se poate, din teorema 5, folosi aceasta pentru $M(n;\ \theta_0)$ și $M(n;\ \theta_1)$.

Făcînd în (51) succesiv ($\theta' = \theta_0$, $\theta'' = \theta_1$) și ($\theta' = \theta_1$, $\theta'' = \theta_0$) și punînd $Q(\theta_0) = 1 - \alpha$; $Q(\theta_1) = \beta$, obținem

$$(52)\quad M(n;\ \theta_0) \geqslant \frac{(1-\alpha)\ln[\beta/(1-\alpha)] + \alpha\ln[(1-\beta)/\alpha]}{M(\ln[f(x;\ \theta_1)/f(x;\ \theta_0)];\ \theta_0)}$$

$$M(n;\ \theta_1) \geqslant \frac{\beta\ln[\beta/(1-\alpha)] + (1-\beta)\ln[(1-\beta)/\alpha]}{M(\ln[f(x;\ \theta_1)/f(x;\ \theta_0)];\ \theta_1)}$$

Ținînd seama că pentru toți $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$ și $0 \leqslant \beta \leqslant 1$,

$$(53)\quad (1-\alpha)\ln\frac{\beta}{1-\alpha} + \alpha\ln\frac{1-\beta}{\alpha} \leqslant 0 \leqslant \beta\ln\frac{\beta}{1-\alpha} + (1-\beta)\ln\frac{1-\beta}{\alpha}$$

Scanned with OKEN Scanner

cu inegalitate strictă dacă şi numai dacă $\alpha + \beta = 1$, cele două margini în (52) sînt întotdeauna nenegative.

Într-o situaţie mai generală cînd S nu atinge tăria (α, β) şi ipotezele pot fi compuse, marginile corespunzătoare sînt date de

TEOREMA 6 (Hoeffding (1953). *Fie S orice test valid pentru*

$$H_0 : \theta \in \omega_a \text{ faţă de } H_1 : \theta \in \omega_r$$

astfel încît

$$M(n;\ \theta) < \infty \text{ pentru toţi } \theta \in \omega_a \cup \omega_r$$

şi

$$\alpha + \beta = 1.$$

Dacă $\{x_i\}$ sînt independente şi identic repartizate cu

$$M(|\ln [f(x;\ \theta_1)/f(x;\ \theta_0)]|;\ \theta) < \infty$$

pentru toţi $\theta \in \omega_a \cup \omega_r$, $\theta_0 \in \omega_a$, $\theta_1 \in \omega_r$
atunci

$$M(n;\ \theta_0) \geqslant \frac{(1-\alpha)\ln[\beta/(1-\alpha)] + \alpha \ln[(1-\beta)/\alpha]}{\sup\limits_{\theta_1 \in \omega_r} M(\ln [f(x;\ \theta_1)/f(x;\ \theta_0)];\ \theta_0)} \tag{54}$$

pentru orice $\theta_0 \in \omega_a$

$$M(n;\ \theta_1) \geqslant \frac{\beta \ln[\beta(1-\alpha)] + (1-\beta)\ln[(1-\beta)/\alpha]}{\inf\limits_{\theta_0 \in \omega_a} M(\ln [f(x;\ \theta_1)/f(x;\ \theta_0)];\ \theta_1)} \tag{55}$$

pentru orice $\theta_1 \in \omega_r$

Demonstraţie. Făcînd succesiv în (51)

$$(\theta' = \theta_0,\ \theta'' = \theta_1) \quad \text{şi} \quad (\theta' = \theta_1,\ \theta'' = \theta_0)$$

pentru fiecare $\theta_0 \in \omega_a$ şi $\theta_1 \in \omega_r$, obţinem

$$M(n;\ \theta_0) \geqslant \frac{G_0[Q(\theta_0),\ Q(\theta_1)]}{M(\ln [f(x;\ \theta_1)/f(x;\ \theta_0)];\ \theta_0)} \tag{56}$$

$$M(n;\ \theta_1) \geqslant \frac{G_1[Q(\theta_0),\ Q(\theta_1)]}{M(\ln [f(x;\ \theta_1)/f(x;\ \theta_0)];\ \theta_1)} \tag{57}$$

unde

$$G_0[Q(\theta_0),\ Q(\theta_1)] = Q(\theta_0) \ln \frac{Q(\theta_1)}{Q(\theta_0)} + [1 - Q(\theta_0)] \ln \frac{1 - Q(\theta_1)}{1 - Q(\theta_0)}, \tag{58}$$

$$G_1[Q(\theta_0),\ Q(\theta_1)] = Q(\theta_1) \ln \frac{Q(\theta_1)}{Q(\theta_0)} + [1 - Q(\theta_1)] \ln \frac{1 - Q(\theta_1)}{1 - Q(\theta_0)} \tag{59}$$

Scanned with OKEN Scanner

Condiţiile (18) şi $\alpha + \beta \leqslant 1$ sînt echivalente cu inegalităţile

$$0 \leqslant Q(\theta_1) \leqslant \beta \leqslant 1 - \alpha \leqslant Q(\theta_0) \leqslant 1$$

pentru toţi $\theta_0 \in \omega_a$, $\theta_1 \in \omega_r$. În consecinţă

$$\frac{\partial G_0[Q(\theta_0), Q(\theta_1)]}{\partial Q(\theta_0)} = \ln \frac{Q(\theta_1)[1 - Q(\theta_0)]}{Q(\theta_0)[1 - Q(\theta_1)]} \leqslant 0,$$

$$\frac{\partial G_1[Q(\theta_0), Q(\theta_1)]}{\partial Q(\theta_1)} = \frac{Q(\theta_0) - Q(\theta_1)}{Q(\theta_1)[1 - Q(\theta_1)]} \geqslant 0.$$

Deci, pentru $Q(\theta_1)$ fixată, $G_0[Q(\theta_0), Q(\theta_1)]$ este o funcţie necrescătoare de $Q(\theta_0)$ pe $[0, 1]$, şi pentru $Q(\theta_0)$ fixată, $G_1[Q(\theta_0), Q(\theta_1)]$ este o funcţie nedescrescătoare de $Q(\theta_1)$ pe $[0, 1]$. Înlocuind $Q(\theta_0)$ prin $1 - \alpha$ şi atunci $Q(\theta_1)$ prin β, observăm că $G_0[Q(\theta_0), Q(\theta_1)]$ este cel mult egală cu numărătorul membrului drept din prima inegalitate din (52) pentru toţi $\theta_0 \in \omega_a$ şi $\theta_1 \in \omega_r$. Analog, $G_1[Q(\theta_0), Q(\theta_1)]$ este cel puţin egală cu numărătorul membrului drept din a doua inegalitate din (52) pentru toţi $\theta_0 \in \omega_a$ şi $\theta_1 \in \omega_r$. Urmează că cele două inegalităţi din (52) au loc pentru toţi $\theta_0 \in \omega_a$ şi $\theta_1 \in \omega_r$. În sfîrşit observăm că $M(n;\ \theta) \geqslant 0$ pentru toţi $\theta \in \Theta$. Deoarece are loc (53), iar din lema 1

$$M(\ln [f(x;\ \theta_1)/f(x;\ \theta_0)];\ \theta_0] \leqslant 0$$

pentru toţi $\theta_1 \in \omega_r$, luînd superiorul în (54), (55) avem cea mai mare margine inferioară, pentru $M(n;\ \theta_0)$ din (52). Printr-un raţionament asemănător, inferiorul în (55) dă cea mai bună margine inferioară pentru $M(n;\ \theta_1)$ (care poate fi obţinută din (52)).

Marginile în (51), (52), (54) şi (55) pot să nu fie cele mai mari margini inferioare pentru $M(n;\ \theta)$. În realitate, cea mai mare margine va varia de la un test la altul şi are o expresie complicată.

TEOREMA. 7 (Hoeffding (1953)). *Dacă condiţiile teoremei* 6 *se aplică pentru toţi* $\theta \in \Theta$, *atunci*

$$(60)\quad M(n;\theta) \geqslant \sup_{0<c<1} \frac{-\ln [\alpha^c(1-\beta)^{1-c} + (1-\alpha)^c\beta^{1-c}]}{c \inf\limits_{\theta_0 \in \omega_a} M\left(\ln \frac{f(x;\theta)}{f(x;\theta_0)};\ \theta\right) + (1-c) \inf\limits_{\theta_1 \in \omega_r} M\left(\ln \frac{f(x;\theta)}{f(x;\theta_1)};\ \theta\right)}$$

Pentru $\theta \in \omega_a$ *şi* $\theta \in \omega_r$ *se obţin* (54) *şi* (55).

TEOREMA 8. (Hoeffding (1960)). *Considerăm orice test valabil pentru* $\theta = \theta_0$ *faţă de* $\theta = \theta_1$ *şi presupunem că* $\{x_i\}$ *sînt independente cu densităţile* $\{f_i(x;\ \theta)\}$. *Pentru* $i \geqslant 1$ *şi pentru* $\theta \in \Theta$ *dat, fie*

$$t_i(x_i) = \ln \frac{f_i(x_i;\ \theta_1)}{f_i(x_i;\ \theta_0)} - M\left(\ln \frac{f_i(x_i;\ \theta_1)}{f_i(x_i;\ \theta_0)};\ \theta_0\right)$$

Presupunem că, pentru toţi $i \geqslant 1$,

$$M(n;\ \theta) < \infty \quad \text{şi} \quad M(t_i^2;\ \theta) \leqslant \sigma^2 < \infty$$

Scanned with OKEN Scanner

Atunci, dacă $\alpha + \beta < 1$, *avem marginea inferioară*

$$M(n;\ \theta) \geqslant \left[\sqrt{\frac{\sigma^2(\theta)}{16} - \xi(\theta)\ln(\alpha+\beta)} - \frac{\sigma(\theta)}{4}\right]^2 \xi^{-2}(\theta) \tag{61}$$

unde

$$\sigma^2(\theta) = \sup_{i>1} M(t_i^2;\ \theta)$$

$$\xi(\theta) = \sup_{i>1} \max\left[M\left(\ln\frac{f_i(x_i;\ \theta)}{f_i(x_i;\ \theta_0)};\ \theta\right),\ M\left(\ln\frac{f_i(x_i;\ \theta)}{f_i(x_i;\ \theta_1)};\ \theta\right)\right]$$

Observație. Cînd $\{x_i\}$ sînt independente și identic repartizate *teorema 8* dă o margine ca aceea din *teorema 7*.

Scanned with OKEN Scanner

Capitolul XXII

TESTUL SECVENȚIAL AL RAPORTULUI PROBABILITĂȚILOR (T.S.R.P.)

§1. Ipoteze simple

1.1. Descrierea T.S.R.P.

În cele ce urmează vom studia problema generală a verificării ipotezei

(1) $$H_0 : \theta \in \omega_a \text{ față de } H_1 : \theta \in \omega_r$$

în condițiile (XXI.18)

Pentru început vom distinge între două ipoteze simple :

(2) $$H_0 : \theta = \theta_0, \quad H_1 : \theta = \theta_1, \quad \theta_0 \neq \theta_1,$$

cu

$$P(n < \infty | \theta) = 1 \text{ pentru } \theta = \theta_0, \theta_1$$

și

(3) $$Q(\theta_0) \geqslant 1 - \alpha, \quad Q(\theta_1) \leqslant \beta$$

În acest caz, zona de indiferență este vidă. Se caută testul U.C.M.E. (definit în (XXI.21) pentru $\theta = \theta_0, \theta_1$, cînd un astfel de test există. Mai întîi definim o clasă specială de teste pentru (2), care este în fapt analogul secvențial al clasei definite de (XIII.15).

Importanța acestei clase speciale în construcția testului U.C.M.E. pentru (1) va fi pusă în evidență în cele ce urmează.

DEFINIȚIA 1. (Wald (1945)). Testul secvențial al raportului probabilităților (T.S.R.P.) $S(b, a)$ pentru (1) este definit prin

Observăm succesiv $\{x_i\}$ $(i = 1, 2 \ldots)$ și la pasul $n \geqslant 1$

i) acceptăm H_0 dacă $Z_n \leqslant b$,

ii) respingem H_0 dacă $Z_n \geqslant a$,

iii) continuăm experimentul cu observația x_{n+1} dacă

(4) $$b < Z_n < a$$

unde : marginile de stopare (b, a), $-\infty < b < a < \infty$ sînt două numere reale, și

(5) $$Z_n = \ln \frac{f_n(\mathbf{x}; \theta_1)}{f_n(\mathbf{x}; \theta_0)} \text{ pentru } n \geqslant 1.$$

Scanned with OKEN Scanner

Dacă, pentru orice n,

$$f_n(\mathbf{x},\ \theta_0) = f_n(\mathbf{x};\ \theta_1) = 0\ ;\ \mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$$

atunci, fără a micşora generalitatea, definim $Z_n = 0$.

Pentru fiecare n

$$P(f_n(\mathbf{x};\ \theta_0) = f_n((\mathbf{x};\ \theta_1)|\ \theta) = 0 \text{ pentru } \theta = \theta_0,\ \theta_1.$$

Regiunea de continuare

$$b < Z_n < a$$

va fi numită *inegalitatea critică* a testului $S(a, b)$ la pasul n. Pentru a identifica $S(b, a)$ cu structura generală (XXI.3) observăm că:

R_1^0 este mulţimea punctelor de pe axa x_1, ce satisfac $Z_1(\mathbf{x}) \leqslant b$

R_1^1 este mulţimea punctelor de pe axa x_1, ce satisfac $Z_1(\mathbf{x}) \geqslant a$ şi

R_1 este mulţimea punctelor de pe axa x_1, ce satisfac $b < Z_1(x) < a$.

Pentru orice $n > 1$, R_n^0, R_n^1 şi R_n sînt mulţimi în E_n ce satisfac următoarele trei sisteme de inegalităţi:

$$[b < Z_1(\mathbf{x}) < a, \ldots, b < Z_{n-1}(\mathbf{x}^{*)}) < a,\ Z_n(\mathbf{x}) \leqslant b]$$

(6)
$$[b < Z_1(\mathbf{x}) < a, \ldots, b < Z_{n-1}(\mathbf{x}) < a,\ Z_n(\mathbf{x}) \geqslant a]$$

$$[b < Z_1(\mathbf{x}) < a, \ldots, b < Z_n(\mathbf{x}) < a],$$

unde $Z_n(\mathbf{x})$ este dat de membrul drept al relaţiei (5). Astfel T.S.R.P. este caracterizat complet prin regulile sale de oprire. Fie $\mathcal{S}$ clasa tuturor testelor care se pot obţine variind (b, a) cu restricţia $-\infty < b < a < \infty$.

În cele ce urmează vom folosi adeseori şirul $\{z_i\}$ de observaţii modificate definit de

(7)
$$z_1 = \ln \frac{f_1(x;\ \theta_1)}{f_1(x;\ \theta_0)}, \qquad z_i = \ln \frac{f_i(\mathbf{x};\ \theta_1) f_{i-1}(\mathbf{x}^{**);}\ \theta_0)}{f_i(\mathbf{x};\ \theta_0) f_{i-1}(\mathbf{x};\ \theta_1)}$$

pentru $i > 1$.
Atunci (5) se reduce la

(8)
$$Z_n = \sum_{i=1}^{n} z_i \text{ pentru } n \geqslant 1.$$

Proprietăţile generale ale clasei $\mathcal{S}$ se pot exprima mai convenabil în termeni de $\{z_i\}$ decît în termeni de $\{x_i\}$. În acest scop observăm că dacă $\{x_i\}$ sînt independente şi identic repartizate cu densitatea $f(x;\ \theta)$, atunci $\{z_i\}$ sînt de asemenea independente şi identic repartizate cu densitatea de repartiţie $g(z,\ \theta)$. Pe de altă parte $\{z_i\}$ pot fi independente şi identic repartizate chiar cînd $\{x_i\}$ nu sînt.

---

*) este vectorul de componente $x_1, \ldots, x_{n-1}$; deci numărul de componentul al vectorului $\mathbf{x}$ este egal cu indicele statisticii Z.

**) numărul de componente ale vectorului $\mathbf{x}$ este egal cu indicele densităţii f.

Scanned with OKEN Scanner

Teoretic este posibil să existe un T.S.R.P. care să se termine la pasul zero, adică înainte de a face prima observaţie. Aceasta se întîmplă cînd definim, $Z_0 = 0$ şi atunci extindem definiţia 1 la $n = 0$. Prin implicaţie, H_0 este acceptată înainte de observaţia x_1 dacă se alege

$$a > b > 0$$

şi se respinge dacă se alege

$$b < a < 0,$$

în timp ce pentru alegerea

$$b < 0 < a$$

se procedează în concordanţă cu (4).

Cu toate implicaţiile teoretice interesante, T.S.R.P. astfel extins nu este realist deoarece orice test statistic trebuie să fie bazat pe o evidenţă observată.

De acum încolo vom presupune că, definiţia 1 stabileşte că, clasa $\mathcal{S}$ cere cel puţin o observaţie cu excepţia cazului cînd se cunoaşte apriori că testul acceptă cu probabilitatea unu sau respinge cu probabilitatea unu.

Definiţia 1 poate fi generalizată prin introducerea a diferite margini de stopare la paşii succesivi ai selecţiei. Adică, regiunile din (4) sînt modificate prin înlocuirea lui b şi a din inegalităţile asociate cu $Z_n(\mathbf{x})$ prin b_n şi a_n, $-\infty < b_n < a_n < \infty$ unde $\{b_n\}$ şi $\{a_n\}$ sînt şiruri de numere reale.

Un astfel de test poartă numele de *T.S.R.P. generalizat* şi proprietăţile sale au fost cercetate, printre alţii, de Weiss (1953), Kiefer, Weiss (1957) şi mai recent de Eisenberg, Ghosh, Simons (1976).

1.2. Determinarea marginilor de stopare

Funcţia C.O., funcţia de frecvenţe a V.M.V.D. şi V.M.V.S. a testului $S(a, b)$ sînt funcţii de $\theta \in \Theta$ cît şi (b, a). În fapt acestea pot fi exprimate ca

$$Q(\theta) = P(Z_1 \leqslant b \mid \theta) + \sum_{n=2}^{\infty} P(b_1 < Z_1 < a, \ldots, b < Z_{n-1} < a, Z_n \leqslant b \mid \theta) =$$

$$= P(Z_n \leqslant b \mid \theta). \tag{9}$$

$$p(n;\ \theta) = \begin{cases} P(Z_1 \leqslant b \mid \theta) + P(Z_1 \geqslant a \mid \theta), & n = 1 \\ P(b < Z_1 < a, \ldots, b < Z_{n-1} < a,\ Z_n \leqslant b \mid \theta) + \\ + P(b < Z_1 < a, \ldots, b < Z_{n-1} < a,\ Z_n \geqslant a \mid \theta), & n \geqslant 1 \end{cases} \tag{10}$$

$$M(n;\ \theta) = \sum_{n=1}^{\infty} np(n;\ \theta), \tag{11}$$

unde Z_n este definit pentru şirul $\{Z_n\}$ de (5) în acelaşi mod ca T_n. Dacă Dacă $S(b, a)$ este deschis, definim

$$p(\infty;\ \theta) = \lim_{n \to \infty} P(b < Z_1 < a, \ldots, b < Z_n < a \mid \theta),$$

astfel că n este o variabilă aleatoare.

Scanned with OKEN Scanner

Comparînd două T.S.R.P., $S(b, a)$ şi $S(a', b')$ vom folosi semnul prim pentru diferitele funcţii care sînt asociate testului $S(a', b')$.

Acum clasa validă $\mathcal{S}_A \subset \mathcal{S}$ a T.S.R.P. este clasa tuturor testelor de forma (4) care sînt închise şi a căror (b, a) satisface (3). Alegerea membrului optim al clasei $\mathcal{S}_A$ este dată în

TEOREMA 1. *Fie $S(b, a)$ şi $S(b', a')$ orice două* T.S.R.P. *pentru*

$$H_0 : \theta = \theta_0 \text{ faţă de } H_1 : \theta = \theta_1$$

cu probabilităţile erorilor satisfăcînd

$$\alpha(\theta_0) > \alpha'(\theta_0) \quad \text{şi} \quad \beta(\theta_1) > \beta'(\theta_1).$$

Atunci trebuie să avem :

$$b' \leqslant b < a \leqslant a'$$

şi prin urmare

$$M(n, \theta) \leqslant M'(n ; \theta)$$

dacă $M(n ; \theta) < \infty$ *pentru orice* $\theta \in \Theta$,
în timp ce

$M(n ; \theta) = \infty$ *implică* $M'(n ; \theta) = \infty$ *pentru orice* $\theta \in \Theta$.

Observaţie. T.S.R.P. din $\mathcal{S}$ care minimizează

$$P(n \leqslant N \mid \theta)$$

pentru orice N şi θ supus la condiţia

$$\alpha(\theta_0) \leqslant \alpha \quad \text{şi} \quad \beta(\theta_1) \leqslant \beta,$$

este unul ale cărui margini de stopare satisfac strict amîndouă inegalităţile cît mai apropiate posibil.

Vom nota acest test prin $S(b^*, a^*)$ şi-l vom numi T.S.R.P. uniform cel mai eficient (U.C.M.E.) pentru (2) (chiar dacă V.M.V.S. nu există).

În particular, dacă $S(b^*, a^*)$ sînt alese pentru orice pereche (α, β) dată să satisfacă inegalităţile (3) cît mai apropiat posibil. În general $S(b^*, a^*)$ va depinde θ_0 şi θ_1. La diferite funcţii asociate testului $S(b^*, a^*)$ ataşăm o stea.

Acum, dacă (9) este cunoscută explicit ca funcţie de (θ, b, a), atunci problema determinării (b^*, a^*) şi deci a testului $S(b^*, a^*)$ este rezolvată. Totuşi, cu excepţia unor cazuri speciale, evaluarea exactă a funcţiei C.O. a testului $S(b, a)$ este dificilă. Din fericire, ca o consecinţă a următoarei teoreme, se poate obţine (b^*, a^*) cu un grad satisfăcător de aproximaţie. Teorema arată de asemenea că $S(b, a)$ pentru orice alegere a marginilor de stopare trebuie să aibe : $\alpha(\theta_0) + \beta(\theta_1) < 1$.

TEOREMA 2. *Probabilităţile erorilor* $(\alpha(\theta_0), \beta(\theta_1))$ *asociate cu T.S.R.P.* $S(b, a)$ *pentru*

$$H_0 : \theta = \theta_0 \text{ faţă de } H_1 : \theta = \theta_1$$

Scanned with OKEN Scanner

satisfac, pentru orice $-\infty < b < a < \infty$ *fixați, inegalitățile*

$$(12)\quad \ln \frac{\beta(\theta_1)}{1-\alpha(\theta_0)} \leqslant \min\ [0,\ b],\quad \ln \frac{1-\beta(\theta_1)}{\alpha(\theta_0)} \geqslant \max\ [0,\ a].$$

Prima inegalitate are loc strict cînd cel puțin $a > b \geqslant 0$ *și a doua inegalitate are loc strict cînd cel puțin* $b < a \leqslant 0$. *Inegalitățile stricte au loc dacă și numai dacă* $b < a < 0$, $S(b,\ a)$ *este închis și respectiv*

$$(13)\quad \begin{aligned} &P(Z_n = b \mid H_0 \text{ acceptată},\ \theta_0) = 1,\\ &P(Z_n = a \mid H_0 \text{ respinsă},\ \theta_0) = 1. \end{aligned}$$

Demonstrație (Ghosh (1970). Din teorema XXI.1 urmează că funcțiile C.O. și de putere ale testului $S\,(b,\ a)$ satisfac

$$M(e^{Z_n} \mid H_0 \text{ acceptată};\ \theta_0) = \frac{Q(\theta_1)}{Q(\theta_0)} = \frac{\beta(\theta_1)}{Q(\theta_0)}$$

$$M(e^{Z_n} \mid H_0 \text{ respinsă};\ \theta_0) = \frac{P(\theta_1)}{P(\theta_0)} = \frac{P(\theta_1)}{\alpha(\theta_0)}$$

unde Z_n este definită în (9). Din (XXI.7)

$$Q(\theta_0) \leqslant 1-\alpha(\theta_0) \quad \text{și} \quad P(\theta_1) \leqslant 1-\beta(\theta_1)$$

și prin urmare

$$(14)\quad \begin{aligned} &M(e^{Z_n} \mid H_0 \text{ acceptată};\ \theta_0) \geqslant \frac{\beta(\theta_1)}{1-\alpha(\theta_1)}\\ &M(e^{Z_n} \mid H_0 \text{ respinsă},\ \theta_0) \leqslant \frac{1-\beta(\theta_1)}{\alpha(\theta_0)}. \end{aligned}$$

În (14) avem inegalități stricte dacă și numai dacă pentru $\theta = \theta_0$, θ_1, $S\,(b,\ a)$ se termină cu probabilitatea unu. În continuare, deoarece regulile din (4) implică că pentru toți $\theta \in \Theta$

$$P(Z_n \leqslant b \mid H_0 \text{ acceptată},\ \theta) = 1$$

și

$$P(Z_n \geqslant a \mid H_0 \text{ respinsă},\ \theta) = 1,$$

avem

$$(15)\quad \begin{aligned} &M(e^{Z_n} \mid H_0 \text{ acceptată};\ \theta) \leqslant e^b\\ &M(e^{Z_n} \mid H_0 \text{ respinsă};\ \theta) \geqslant a^a, \end{aligned}$$

Scanned with OKEN Scanner

pentru toţi $\theta \in \Theta$. Inegalităţile (15) în $\theta = \theta_0$ şi (14) conduc la

$$\frac{\beta(\theta_1)}{1-\alpha(\theta_0)} \leqslant e^b, \quad \frac{1-\beta(\theta_1)}{\alpha(\theta_0)} \geqslant e^a. \tag{16}$$

Însă restricţia fundamentală $b < a$ implică

$$\frac{\beta(\theta_1)}{1-\alpha(\theta_0)} < \frac{1-\beta(\theta_1)}{\alpha(\theta_0)}$$

sau inegalitatea strictă $\alpha(\theta_0) + \beta(\theta_1) < 1$. De aici rezultă (12). În final, deoarece în (14) avem inegalităţi stricte dacă şi numai dacă $S(b, a)$ este închis şi deoarece aceasta în (15) în $\theta = \theta_0$ se materializează dacă şi numai dacă au loc condiţiile (13), rezultă ultima parte a teoremei.

Observaţie. Teorema 2 este generală deoarece se aplică la toate T.S.R.P. deschise sau închise, bazate pe variabilele $\{x_i\}$ independente sau nu.

Ne ocupăm din nou de problema determinării marginilor de stopare pentru T.S.R.P.U.C.M.E.

(b^*, a^*) poate să nu atingă niciodată intensitatea (α, β) prestabilită dacă $\alpha + \beta \geqslant 1$. deoarece, după teorema 2, pentru fiecare $S(b, a) \in \mathcal{S}$, $\alpha(\theta_0) + \beta(\theta_1) < 1$.

Prin urmare dacă dorim să obţinem T.S.R.P.U.C.M.E. pentru (2) cu condiţiile

$$Q(\theta_0) \geqslant 1 - \alpha' \quad \text{şi} \quad Q(\theta_1) \leqslant \beta', \ \alpha' + \beta' < 1,$$

se poate schimba (α', β') într-o nouă pereche (α, β) cu $\alpha + \beta < 1$. În cele ce urmează vom presupune întotdeauna, în legătură cu T.S.R.P., că $\alpha + \beta < 1$. Acum, ultima parte a teoremei 2 sugerează că dacă, pentru $\varepsilon > 0$ mic

$$\begin{aligned} &P(b^* - \varepsilon < Z_n \leqslant b^* \mid H_0 \text{ acceptată}, \ \theta_0) \simeq 1, \\ &P(a^* \leqslant Z_n < a^* + \varepsilon \mid H_0 \text{ respinsă}, \ \theta_0) \simeq 1, \end{aligned} \tag{17}$$

atunci se poate lua (aproximaţiile lui Wald)

$$b^* \simeq \ln \frac{\beta}{1-\alpha}, \quad a^* \simeq \ln \frac{1-\beta}{\alpha} \tag{18}$$

DEFINIŢIA 2. $b^* - Z_n$ şi $Z_n - a^*$ poartă numele de *excesul la terminare al statisticii Z_n faţă de b^*, respectiv faţă de a^*.*

Cînd, pentru $\varepsilon > 0$ mic, una dintre egalităţile aproximative din (17) are loc, vom spune că excesul corespunzător este mic.

Dacă cele două excese sînt zero cu probabilitatea unu şi $S(b^*, a^*)$ este închis, teorema 2 arată că inegalităţile în (18) încetează să mai fie aproximative. În acest caz $S(b^*, a^*)$ este identic cu $S = S(\ln [\beta/(1-\alpha)], \ln [(1-\beta)/\alpha])$ şi atinge intensitatea (α, β).

Scanned with OKEN Scanner

Mai general, teorema 2 aplicată la probabilităţile erorilor testului S dă

$$\alpha(\theta_0) \leqslant [1 - \beta(\theta_1)]\frac{\alpha}{1-\beta}, \quad \beta(\theta_1) \leqslant [1 - \alpha(\theta_0)]\frac{\beta}{1-\alpha}$$

(19)

$$\alpha(\theta_0) + \beta(\theta_1) \leqslant \alpha + \beta.$$

Dacă S este închis şi excesele sînt mici, inegalităţile din (19) devin egalităţi aproximative. Dacă în plus α şi β sînt mici (de exemplu $\leqslant 0,1$), ca în aplicaţiile practice,

$$\alpha(\theta_0) \simeq \alpha \quad \text{şi} \quad \beta(\theta_1) \simeq \beta.$$

Dacă

i) T.S.R.P. este închis

şi ii) cele două excese sînt mici

iii) probabilităţile erorilor, prestabilite, sînt mici, atunci putem să înlocuim $S(b^*, a^*)$ prin S.

Din (16) urmează că probabilităţile erorilor asociate testului $S(b', a')$ asigură

$$\alpha'(\theta_0) \leqslant \alpha \quad \text{şi} \quad \beta'(\theta_1) \leqslant \beta.$$

Pe de altă parte, deoarece

$$b' \leqslant \ln [\beta/(1-\alpha)] \quad \text{şi} \quad a' \geqslant \ln [(1-\beta)/\alpha],$$

T.S.R.P., sub (18), cere cel mult acelaşi număr de observaţii pentru luarea deciziei ca $S(b', a')$. În particular V.M.V.S. sub (18) este cel mult egal cu V.M.V.S. sub

(20)

$$b' = \ln \beta, \quad a' = -\ln \alpha$$

pentru toţi $\theta \in \Theta$. Concluziile obţinute din (18) şi (20) sînt remarcabile deoarece acestea nu cer cunoaşterea repartiţiei lui $\{Z_n\}$.

1.3. Proprietatea optimă a T.S.R.P.

În teorema 1 am arătat că $S(b^*, a^*)$ este U.C.M.E. pentru (2) în clasa tuturor T.S.R.P. valide. Vom arăta că, în anumite condiţii, $S(b^*, a^*)$ este în fapt U.C.M.E. pentru toate testele secvenţiale şi teste bazate pe selecţii de volum fix pentru (2).

TEOREMA 3. *Fie* $S(b, a)$, $b < 0 < a$, *orice* T.S.R.P. *pentru* $H_0 : \theta = \theta_0$ *faţă de* $H_1 : \theta = \theta_1$ *cu probabilităţile erorilor* $(\alpha(\theta_0), \beta(\theta_1))$ *şi* V.M.V.S.: $M(n; \theta_0)$, $M(n; \theta_1)$. *Presupunem că* $\{Z_i\}$ *sînt variabile aleatoare independente identic repartizate. Fie* $\mathcal{C}$ *clasa tuturor testelor pentru verificarea ipotezei* H_0 *faţă de* H_1 *astfel că fiecare* $S \in \mathcal{C}$ *satisface*

$$M_S(n; \theta_0) < \infty, \quad M_S(n; \theta_1) < \infty$$

şi

(21)

$$\alpha_S(\theta_0) \leqslant \alpha(\theta_0), \quad \beta_S(\theta_1) \leqslant \beta(\theta_1).$$

Scanned with OKEN Scanner

Atunci, pentru fiecare $S \in \mathcal{C}$,

$$M_S(n;\ \theta_0) \geqslant M(n;\ \theta_0), \quad M_S(n;\ \theta_1) \geqslant M(n;\ \theta_1) \tag{22}$$

Observație. Restricțiile impuse membrilor clasei $\mathcal{C}$ de a avea V.M.V.S. finite poate conduce la presupunerea că pot fi teste S' care nu aparțin clasei $\mathcal{C}$ care satisfac (21) astfel ca

$$M_{S'}(n;\ \theta_0) = \infty \text{ însă } M_{S'}(n;\ \theta_1) < M(n;\ \theta_1)$$

sau

$$M_{S'}(n;\ \theta_1) = \infty \text{ însă } M_{S'}(n;\ \theta_0) < M(n;\ \theta_0)$$

Burkholder, Wigsman (1963) arată că acest lucru nu este adevărat. Urmează că ori de cîte ori $\{Z_i\}$ sînt independente și identic repartizate și $S(b^*, a^*)$ atinge (α, β), $S(b^*, a^*)$ este testul S U.C.M.E. definit în (XXI.21), adică se găsește printre toate testele valide pentru (2). Pe de altă parte, dacă $S(b^*, a^*)$ are

$$\alpha^*(\theta_0) < \alpha \quad \text{și} \quad \beta^*(\theta_1) \leqslant \beta$$

există un test S cu

$$\alpha^*(\theta_0) < \alpha_S(\theta_0) \leqslant \alpha \quad \text{și} \quad \beta^*(\theta_1) \leqslant \beta_S(\theta_1) \leqslant \beta$$

care este valid și mai eficient decît $S(b^*, a^*)$. Această concluzie este oportună dacă $\alpha + \beta \geqslant 1$.

§2. Alternative unilaterale

2.1. Punerea problemei

Considerăm familia de funcții de repartiție $[F_n(x;\ \theta);\ \underline{\theta} \leqslant \theta \leqslant \overline{\theta}]$ θ fiind un scalar. În unele aplicații practice, prezintă importanță numai două valori ale lui θ: θ_0 și θ_1. Prin recurență, toate punctele din $[\underline{\theta}, \overline{\theta}]$ cu excepția punctelor θ_0 și θ_1 vor constitui zona de indiferență a spațiului parametrilor. Formal, T.S.R.P. $S(b^*, a^*)$ din § 1.2 poate fi aplicat fără nici o modificare pentru a verifica (2) supusă la (3). În condițiile *teoremei 3*, $S(b^*, a^*)$ minimizează $M_S(n;\ \theta)$ cu $\theta = \theta_0, \theta_1$, dacă el atinge (α, β) printre toate testele valide pentru (2). Problema generală a găsirii testului U.C.M.E. pentru (2), cînd Θ conține mai mult decît două puncte este nerezolvată. Sînt situații excepționale cînd se poate arăta că $S(b^*, a^*)$ este U.C.M.E. Aceste observații se aplică la discriminarea între două ipoteze simple în familii cu mai mulți parametri.

În familia cu un parametru este mai realist să formulăm problema ca discriminarea între două ipoteze unilaterale

$$H_0: \theta \leqslant \theta_0, \quad H_1: \theta \geqslant \theta_1, \quad \underline{\theta} \leqslant \theta_0 < \theta_1 \leqslant \overline{\theta}. \tag{23}$$

Scanned with OKEN Scanner

Relaţiile (XXI, 18. b, c) sînt echivalente cu

$$Q(\theta) \geqslant 1 - \alpha \text{ pentru toţi } \theta \leqslant \theta_0,$$

(24)

$$Q(\theta) \leqslant \beta \qquad \text{pentru toţi } \theta \geqslant \theta_1.$$

Observaţie. Dacă spaţiul parametrilor are două sau mai multe puncte în $[\underline{\theta}, \theta_0]$ sau în $[\theta_1, \bar{\theta}]$ atunci orice test valid pentru (23) va avea în general un minim şi nu va avea intensitatea (α, β).

2.2. Familii cu raportul de verosimilităţi monoton

Orice test valid pentru (2) cu $\theta_0 < \theta_1$ este de asemenea valid pentru problema (23) cu condiţia ca testul să se termine pentru toţi θ în $[\underline{\theta}, \bar{\theta}]$ şi funcţia sa C.O. este necrescătoare cel puţin pe intervalele $[\underline{\theta}, \theta_0]$ şi $[\theta_1, \bar{\theta}]$. Pentru familiile avînd raportul de verosimilităţi monoton orice T.S.R.P. pentru (2), trebuie să satisfacă această proprietate. Pentru a arăta aceasta enunţăm:

LEMA 1. (Ghosh (1970)). *Orice* T.S.R.P. *generalizat pentru* $H_0: \theta = \theta_0$ *faţă de* $H_1: \theta = \theta_1$ *caracterizat de constantele*

$$-\infty < b_n < a_n < \infty, \qquad n = 1,2, \ldots$$

satisface, pentru toţi $n \geqslant 1$

(25)
$$Q_n(\theta_0) \geqslant Q_n(\theta_1), \quad P_n(\theta_0) \leqslant P_n(\theta_1),$$

unde

$$Q_n(\theta) = P(n \leqslant n \text{ şi } H_0 \text{ este acceptată} \mid \theta)$$

$$P_n(\theta) = P(n \leqslant n \text{ şi } H_0 \text{ este respinsă} \mid \theta).$$

În particular, funcţia C.O. a testului satisface criteriul de nedeplasare $Q(\theta_0) \geqslant Q(\theta_1)$.

Demonstraţie. Mai întîi arătăm că, pentru fiecare $n \geqslant 1$,

(26) $$P(n > n \mid \theta_1) P(\mathbf{x} \in R^0_{n+1} \mid \theta_0) \geqslant P(n > n \mid \theta_0) P(\mathbf{x} \in R^0_{n+1} \mid \theta_1)$$

(27) $$P(n > n \mid \theta_1) P(\mathbf{x} \in R^1_{n+1} \mid \theta_0) \leqslant P(n > n \mid \theta_0) P(\mathbf{x} \in R^1_{n+1} \mid \theta_1)$$

unde R^0_{n+1} este submulţimea de puncte din E_{n+1} care satisface

$$(b_1 < Z_1(x) < a_1, \ldots, b_n < Z_n(x) < a_n, \; Z_{n+1}(x) \leqslant b_{n+1})$$

şi R'_{n+1} mulţimea care satisface

$$(b_1 < Z_1(x) < a_1, \ldots, b_n < Z_n(x) < a_n, \; Z_{n+1}(x) \geqslant a_{n+1}).$$

Scanned with OKEN Scanner

Deoarece atît (26) cît şi (27) au loc întotdeauna cînd

$$P(n > n \mid \theta_0) = 0 \quad \text{sau} \quad P(n > n \mid \theta_1) = 0$$

pentru orice n, putem să ne restrîngem atenţia la cazul cînd $P(n > n \mid \theta) > 0$ pentru $\theta = \theta_0,\ \theta_1$.

R^0_{n+1} este submulţimea regiunii de continuare R_n definită de

$$(b_1 < Z_1(x) < a_1, \ldots, b_n < Z_n(x) < a_n),$$

pentru care

$$f_{n+1}(x;\ \theta_1) \leqslant e^{b_{n+1}} f_{n+1}(x;\ \theta_0)$$

Integrînd această inegalitate pe R^0_{n+1} şi inversa acesteia ($>$) pe $R_n - R^0_{n+1}$ se obţine

$$P(\mathbf{x} \in R^0_{n+1} \mid \theta_1) \leqslant e^{b_{n+1}} \cdot P(\mathbf{x} \in R^0_{n+1} \mid \theta_0)$$

$$P(n > n \mid \theta_1) - P(\mathbf{x} \in R^0_{n+1} \mid \theta_1) >$$

$$> e^{b_{n+1}}[P(n > n \mid \theta_0) - P(\mathbf{x} \in R^0_{n+1} \mid \theta_0)]. \tag{28}$$

Dacă $P(\mathbf{x} \in R^0_{n+1} \mid \theta_0) = 0$, atunci ambii membri ai relaţiei (26) sînt zero, în timp ce dacă

$$P(\mathbf{x} \in R^0_{n+1} \mid \theta_0) = P(n > n \mid \theta_0)$$

atunci (26) are loc întotdeauna.
Dacă

$$0 < P(\mathbf{x} \in R^0_{n+1} \mid \theta_0) < P(n > n \mid \theta_0),$$

se elimină b_{n+1} între cele două inegalităţi din (28) şi se obţine inegalitate strictă în (26). Inegalitatea (27) urmează analog considerînd R^1_{n+1} în loc de R^0_{n+1}. În acest caz are loc inegalitatea strictă cel puţin pentru

$$0 < P(\mathbf{x} \in R^1_{n+1} \mid \theta_1) < P(n > n \mid \theta_1).$$

(25) poate fi obţinută prin inducţie folosind (26) şi (27).
Presupunem că pentru $n = N$, are loc (25), Atunci

$$-\zeta_N \leqslant P(n > N \mid \theta_0) - P(n > N \mid \theta_1) \leqslant \delta_N, \tag{29}$$

unde

$$\zeta_N = Q_N(\theta_0) - Q_N(\theta_1) \geqslant 0, \quad \delta_N = P_N(\theta_1) - P_N(\theta_0) \geqslant 0.$$

În consecinţă

$$\zeta_{N+1} = \zeta_N + P(\mathbf{x} \in R^0_{N+1} \mid \theta_0) - P(\mathbf{x} \in R^0_{N+1} \mid \theta_1),$$

$$\delta_{N+1} = \delta_N + P(\mathbf{x} \in R^1_{N+1} \mid \theta_1) - P(\mathbf{x} \in R^1_{N+1} \mid \theta_0).$$

Scanned with OKEN Scanner

Dacă : $P(\mathbf{x} \in R^0_{N+1} \mid \theta_1) = 0$ atunci $\zeta_{N+1} \geqslant 0$,

$P(\mathbf{x} \in R^1_{n+1} \mid \theta_0) = 0$ atunci $\delta_{N+1} \geqslant 0$.

Din (26) și respectiv (27) și folosind (29) se obține

$$\zeta_{N+1} \geqslant \zeta_N \frac{1 - P(\mathbf{x} \in R^0_{N+1} \mid \theta_1)}{P(n > N \mid \theta_1)} \geqslant 0$$

$$\delta_{N+1} \geqslant \delta_N \frac{1 - P(\mathbf{x} \in R^1_{N+1} \mid \theta_0)}{P(n > N \mid \theta_0)} \geqslant 0.$$

Astfel, dacă (25) are loc pentru $n = N$, va avea loc de asemenea și pentru $n = N + 1$. Deoarece pentru $n = 1$ (25) are loc sigur, după cum se vede din (28), va avea loc pentru toți $n \geqslant 1$. În sfîrșit, ultima parte a lemei rezultă din prima inegalitate din (25) cînd $n \to \infty$.

Observație. Luînd $b_n = b$ și $a_n = a$ pentru toți $n \geqslant 1$ lema arată, în particular, că, chiar un T.S.R.P. deschis este nedeplasat, fapt care nu urmează din teorema 2 dacă $b > 0$. Pe de altă parte, din lema 1 nu urmează inegalitatea strictă $\alpha(\theta_0) + \beta(\theta_1) < 1$ pentru T.S.R.P. închis.

Revenind la problema extinderii T.S.R.P. valid pentru (2) la (23) sub (24) avem :

TEOREMA 4. *Presupunem că, pentru fiecare* $n \geqslant 1$, *familia* $[F_n(\mathbf{x}; \theta), \underline{\theta} \leqslant \theta \leqslant \bar{\theta}]$ *posedă raport de verosimilitate monoton în* $T_n(\mathbf{x})$. *Atunci orice T.S.R.P.* $S(b, a)$ *pentru* $H_0 : \theta = \theta_0$ *față de* $H_1 : \theta = \theta_1$, $\underline{\theta} \leqslant \theta_0 < \theta_1 \leqslant \bar{\theta}$, *are funcția C.O. necrescătoare pe intervalul* $[\underline{\theta}, \bar{\theta}]$.

Demonstrație. (Ghosh (1970)). Deoarece prin definiție $Z_n(\mathbf{x})$ este o funcție crescătoare de $T_n(\mathbf{x})$ pentru fiecare $n \geqslant 1$, inegalitatea critică a testului $S(b, a)$ poate fi scrisă în forma :

$$C_n(b, a, \theta_0, \theta_1) < T_n < D_n(b, a, \theta_0, \theta_1) \text{ pentru } n \geqslant 1. \tag{30}$$

Pentru a demonstra teorema este suficient să arătăm că funcția C.O. a testului $S(b, a)$ satisface

$$Q(\theta') \geqslant Q(\theta'')$$

pentru orice pereche arbitrară $\theta' < \theta''$ din $[\underline{\theta}, \bar{\theta}]$. Fie G orice T.S.R.P. generalizat pentru $H'_0 : \theta = \theta'$ față de $H'_1 : \theta = \theta''$, bazat pe

$$Z'_n = \ln \frac{f_n(\mathbf{x}; \theta'')}{f_n(\mathbf{x}; \theta')} \text{ pentru } n \geqslant 1,$$

și caracterizată de $\{b_n < a_n\}$. Atunci, după lema 1, G este nedeplasat astfel încît funcția sa *C.O.* satisface

$$Q_G(\theta') \geqslant Q_G(\theta'').$$

Deoarece pentru fiecare $n \geqslant 1$, $Z'_n(\mathbf{x})$ este ea însăşi o funcţie crescătoare de $T_n(x)$, regula de decizie sub G poate fi exprimată spunînd că H'_0 este acceptată sau respinsă după cum marginea inferioară sau superioară din

$$C'_n(b_n,\ a_n,\ \theta',\ \theta'') < T_n < D'_n(b_N,\ a_n,\ \theta',\ \theta'')$$

nu este satisfăcută. Din curbele lui Z_n şi Z'_n ca funcţii de T_n urmează că, pentru fiecare n şi fiecare mulţime $(b,\ a,\ \theta_0,\ \theta_1,\ \theta',\ \theta'')$ dată putem alege $(b_n,\ a_n)$ astfel încît $C_n = C'_n$ şi $D_n = D'_n$. În consecinţă, T.S.R.P. generalizat G_0 rezultat satisface

$$Q(\theta) = Q_{G_0}(\theta) \text{ pentru toţi } \underline{\theta} \leqslant \theta \leqslant \bar{\theta}.$$

Deoarece G_0 este el însuşi nedeplasat

$$Q(\theta') = Q_{G_0}(\theta')] \geqslant Q_{G_0}(\theta'') = Q(\theta'') \text{ pentru toţi } \underline{\theta} \leqslant \theta' < \theta'' \leqslant \bar{\theta}.$$

Observaţie. Adeseori ne ocupăm de familia exponenţială cu un parametru

$$f_n(\mathbf{x};\ \theta) = C_n(\theta) e^{D_n(\theta) T_n(\mathbf{x})} g_n(\mathbf{x}).$$

În astfel de cazuri, după teorema 4, $S(b^*, a^*)$ pentru (2) dă un T.S.R.P. optim pentru (23). Pentru validitate, trebuie să se verifice că $S(b^*, c^*)$ este închis, pentru toţi $\underline{\theta} \leqslant \theta \leqslant \bar{\theta}$. Presupunerea ca raportul de verosimilităţi să fie monoton este suficientă însă nu necesară pentru ca teorema 4 să aibe loc. *Hoel (1970)* discuta o condiţie suficientă alternativă pentru ca funcţia *C.O.* să fie monotonă.

2.3. O proprietate a T.S.R.P.U.C.M.E.

Dacă $\{z_i\}$ sînt independente şi identic repartizate, orice T.S.R.P., şi în particular $S(b^*, a^*)$, pentru (23) posedă proprietatea de optim în $\theta = \theta_0,\ \theta_1$, în sensul teoremei 3. Această proprietate nu este necesar valabilă pentru celelalte valori ale lui θ din $[\underline{\theta}, \bar{\theta}]$. În cele ce urmează vom arăta că, în anumite presupuneri suplimentare, teorema 3 poate fi extinsă pentru a stabili proprietate de U.C.M.E. a testului $S(b^*, a^*)$ în subclasa testelor valide pentru (23). Ideea este că dacă un test rival S este mai tare decît $S(b^*, a^*)$, atunci $S(b^*, a^*)$ este uniform mai eficient decît S.

Pentru a atinge scopul propus demonstrăm mai înainte

LEMA 2. (Wald (1945)). *Fie z orice variabilă aleatoare a cărei funcţie generatoare de momente*

$$G(h) = M(e^{hz})$$

există pentru fiecare h real. Presupunem că există $0 < \delta < 1$ astfel încît

$$P(z < \ln(1 - \delta)) > 0$$

şi

$$P(z > \ln(1 + \delta)) > 0.$$

Scanned with OKEN Scanner

Atunci ecuația algebrică

(31) $$G(h) = 1$$

are

i) *una și numai o singură rădăcină reală nenulă* $-\infty < h_0 < \infty$, *dacă* $M(z) > 0$

ii) *una și numai o singură rădăcină reală nenulă* $0 < h_0 < \infty$ *dacă* $M(z) < 0$

și iii) *nici o rădăcină reală nenulă dacă* $M(z) = 0$.

Demonstrație. Pentru fiecare h real

$$G(0) = 1 \text{ și } P(e^{hz} \geqslant 0) = 1.$$

Pentru a studia comportarea funcției $G(h)$ pe $(-\infty, \infty)$, observăm că

(32)
$$G(h) > (1 - \delta)^h P(z < \ln(1 - \delta)) > 0 \text{ pentru fiecare } h < 0$$
$$G(h) > (1 + \delta)^h P(z > \ln(1 + \delta)) > 0 \text{ pentru fiecare } h > 0.$$

În consecință

(33) $$\lim_{h \to -\infty} G(h) = \infty, \quad \lim_{h \to \infty} G(h) = \infty.$$

Deoarece $G(h)$ există pentru fiecare h real

$$G(h) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{hz} F(z), \quad F(z) = P(z < z)$$

este absolut convergentă. Prin urmare derivata de orice ordin a funcției $G(h)$ poate fi obținută prin derivarea membrului drept în raport cu h sub semnul integrală. În particular, pentru fiecare h real

(34) $$G''(h) = \int_{-\infty}^{\infty} z^2 e^{hz} \, dF(z) > 0.$$

Relațiile (32), (33) și (34) implică că $G(h)$ posedă un singur minim, în $h = h^*$, strict descrescătoare pe $(-\infty, h^*)$ și strict crescătoare pe (h^*, ∞). Astfel

$$0 < G(h^*) < G(h) \text{ pentru toți } h \neq h^*,$$

$$G'(h) = 0 \text{ dacă și numai dacă } h = h^*.$$

Deci,

— dacă $G'(0) = M(z) > 0$ atunci $h^* < 0$, $G(h^*) < G(0) = 1$, și prin urmare există una și numai o singură valoare, $h_0 < h^* < 0$ pentru care $G(h_0) = 1$,

— dacă $G'(0) < 0$ atunci $h^* > 0$, $G(h^*) < 1$,

și prin urmare există una și numai o singură valoare $h_0 > h^* > 0$ pentru care $G(h_0) = 1$.

Scanned with OKEN Scanner

— dacă $G'(0) = 0$ atunci $h^* = 0$, $G(h^*) = 1$,

şi prin urmare nu există un număr real $h \neq 0$ pentru care $G(h) = 1$.

Dacă folosim lema 2 pentru T.S.R.P. al ipotezei (2) sau (23) bazat pe $\{x_i\}$ independente şi identic repartizate, z din lemă se va referi la variabila aleatoare $\ln [f(x;\ \theta_1)/f(x;\ \theta_0)]$. Atunci lema arată că (31), unde $G(h) = G(h;\ \theta)$ este funcţia generatoare de momente comună variabilelor $\{z_i\}$, are o soluţie unică nenulă $h_0 \equiv h(\theta)$ dacă $M(z;\ \theta) \neq 0$.
Relaţia funcţională dintre $\theta \in \Theta$ şi $h(\theta) \neq 0$ este

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{f(x;\ \theta_1)}{f(x;\ \theta_0)}\right]^{h(\theta)} dF(x;\ \theta) = 1. \tag{35}$$

Pentru familiile cu un parametru (35) se poate inversa, dacă se cere să exprimăm θ ca funcţie de h_0. Din (35) urmează că unicitatea lui $h(\theta) \neq 0$ implică

$$h(\theta_0) = 1, \quad h(\theta_1) = -1, \tag{36}$$

care la rîndul lor implică că

$$M(z;\ \theta_0) < 0 < M(z;\ \theta_1)$$

Această ultimă inegalitate a fost demonstrată în lema XXI.1. Discuţia anterioară se aplică şi cînd $\{x_i\}$ nu sînt independente şi identic repartizate însă $\{z_i\}$ da. În astfel de cazuri se obţine mai întîi repartiţia comună $F(z;\ \theta)$ pentru familia dată şi atunci se înlocuieşte (35) prin (31), exprimată în termeni de z.

Arătăm că testul $S(b,\ a)$ este U.C.M.E.

TEOREMA 5. *Fie* $S(b,\ a)$, $b < 0 < a$, *orice* T.S.R.P. *pentru* $H_0 : \theta = \theta_0$ *faţă de* $H_1 : \theta = \theta_1$ $(\theta_0 < \theta_1)$ *într-o familie cu un parametru cu funcţia C.O.* $Q(\theta)$ *şi funcţia* V.M.V.S. $M(n;\ \theta)$. *Presupunem că* $\{x_i\}$ *sînt independente şi identic repartizate şi*

a) *lema 2 are loc pentru* $z = \ln [f(x;\ \theta_1)/f(x;\ \theta_0)]$ *astfel ca* $h_0 = h(\theta) > 0$ *pentru toţi* $\theta < \theta'$ *şi* $h(\theta) < 0$ *pentru toţi* $\theta > \theta'$, *unde* θ' *este determinat de* $M(z;\ \theta') = 0$

b) *pentru fiecare* θ *în* Θ *există un conjugat* θ^* *în* Θ *astfel încît*

$$\left[\frac{f(x;\ \theta_1)}{f(x;\ \theta_0)}\right]^{h(\theta)} = \frac{f(x;\ \theta^*)}{f(x;\ \theta)}$$

aproape peste tot în Ω_1.
Atunci pentru orice test rival S *a cărei funcţie C.O. satisface*

$$\begin{aligned} &Q_S(\theta) \geq Q(\theta) \quad \text{pentru toţi } \theta < \theta' \\ &Q_S(\theta) \leq Q(\theta) \quad \text{pentru toţi } \theta > \theta' \end{aligned} \tag{37}$$

avem :

$$M_S(n;\ \theta) \geq M(n;\ \theta) \quad \text{pentru toţi } \theta \neq \theta'. \tag{38}$$

Scanned with OKEN Scanner

Demonstrație. Considerăm orice θ dat în Θ și θ^* corespunzător. Mai întîi observăm că θ^* este unic deoarece $h(\theta)$ este unică și în familia dată repartițiile sînt distincte.

Dacă $\theta = \theta'$ atunci după lema 2, și prin urmare din condiția b) trebuie să avem $\theta = \theta^* = \theta'$. Dacă $\theta \neq \theta'$ atunci $h(\theta) \neq 0$ și ecuația pentru $h(\theta)$ poate fi scrisă ca

$$1 = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{f(x;\ \theta_1)}{f(x;\ \theta_0)}\right]^{h(\theta^*)} dF(x;\ \theta^*) = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{f(x;\ \theta^*)}{f(x;\ \theta)}\right]^{h(\theta^*)/h(\theta)} dF(x;\ \theta^*).$$

Urmează că $h(\theta^*) = -h(\theta)$ și aceasta este singura posibilitate deoarece $h(\theta) \neq 0$ și $h(\theta)$ sînt unice. Pentru a demonstra (38) presupunem că $\theta < \theta'$. Din presupunerea a), $h(\theta) > 0$ și în consecință $h(\theta^*) < 0$ astfel încît $\theta^* > \theta'$. Deoarece $h(\theta) > 0$, inegalitatea critică a testului $S(b, a)$ este echivalentă cu

$$b' < \sum_{i=1}^{n} z_i' < a',$$

unde

$$b' = bh(\theta) < 0,\ a' = ah(\theta) > 0,\ z_i' = \ln \frac{f(x_i;\ \theta^*)}{f(x_i;\ \theta)}.$$

Deci, pentru orice $\theta < \theta'$ dat, $S(b, a)$ poate fi privit ca T.S.R.P. pentru $H;\ \theta = \theta$ față de $H^*: \theta = \theta^*$ cu marginile de oprire $b' < 0 < a'$ și riscurile $\alpha(\theta) = 1 - Q(\theta)$, $\beta(\theta^*) = Q(\theta^*)$. Mai departe, deoarece $\theta < \theta'$ și $\theta^* > \theta'$, din (37) urmează că aceste riscuri satisfac

$$\alpha(\theta) \geqslant 1 - Q_S(\theta) = \alpha_S(\theta)$$

și

$$\beta(\theta^*) \geqslant Q_S(\theta^*) = \beta_S(\theta^*).$$

Deci, după teorema 3 (în care restricția $M_S(n;\ \theta) < \infty$ poate fi înlăturată), (38) are loc pentru orice $\theta < \theta'$. Pentru cazul $\theta > \theta'$ demonstrația este analoagă. Putem să renunțăm la restricția $\theta = \theta'$ în (38) dacă $M(n;\ \theta)$ este continuă în $\theta = \theta'$.

Cu mici schimbări de notație teorema are loc dacă $\{x_i\}$ nu sînt independente și identic repartizate, însă $\{z_i\}$ sînt. Din teoremă urmează că dacă $S(b^*, a^*)$ pentru verificarea ipotezei (2) atinge (α, β), atunci el este de asemenea U.C.M.E. printre testele valide pentru (23) care satisfac condițiile teoremei.

Dacă $\{x_i\}$ sînt independente și identic repartizate cu

$$f(x;\ \theta) = C(\theta)\, e^{D(\theta)T(x)}\, g(x) \text{ pentru } x \in R \tag{39}$$

atunci se aplică testului $S(b^*, a^*)$ teoremele 3 și 4. Repartiția comună a variabilelor $\{x_i\}$, din exemplele 1 la 4, este un caz particular al (39).

Exemplul 1. Considerăm problema discriminării dintre

$$H_0: p \leqslant p_0,\ H_1: p \geqslant p_1,\ 0 \leqslant p_0 < p_1 \leqslant 1 \tag{40}$$

Scanned with OKEN Scanner

în familia

(41) $f_n(\mathbf{x}; p) = p^{\Sigma x_i}(1-p)^{n-\Sigma x_i}$ pentru $x_i = 0, 1$; $i = 1,2, \ldots, n$.

Aici $\{x_i\}$ sînt variabile aleatoare Bernoulliene independente şi identic repartizate. Avem 3 combinări de (p_0, p_1)

— Pentru $p_0 = 0 < p_1 < 1$, regula (4) implică că H_0 este acceptată de $S(b, a)$ numai dacă

$$x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$$

şi este respinsă în rest, unde n este cel mai mic întreg pozitiv $\geqslant b/\ln(1-p_1)$.

Deoarece

$$Q(p) = (1-p)^n \text{ pentru } 0 \leqslant p \leqslant 1,$$

luăm

$$b^* = \ln \beta \text{ şi } a^* \text{ ca orice număr real} > \ln(1-p).$$

Testul este U.C.M.E. cînd $\alpha = 0$ şi $0 < \beta \leqslant 1$.

— Pentru $0 < p_0 < p_1 = 1$, $S(b, a)$ respinge H_0 numai dacă

$$x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 1$$

şi acceptă H_0 în rest, unde n este cel mai mic întreg pozitiv $\geqslant -a/\ln p_0$. Prin urmare luăm

$$a^* = -\ln \alpha \text{ şi } b^* \text{ ca orice număr real} < -\ln p_0.$$

Urmează că $S(b^*, a^*)$ este U.C.M.E. cînd $0 < \alpha \leqslant 1$ şi $\beta = 0$.

— Pentru $p_0 = 0$ şi $p_1 = 1$, regulile din (4) arată că, dacă $x_1 = 1$ toate T.S.R.P. sînt echivalente pentru respingerea ipotezei H_0 iar dacă $x_1 = 0$, pentru acceptarea ipotezei H_0. Deci, $b^* < a^*$ sînt orice numere reale şi $S(b^*, a^*)$ este U.C.M.E. pentru toţi $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$ şi $0 \leqslant \beta \leqslant 1$.

Orice T.S.R.P. pentru aceste trei cazuri particulare este închis.

Deci condiţia $b < 0 < a$ nu este întotdeauna necesară pentru afirmaţia teoremei 3.

Considerăm cazul mai general (Wald (1963). Cap. 5) cînd $0 < p_0 < p_1 < 1$. Atunci

$$z_i = \ln \frac{1-p_1}{1-p_0} + x_i \ln \frac{p_1(1-p_0)}{p_0(1-p_1)} \text{ pentru } i = 1,2, \ldots$$

şi inegalitatea strictă pentru $S(b^*, a^*)$ se reduce la

$$h_a + sn < \sum_1^n x_i < h_r + sn, \tag{42}$$

$$h_a = \frac{b^*}{\ln \frac{p_1(1-p_0)}{p_0(1-p_1)}}, \quad h_r = \frac{a^*}{\ln \frac{p_1(1-p_0)}{p_0(1-p_1)}}, \quad s = \frac{\ln \frac{1-p_0}{1-p_1}}{\ln \frac{p_1(1-p_0)}{p_0(1-p_1)}}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Cînd se reprezintă grafic $S(b^*, a^*)$ în planul $\left(n, \sum_1^n x_i\right)$, are loc

DEFINIȚIA 3. $\sum_1^n x_i$ poartă numele de *suma cumulată*, $s(0<s<1)$ de *pantă*, (h_a, h_r) de *intersecții* și $h_a + sn$ și $h_r + sn$ de *numerele de acceptare* respectiv de *respingere*.

Pentru diferite combinații de $(p_0, p_1, \alpha, \beta)$, Freeman (1944) cu aproximațiile (18) dă tabele numerice pentru (s, h_a, h_r).

Pentru $\{z_i\}$ variabile aleatoare independente și identic repartizate, cînd $0 < p_0 < p_1 < 1$, obținem

$$G(h;\ p) = p\left(\frac{p_1}{p_0}\right)^h + (1-p)\left(\frac{1-p_1}{1-p_0}\right)^h$$

$$M(z;\ p) = \ln\frac{1-p_1}{1-p_0} + p\ln\frac{p_1(1-p_0)}{p_0(1-p_1)}.$$

În consecință, $G(h;\ p)$ există pentru toți $0 \leqslant p \leqslant 1$ și h real. Pentru orice $0 < p < 1$, a doua condiție din lema 2 este satisfăcută luînd δ ca orice număr real între 0 și $\min[(p_1 - p_0)/p_0,\ (p_1 - p_0)/(1 - p_0)]$. Prin urmare ecuațiile (31) și (35) se reduc la

$$p\left(\frac{p_1}{p_0}\right)^{h(p)} + (1-p)\left(\frac{1-p_1}{1-p_0}\right)^{h(p)} = 1. \tag{43}$$

Deoarece $M(z;\ p) = 0$ implică $p = s$, $h(s) = 0$ este singura soluție a lui (43) pentru $p = s$, $h(p) < 0$ pentru $p > s$, și $h(p) > 0$ pentru $p < s$, unde s este definit în (42). În cazul de față cu

$$p' = s \quad \text{și} \quad p^* = p(p_1/p_0)^{h(p)} \text{ (Wald (1963). Cap. 5)}$$

are loc teorema 5.

Exemplul 2. Considerăm ipotezele

$$H_0 : \lambda \leqslant \lambda_0, \quad H_1 : \lambda \geqslant \lambda_1, \quad 0 < \lambda_0 < \lambda_1 < \infty \tag{44}$$

cînd $\{x_i\}$ sînt independente și identic repartizate $Po(\lambda)$. Observînd că

$$z_i = x_i \ln\frac{\lambda_1}{\lambda_0} - (\lambda_1 - \lambda_0) \text{ pentru } i = 1,2,\ldots$$

inegalitatea strictă a testului $S(b^*, a^*)$ se reduce la

$$h_a + sn < \sum_1^n x_i < h_r + sn, \tag{45}$$

$$h_a = \frac{b^*}{\ln(\lambda_1/\lambda_0)}, \quad h_r = \frac{a^*}{\ln(\lambda_1/\lambda_0)}, \quad s = \frac{\lambda_1 - \lambda_0}{\ln(\lambda_1/\lambda_0)}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Problema determinării exacte a (b^*, a^*) nu este rezolvată. La aplicarea teoremei 5 notăm că $\{z_i\}$ au, pentru toţi $0 < \lambda < \infty$,

$$G(h;\ \lambda) = \exp\left[\lambda\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_0}\right)^h - \lambda - (\lambda_1 - \lambda_0)h\right],$$

$$M(z;\ \lambda) = \lambda \ln \frac{\lambda_1}{\lambda_0} - \lambda_1 + \lambda_0.$$

Prin urmare, ecuaţia (35) dă între λ şi $h(\lambda) \neq 0$ relaţia funcţională

$$\lambda = \frac{(\lambda_1 - \lambda_0)h(\lambda)}{(\lambda_1/\lambda_0)^{h(\lambda)} - 1}. \tag{46}$$

Deoarece $M(z;\ \lambda) = 0$ implică $\lambda = s$, $h(s)$ este singura soluţie a ecuaţiei (46), în timp ce $h(\lambda) < 0$ pentru $\lambda > s$ şi $h(\lambda) > 0$ pentru $\lambda < s$, unde s este definit în (45). În consecinţă, cu $\lambda' = s$ şi $\lambda^* = \lambda(\lambda_1/\lambda_0)^{h(\lambda)}$ are loc teorema 5.

Exemplul 3. Ne propunem să verificăm ipoteza

$$H_0 : \mu = \mu_0 \text{ faţă de } H_1 : \mu > \mu_1, \quad -\infty < \mu_0 < \mu_1 < \infty \tag{47}$$

cînd $\{x_i\}$ sînt independente şi identic repartizate $N(\mu,\ \sigma^2)$, σ^2 cunoscută (Wald (1963) Cap. 7).

Observînd că

$$z_i = \frac{x_i(\mu_1 - \mu_0)}{\sigma^2} - \frac{(\mu_1^2 - \mu_0^2)}{2\sigma^2} \text{ pentru } i = 1,2,$$

inegalitatea strictă pentru $S(b^*, a^*)$ devine

$$h_a + sn < \sum_1^n x_i < h_r + sn,$$

(48)

$$h_a = \frac{b^*\sigma^2}{\mu_1 - \mu_0}, \quad h_r = \frac{a^*\sigma^2}{\mu_1 - \mu_0}, \quad s = \frac{\mu_0 + \mu_1}{2}.$$

Suma cumulată poate lua orice valoare reală şi panta s poate fi pozitivă sau negativă. În aproximaţiile (18), pentru diferite combinaţii de $((\mu_1 - \mu_0)/\sigma,\ \alpha,\ \beta)$, Freeman (1944) tabelează valorile $(h_a,\ h_r)$.

Deoarece

$$z_i \sim N\left(\frac{(\mu_1 - \mu_0)(2\mu - \mu_1 - \mu_0)}{2\sigma^2},\ \frac{\mu_1 - \mu_0}{\sigma}\right) \tag{49}$$

Scanned with OKEN Scanner

pentru toţi $-\infty < \mu < \infty$, avem

$$G(h\,;\,\mu) = \exp\left[\frac{(\mu_1-\mu_0)^2 h}{2\sigma^2}\left(h - \frac{\mu_1+\mu_0-2\mu}{\mu_1-\mu_0}\right)\right],$$

$$M(z\,;\,\mu) = \frac{(\mu_1-\mu_0)(2\mu-\mu_1-\mu_0)}{2\sigma^2}.$$

În consecinţă, ecuaţia (35) dă

$$h(\mu) = \frac{\mu_1+\mu_0-2\mu}{\mu_1-\mu_0} \tag{50}$$

Din (50) rezultă că

$$h(\mu)\begin{cases} < 0, & \mu > (\mu_0+\mu_1)/2 \\ > 0, & \mu < (\mu_0+\mu_1)/2. \end{cases}$$

Cu

$$\mu' = \frac{\mu_0+\mu_1}{2} \text{ şi } \mu^* = (\mu_0+\mu_1-\mu) \text{ are loc teorema 5.}$$

Exemplul 4. Fie (Wald (1963). Cap. 8)

$$H_0 : \sigma \leqslant \sigma_0, \quad H_1 : \sigma \geqslant \sigma_1, \quad 0 < \sigma_0 < \sigma_1 < \infty \tag{51}$$

cînd $\{x_i\}$ sînt independente şi identic repartizate $N(\mu, \sigma^2)$
Cazul I. $-\infty < \mu < \infty$ cunoscută.
Observînd că

$$z_i = \frac{1}{2}(\sigma_0^{-2} - \sigma_1^{-2})(x_i-\mu)^2 - \ln\frac{\sigma_1}{\sigma_0} \text{ pentru } i = 1,2,\ldots$$

inegalitatea critică a testului $S(b^*, a^*)$ este

$$h_a + sn < \sum_1^n (x_i-\mu)^2 < h_r + sn \tag{52}$$

$$h_a = \frac{2b^*}{\sigma_0^{-2}-\sigma_1^{-2}}, \quad h_r = \frac{2a^*}{\sigma_0^{-2}-\sigma_1^{-2}}, \quad s = \frac{2\ln(\sigma_1/\sigma_0)}{\sigma_0^{-2}-\sigma_1^{-2}}$$

Deoarece $(x_i-\mu)^2/\sigma^2 \sim \chi^2(1)$

$$G(h\,;\,\sigma) = \left(\frac{\sigma_0}{\sigma_1}\right)^h [1 - \sigma^2(\sigma_0^{-2}-\sigma_1^{-2})h]^{-1/2},$$

$$M(z\,;\,\sigma) = \frac{1}{2}\sigma^2(\sigma_0^{-2}-\sigma_1^{-2}) - \ln\frac{\sigma_1}{\sigma_0}$$

Scanned with OKEN Scanner

Dat orice $\sigma > 0$, $G(h;\ \sigma)$ există pentru toţi h reali, $h < \sigma^{-2}/(\sigma_0^{-2} - \sigma_1^{-2})$ şi pentru aceste valori ale lui h se aplică lema 2.(35) dă următoarea relaţie funcţională între σ şi $h(\sigma) \neq 0$

$$\sigma^2 = \frac{1 - (\sigma_0^2/\sigma_1^2)^{h(\sigma)}}{(\sigma_0^{-2} - \sigma_1^{-2})h(\sigma)}. \tag{53}$$

Deoarece $M(z;\ \sigma) = 0$ implică $\sigma = \sqrt{s}$, $h(\sqrt{s}) = 0$ este singura soluţie a ecuaţiei (53), în timp ce

$$h(\sigma) < 0 \quad \text{pentru} \quad \sigma > \sqrt{s}$$

şi

$$h(\sigma) > 0 \quad \text{pentru} \quad \sigma < \sqrt{s}.$$

Cu $\sigma' = \sqrt{s}$ şi $\sigma^* = \sigma(\sigma_1/\sigma_0)^{h(\sigma)}$ are loc teorema 5.

Cazul II. μ necunoscută

Fie

$$y_i = \frac{\sum_1^i x_j - i x_{i+1}}{\sqrt{i(i+1)}} \quad \text{pentru } i = 1,2,\ldots \tag{54}$$

La pasul $n + 1 \geqslant 2$ observaţiile iniţiale $(x_1, \ldots, x_{n+1})$ prin transformarea (54) dau $(y_1, \ldots, y_n)$. $\{y_i\}$ sînt independente şi identic repartizate $N(0,\ \sigma)$ şi, pentru fiecare $n \geqslant 1$,

$$\sum_1^n y_i^2 = \sum_1^{n+1} (x_i - \bar{x}_{n+1})^2, \quad \bar{x}_{n+1} = \frac{1}{n+1} \sum_1^{n+1} x_i. \tag{55}$$

În consecinţă, T.S.R.P.U.C.M.E. $S'(b^*,\ a^*)$ pentru (51) bazat pe repartiţia comună a variabilelor $\{y_i\}$ va avea structura şi proprietăţile ca $S(b^*,\ a^*)$. Inegalitatea critică a testului $S'(b^*,\ a^*)$ la pasul $(n + 1)$ este (52) în care partea din mijloc este înlocuită prin (55). Relaţia (53) şi teorema 5 au loc pentru $S'(b^*,\ a^*)$ în acelaşi mod ca pentru $S(b^*,\ a^*)$. Comparînd (52) cu

$$h_a + sn < \sum_1^n y_i^2 < h_r + sn$$

Observăm că funcţiile C.O. ale testelor $S(b^*,\ a^*)$ şi $S'(b^*,\ a^*)$ sînt aceleaşi. Mai mult, V.S.D. (numărul variabilelor x_i cerute pentru luarea deciziei) a celor două teste satisfac, pentru toţi $\sigma > 0$.

$$\begin{aligned} &p_S(n;\ \sigma) = p_{S'}(n + 1;\ \sigma) \text{ pentru toţi } n \geqslant 1 \\ &M_S(n;\ \sigma) = M_{S'}(n;\ \sigma) - 1. \end{aligned} \tag{56}$$

(56) arată că, cu toate că proprietatea optimă a teoremei 3 nu are loc pentru $S'(b^*,\ a^*)$ în $\sigma = \sigma_0,\ \sigma_1$, $M_{S'}(n;\ \sigma)$ în aceste două puncte nu poate depăşi niciodată V.M.V.S. a oricărui test rival, pentru (51), cu mai mult ca 1 cînd μ este necunoscută.

Scanned with OKEN Scanner

În cele ce urmează considerăm exemplele pentru care repartiția comună a variabilelor $\{x_i\}$ nu aparține familiei (39).

Exemplul 5. Considerăm ipotezele:

$$H_0 : D \leqslant D_0, \quad H_1 : D \geqslant D_1, \quad 0 \leqslant D_0 < D_1 \leqslant N \tag{57}$$

în familia pentru care funcția de frecvențe comună a unei selecții de volum n este

$$C_D^{n\bar{x}_n} C_{N-D}^{n-n\bar{x}_n} / C_N^n C_n^{n\bar{x}_n}$$

pentru $n\bar{X}_n = \underline{c}, \underline{c}+1, \ldots, \bar{d}$,

$$\underline{c} = \max [0, n - N + D], \quad \bar{d} = \min [n, D].$$

Mai întîi observăm că, deoarece pentru fiecare $0 \leqslant D < N$,

$$\frac{f_n(n; D+1)}{f_n(x; D)} = \frac{(D+1)(N-D-n+n\bar{X}_n)}{(N-D)(D+1-n\bar{X}_n)}$$

familia posedă pentru fiecare $n \geqslant 1$ un raport al verosimilităților monoton în $\sum_1^n x_i$. Raportul probabilităților la pasul n este dat de

$$\frac{f_n(x; D_1)}{f_n(x; D_0)} = \begin{cases} 0 & , n - N + D_0 \leqslant n\bar{x}_n < n - N + D_1 \\ C_{D_1}^{n\bar{x}_n} C_{N-D_1}^{n-n\bar{x}_n} / C_{D_0}^{n\bar{x}_n} C_{N-D_0}^{n-n\bar{x}_n} & , n - N + D_1 \leqslant n\bar{x}_n \leqslant D_0 \\ \infty & , D_0 < n\bar{x}_n \leqslant D_1 \end{cases}$$

Prima expresie din al doilea membru nu are loc atîta timp cît $n \leqslant N - D_1$ și a treia expresie atîta timp cît $n \leqslant D_0$. Inegalitatea critică a testului $S(b^*, a^*)$ se reduce la

$$b^* - J(n\bar{X}_n) < K_n(n\bar{X}_n) < a^* - J(n\bar{X}_n), \tag{58}$$

$$J(n\bar{X}_n) = \ln [D_1 ! (D_0 - n\bar{X}_n) !] - \ln [D_0 ! (D_1 - n\bar{X}_n) !],$$

$$K_n(n\bar{X}_n) = \ln [(N - D_1) ! (N - D_0 - n + n\bar{X}_n) !] -$$

$$- \ln [(N - D_0) ! (N - D_1 - n + n\bar{X}_n) !] \simeq$$

$$\simeq -(n - n\bar{X}_n)\left[\ln \frac{N - D_0}{N - D_1} + \frac{(D_1 - D_0)(n - n\bar{X}_n - 1)}{2(N - D_0)(N - D_1)}\right]$$

Dacă n este mic în comparație cu $N - D_1$, formula aproximativă pentru $K_n(n\bar{X}_n)$ este corespunzătoare. Observăm că dacă, la pasul n, $n\bar{X}_n < n - N + D_1$, atunci

$$K_n(n\bar{X}_n) + J(n\bar{X}_n) = -\infty$$

Scanned with OKEN Scanner

și este acceptată H_0, în timp ce dacă $n\bar{X}_n > D_0$, atunci

$$K_n(n\bar{X}_n) + J(n\bar{X}_n) = \infty$$

și este respinsă H_0.

Dacă selecția continuă la pasul $n = N$, trebuie să avem fie

$n\bar{X}_n = D_0$ în care caz este acceptată H_0, sau

$n\bar{X}_n = D_1$ în care caz este respinsă H_0.

Deoarece

$$P(n> \mid D) = 0 \text{ pentru toți } 0 \leqslant D \leqslant N,$$

T.S.R.P. este închis.

Cînd $N \to \infty$, $S(b^*, a^*)$ se reduce la T.S.R.P. din exemplul 1) cu $p_0 = \lim (D_0/N)$ și $p_1 = \lim (D_1/N)$.

Deoarece $\{z_i\}$ nu sînt independente nu se aplică teorema 3, cu excepția cazului cînd $N \to \infty$.

Este dificil să se determine exact $Q(D)$ a testului $S(b^*, a^*)$. Pentru scopuri practice este convenabil să scriem (58) în forma echivalentă

$$\underline{n}(n\bar{X}_n) < n < \bar{n}(n\bar{X}_n), \tag{59}$$

unde, pentru orice mulțime $(N, D_0, D_1, \alpha, \beta)$ dată și $n\bar{X}_n (= 0, 1, 2, \ldots)$ specificată, $\underline{n}(n\bar{X}_n)$ și $\bar{n}(n\bar{X}_n)$ sînt soluțiile în n în $a^* = J(n\bar{X}_n) + K_n(n\bar{X}_n)$ și respectiv în $b^* = J(n\bar{X}_n) + K_n(n\bar{X}_n)$.

Inegalitățile (59) rezultă din (58) deoarece, pentru $(N, D_0, D_1, n\bar{X}_n, b^*, a^*)$ fixată, $K_n(n\bar{X}_n)$ este o funcție strict descrescătoare de n pe $[1, N - D_1 + n\bar{X}_n]$.

Exemplul 6. Considerăm o repartiție uni-dimensională cu funcția de repartiție $F(x; \theta)$, $\theta \in \Theta$, unde Θ este spațiul tuturor parametrilor și θ identifică un membru particular al lui Θ. Folosind un șir de observații independente asupra variabilei avînd această repartiție ne propunem să verificăm ipoteza

$$H_0 : p(\theta) = F(x', \theta) \leqslant p_0 \text{ față de}$$

$$H_1 : p(\theta) \geqslant p_1, \quad 0 < p_0 < p_1 < 1 \tag{60}$$

cu o intensitate (α, β) minimă, unde x' este un număr real specificat. În particular, pentru $p_0 = \frac{1}{2} < p_1$, problema se reduce la a verifica dacă mediana variabilei este $\geqslant x'$ sau $< x'$. Pentru a construit un T.S.R.P. pentru (60) presupunem că șirul inițial $\{x_i\}$ este modificat la șirul $\{y_i\}$, unde pentru $i \geqslant 1$

$$y_i = \begin{cases} 0, & x_i > x' \\ 1, & x_i \leqslant x' \end{cases}$$

Atunci se poate imagina că orice observație x_i are semnul plus dacă $x_i' > x_i$ și semnul minus dacă $x_i \leqslant x'$. Deoarece $\{y_i\}$ sînt independente și identic repartizate Bernoulli cu probabilitatea succesului $p(\theta)$, T.S.R.P. pentru

Scanned with OKEN Scanner

(60), bazat pe $\{y_i\}$, poate fi obținut în același mod ca cel din exemplul 1. Atunci T.S.R.P. $S(b^*, a^*)$ optim accepta sau respinge H_0 după cum inegalitatea inferioară sau inegalitatea superioară în

$$h_a + sn < n\bar{Y}_n < h_r + sn$$

nu este satisfăcută, unde (h_a, h_r, s) este definită în (42).

Toate proprietățile testului $S(b^*, a^*)$ din exemplul 1) pot fi extinse la testul $S(b^*, a^*)$ de față. În particular, cînd $S(b^*, a^*)$ atinge (α, β) el este cel mai eficient în $p(\theta) = p_0$, p_1 cel puțin printre acele teste valide ale ipotezei (60) care sînt bazate pe $\{y_i\}$.

Mai general, presupunem că $F(x_1, \ldots, x_k; \theta)$, $\theta \in \Theta$ este o funcție de repartiție necunoscută a unei variabile k-dimensionale. Fie A orice submulțime cunoscută a lui Ω_k
și

$$p(\theta) = P((x_1, \ldots, x_k) \in A \mid \theta).$$

Testul secvențial anterior se aplică pentru verificarea ipotezei

$$H_0 : p(\theta) \leqslant p_0 \text{ față de } H_1 : p(\theta) \geqslant p_1,$$

cînd avem șirul vectorilor observați $\{(x_{1i}, \ldots, x_{ki})\}$ $(i = 1, 2, \ldots)$.

Se definește

$$y_i = \begin{cases} 0, & (x_{1i}, \ldots, x_{ki}) \in CA \\ 1, & (x_{1i}, \ldots, x_{ki}) \in A \end{cases}$$

§3. Proprietatea de terminare

3.1. Cazul cînd $\{z_i\}$ sînt independente și identic repartizate

Vom prezenta condiții suficiente în care șirul de observații în (4) se termină cu probabilitatea unu cînd θ arbitrar este punctul adevărat în Θ. După (XXI.13) $S(b, a)$ este un test închis dacă și numai dacă proprietatea sa de terminare are loc pentru fiecare $\theta \in \Theta$.

Cînd $\{z_i\}$ sînt independente și identic repartizate orice T.S.R.P. este închis și avem concluzii mai puternice din

TEOREMA 6. *Presupunem că, pentru orice $\theta \in \Theta$ dat, $\{z_i\}$ sînt independente și identic repartizate și*

$$P(z_i = 0 \mid \theta) < 1.$$

Atunci V.D.S. n al testului $S(b, a)$ satisface

i) $\lim_{N \to \infty} P(n > N \mid \theta) = 0$

ii) *există un $t_0 > 0$ astfel încît funcția generatoare de momente $M(e^{nt}; \theta)$ există pentru toți $t < t_0$ reali*

iii) $M(n^k; \theta) < \infty$ *pentru fiecare $k > 0$.*

Demonstrație. Considerăm mai întîi cazul cînd, pentru θ dat,

$$P(z_i = \zeta \mid \theta) = 1$$

pentru ζ real. Atunci inegalitatea critică a testului $S(b, a)$ va avea $Z_n = n\zeta$ pentru toți $n \geqslant 1$.

Scanned with OKEN Scanner

Dacă: $\zeta < 0$, $S(b, a)$ acceptă H_0 atîta timp cît $n \geqslant b/\zeta$ și $P(n = [b/\zeta]\,|\,\theta) = 1$, unde $[u]$ reprezintă cel mai mic întreg pozitiv $\geqslant u$;
$\zeta > 0$, $S(b, a)$ respinge H_0 atîta timp cît $n \geqslant a/\zeta$ și $P(n = [a/\zeta]\,|\,\theta) = 1$;
$\zeta = 0$ și $0 \leqslant b < a$ sau $b < a \leqslant 0$, $S(b, a)$ acceptă sau respinge H_0 cu $P(n = 1\,|\,\theta) = 1$.

În toate aceste cazuri au loc concluziile teoremei și în particular ii) are loc pentru toți t reali. Dacă $\zeta = 0$ și $b < 0 < a$, $S(b, a)$ va continua indefinit, cu $P(n = \infty\,|\,\theta) = 1$.

În continuare considerăm cazul cînd z_i poate lua cel puțin două valori cu probabilitatea unu. Există un $\xi \neq 0$ real astfel încît.

$$P(z_i \leqslant \xi\,|\,\theta) > 0, \quad P(z_i > \xi\,|\,\theta) > 0.$$

Acum, pentru orice doi întregi pozitivi m și r

$$P(n > mr\,|\,\theta) = P(b < Z_1 < a,\ b < Z_2 < a,\ \ldots,\ b < Z_{mr} < a\,|\,\theta) \leqslant$$

$$\leqslant P(b < Z_r < a,\ b < Z_{2r} < a,\ \ldots,\ b < Z_{mr} < a\,|\,\theta).$$

Deoarece $\{z_i\}$ sînt independente și identic repartizate, atunci și $Z_r,\ Z_{2r} - Z_r,\ \ldots,\ Z_{mr} - Z_{(m-1)r}$ sînt independente și prin urmare

$$P(n > mr\,|\,\theta) \leqslant [p(r,\ c,\ \theta)]^m, \tag{61}$$

unde

$$p(r,\ c,\ \theta) = P(|z_1 + \ldots + z_r| < c\,|\,\theta), \quad c = |a| + |b|.$$

Dat orice $c > 0$ și $\xi > 0$, putem alege $r \geqslant c/\xi$ astfel ca

$$p(r,\ c,\ \theta) \leqslant 1 - \left[P\left(z_i \geqslant \frac{c}{r}\,\middle|\,\theta\right)\right]^r < 1,$$

deoarece $P(z_i > \xi\,|\,\theta) > 0$.

Dat orice $c > 0$ și $\xi < 0$, putem alege $r \geqslant -c/\xi$ astfel ca

$$p(r,\ c,\ \theta) \leqslant 1 - \left[P\left(z_i \leqslant -\frac{c}{r}\,\middle|\,\theta\right)\right]^r < 1,$$

deoarece $P(z_i \leqslant \xi\,|\,\theta) > 0$.

În fiecare caz pentru r fixat, din (61) obținem

$$\lim_{N\to\infty} P(n > N\,|\,\theta) = \lim_{m\to\infty} P(n > mr\,|\,\theta) = 0,$$

ceea ce demonstrează prima concluzie a teoremei. Pentru a demonstra a doua concluzie a teoremei, observăm că, pentru orice t real,

$$M(e^{nt};\ \theta) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{nt} p(n;\ \theta) = \sum_{m=0}^{\infty} e^{mrt}\left[\sum_{j=1}^{r} e^{jt} p(mr + j;\ \theta)\right].$$

Scanned with OKEN Scanner

Din (61), obținem

$$M(e^{nt};\ \theta) \leqslant \sum_{m=0}^{\infty} e^{mrt} e^{rt} P(n > mr \mid \theta) \leqslant e^{rt} \sum_{m=0}^{\infty} [e^{rt} p(r,\ c,\ \theta)]^m, \quad t \geqslant 0$$

(62)

$$M(e^{nt};\ \theta) \leqslant \sum_{m=0}^{\infty} e^{mrt} e^{t} P(n > mr \mid \theta) \leqslant e^{t} \sum_{m=0}^{\infty} [e^{rt} p(r,\ c,\ \theta)]^m, \quad t \leqslant 0.$$

Deoarece $p(r,\ c,\ \theta) < 1$ pentru o alegere convenabilă a întregului pozitiv r (ce depinde de c și ξ), seria geometrică din (62) este convergentă pentru toți $t \leqslant t_0$, unde

$$t_0 = -\frac{\ln (p(r,\ c,\ \theta)}{r} > 0$$

În final, dat orice $0 < t < t_0$ și $k > 0$ putem alege N suficient de mare pentru a asigura $k \ln n < nt$ pentru toți $n \geqslant N$. În consecință

$$\sum_{n=N}^{\infty} n^k p(n;\ \theta) < \sum_{n=N}^{\infty} e^{nt} p(n;\ \theta) < \infty \text{ pentru } t < t_0$$

și prin urmare $M(n^k;\ \theta) < \infty$ pentru toți $k > 0$.

COROLARUL 1. *Dacă $\{z_i\}$ sînt independente și identic repartizate cu dispersia comună $D^2(z;\ \theta) > 0$ pentru un $\theta \in \Theta$ dat, atunci concluziile teoremei 6 au loc.*

Demonstrație. Dacă $D^2(z;\ \theta)$ există și este pozitivă, atunci

$$P(z_i = \zeta \mid \theta) < 1$$

pentru toți ζ reali. Deci, teorema 6 are loc pentru fiecare T.S.R.P.

Observație. Pentru a verifica că $S(b,\ a)$ este închis, în aplicații ce privesc $\{z_i\}$ ca variabile aleatoare independente și identic repartizate este suficient să se verifice condițiile teoremei 6 sau ale corolarului ei pentru toți $\theta \in \Theta$. În particular T.S.R.P.

$$S(\ln [\beta/(1-\alpha)],\quad \ln [(1-\beta)/\alpha]$$

bazat pe aproximațiile lui Wald este întotdeauna închis. Dacă $P(z_i = 0 \mid \theta) = 1$ pentru unu $\theta \in \Theta$ nu vom folosi orice $S(b,\ a)$ care are $b < 0 < a$.

Exemplul 7. Considerăm orice T.S.R.P. pentru (40). S-a arătat că $S(b,\ a)$ este închis cînd

$$p_0 = 0 < p_1 < 1 \text{ sau } 0 < p_0 < p_1 = 1 \text{ sau } p_0 = 0,\ p_1 = 1.$$

Dacă $0 < p_0 < p_1 < 1$, $\{z_i\}$ sînt independente, identic repartizate cu

$$P\left(z_i = \ln \frac{p_1}{p_0} \,\middle|\, p\right) = p, \quad P\left(z_i = \ln \frac{1-p_1}{1-p_0} \,\middle|\, p\right) = 1 - p,$$

pentru toți $0 \leqslant p \leqslant 1$.

Scanned with OKEN Scanner

Deoarece $p_0 \neq p_1$, se obține $P(z_i = 0|p) = 0$ pentru toți $0 \leqslant p \leqslant 1$ și $S(b, a)$ este închis. O demonstrație similară se aplică la orice T.S.R.P. pentru (44) și pentru $\lambda > 0$ avem

$$P(z_i = 0 | \lambda) < 1.$$

În acest caz și în altele care se ocupă cu un singur parametru real continu se convine, în scopul studierii comportării lui $Q(\theta)$ și $M(n; \theta)$, să se includă punctele de sfîrșit ale domeniului Θ chiar cînd familia le exclude din domeniul ei de definiție. Observăm că

$$P(z_i = \lambda_0 - \lambda_1 | \lambda = 0) = 1 \text{ și } P(z_i = \infty | \lambda = \infty) = 1,$$

astfel că $S(b, a)$ se termină, de asemenea, cu probabilitatea unu pentru $\lambda = 0, \infty$.

Exemplul 8. Considerăm orice T.S.R.P. pentru (47). În acest caz $\{z_i\}$ sînt independente, identic repartizate cu $D^2(z; \mu) = (\mu_1 - \mu_0)^2/\sigma^2 > 0$ pentru toți $-\infty < \mu < \infty$ și prin urmare $S(b, a)$ este închis. De asemenea observăm că

$$P(z_i = \infty | \mu = \infty) = 1 \text{ și } P(z_i = -\infty | \mu = -\infty) = 1.$$

3.2. Cazul cînd $\{z_i\}$ nu sînt independente și identic repartizate

Ne ocupăm de situația cînd $\{z_i\}$ nu sînt independente sau independente, însă nu identic repartizate. Deoarece pentru orice $\theta \in \Theta$ fixat și pentru fiecare $N \geqslant 1$,

$$P(n > N | \theta) = P(b < Z_1 < a, \ldots, b < Z_N < a | \theta) \leqslant P(b < Z_N < a | \theta)$$

urmează că o condiție suficientă ca $S(b, a)$ să fie închis este ca

$$\lim_{n \to \infty} P(b < Z_n < a | \theta = 0 \text{ pentru fiecare } \theta \in \Theta. \tag{63}$$

Vom da condițiile în care (63) are loc pentru orice θ dat. Mai întîi observăm că regiunea critică a testului $S(b, a)$ poate fi rescrisă întotdeauna în forma:

$$\underline{T}_n < T_n < \overline{T}_n \quad \text{pentru } n \geqslant 1, \tag{64}$$

unde $T_n = T_n(x)$ este o funcție cu valori reale pe Ω_n și $\underline{T}_n < \overline{T}_n$ sînt pentru orice n constante. Aici T_n, $\underline{T}_n$, $\overline{T}_n$ pot conține pe θ.

DEFINIȚIA 4. Cînd $\underline{T}_n$ și $\overline{T}_n$ sînt independente de θ, ele poartă numele de limitele critice ale lui T_n (sau ale T.S.R.P.).

Luînd $T_n = Z_n$, $b = \underline{T}_n$ și $a = \overline{T}_n$ se obține, din (64), inegalitatea critică a testului $S(b, a)$ (în acest caz nu este folosită teorema care urmează). O versiune alternativă a lui (64) apare cînd se consideră o familie cu un parametru ce posedă un raport de verosimilități monoton. Deoarece, pentru fiecare $n \geqslant 1$ și pentru toți $\theta \in \Theta$,

$$P(b < Z_n < a | \theta) = P(\underline{T}_n < T_n < \overline{T}_n | \theta),$$

Scanned with OKEN Scanner

condiția (63) poate fi restabilită ca

$$\lim_{n\to\infty} P(\underline{T}_n < T_n < \overline{T}_n \mid \theta) = 0 \quad \text{pentru fiecare} \quad \theta \in \Theta.$$

TEOREMA 7. *Presupunem că, pentru fiecare* $n \geqslant n_0$, *inegalitatea critică a testului* $S(b, a)$ *poate fi exprimată ca*

$$\underline{T}_n < T_n < \overline{T}_n,$$

unde T_n, $\underline{T}_n$, $\overline{T}_n$ *poate implica* θ. *Atunci*

$$\lim_{n\to\infty} P(\underline{T}_n < T_n < \overline{T}_n \mid \theta) = 0$$

dacă

Condiția I. Șirul $\{T_n\}$ *converge în probabilitate către* ψ, *care poate implica* θ *și* $\lim \underline{T}_n = \lim \overline{T}_n \neq \psi$ *sau*

Condiția II. Șirul funcțiilor de repartiție corespunzătoare șirului $\{T_n\}$ *converge către funcția de repartiție* $H(T)$ *continuă care implică* θ *și*

$$\lim \underline{T}_n = \lim \overline{T}_n$$

au loc.

Exemplul 9. Considerăm șirul $\{x_i\}$ de variabile aleatoare independente astfel încît $x_i \sim N(\mu, \sigma_1^2)$ pentru $i = 1, 3, 5, \ldots$ și $x_i \sim N(\mu, \sigma_2^2)$ pentru $i = 2, 4, 6, \ldots$ Atunci T.S.R.P. pentru

$$H_0 : \mu = \mu_0 \text{ față de } H_1 : \mu = \mu_1 (\mu_0 < \mu_1),$$

σ_1^2, σ_2^2 fiind cunoscute, folosește

$$Z_n = \begin{cases} (\mu_1 - \mu_0)\sigma_1^{-2}\left[\sum_{j=1}^{(n+1)/2} x_{2j-1} + \rho \sum_{j=1}^{(n-1)/2} x_{2j} - \right. \\ \left. \quad - \frac{1}{4}(n + 1 + n\rho - \rho)(\mu_0 + \mu_1)\right], \qquad n = 1, 3, 5, \ldots \\ (\mu_1 - \mu_0)\sigma_1^{-2}\left[\sum_{j=1}^{n/2} x_{2j-1} + \rho \sum_{j=1}^{n/2} x_{2j} - \right. \\ \left. \quad - \frac{1}{4}(1 + \rho)(\mu_0 + \mu_1)\right], \qquad n = 2, 6, 4, \ldots \end{cases}$$

unde $\rho = \sigma_1^2 \sigma_2^{-2}$. În acest caz $\{z_i\}$ sînt independente însă nu identic repartizate. Pentru a aplica teorema 7 în condiția I, putem scrie $b < Z_n < a$, pentru fiecare $n \geqslant 1$, în forma (64) cu

$$T_n = \begin{cases} n^{-1}\left[\sum_{j=1}^{(n+1)/2} x_{2j-1} + \rho \sum_{j=1}^{(n-1)/2} x_{2j}\right], \quad n = 1, 3, 5, \ldots \\ n^{-1}\left[\sum_{j=1}^{n/2} x_{2j-1} + \rho \sum_{j=1}^{n/2} x_{2j}\right], \qquad n = 2, 4, 6, \ldots \end{cases}$$

Scanned with OKEN Scanner

$\{T_n\}$ converge în probabilitate către $\psi = (1 + \rho)\mu/2$ și $\lim \underline{T}_n = \lim \overline{T}_n = (1 + \rho)(\mu_0 + \mu_1)/4$. În consecință, dacă $\mu \neq (\mu_0 + \mu_1)/2$, T.S.R.P. se termină cu probabilitatea unu.

Alternativ, la aplicarea condiției II putem scrie $b < Z_n < a$, pentru fiecare $n \geqslant 1$, în forma (64) cu

$$T_n = \begin{cases} \left[\sum_{j=1}^{(n+1)/2} (x_{2j-1} - \mu) + \rho \sum_{j=1}^{(n-1)/2} (x_{2j} - \mu)\right] \Big/ \sigma_1 \sqrt{\frac{n+1}{2} + \frac{n-1}{2}\rho}, \\ \qquad\qquad n = 1, 3, 5, \ldots \\ \left[\sum_{j=1}^{n/2} (x_{2j-1} - \mu) + \rho \sum_{j=1}^{n/2} (x_{2j} - \mu)\right] \Big/ \sigma_1 \sqrt{\frac{n}{2}(1 + \rho)}, \\ \qquad\qquad n = 2, 4, 6, \ldots \end{cases}$$

Atunci, pentru fiecare n, $T_n \sim N(0, 1)$ și $\lim \underline{T}_n = \lim \overline{T}_n = c$, unde

$$c = \begin{cases} 0, & \mu = (\mu_0 + \mu_1)/2 \\ \infty, & \mu < (\mu_0 + \mu_1)/2 \\ -\infty, & \mu > (\mu_0 + \mu_1)/2. \end{cases}$$

Deci T.S.R.P. se termină cu probabilitatea unu pentru toți μ.

§4. Funcțiile C.O. și V.M.V.S.

4.1. Aproximațiile lui Wald

Funcțiile C.O. și V.M.V.S. ale cărui T.S.R.P. $S(b,a)$ arbitrar sînt exprimate general în (9) și (11) ca presupuneri probabilistice asupra șirului $\{Z_n\}$. În cele ce urmează vom obține formule aproximative simple pentru acestea cînd $\{z_i\}$ sînt variabilele independente și identic repartizate din lema 2 și cînd nu avem exces a lui Z_n față de b și a (17).

Considerăm mai întîi funcția C.O. a testului $S(b, a)$ cînd $\{x_i\}$ sînt independente și identic repartizate. Din (35) urmează că funcția

$$f^*(x; \theta) = \left[\frac{f(x, \theta_1)}{f(x; \theta_0)}\right]^{h(\theta)} f(x; \theta)$$

este o densitate de repartiție. Dacă $h(\theta) > 0$, inegalitatea critică a testului $S(b, a)$ pentru fiecare $n \geqslant 1$ poate fi scrisă în forma

$$b_* < \sum_1^n z_i^* < a_* \tag{65}$$

unde

$$b_* = bh(\theta), \quad a_* = ah(\theta), \quad z_i^* = \ln \frac{f^*(x_i; \theta)}{f(x_i; \theta)} \text{ pentru } i \geqslant 1.$$

Scanned with OKEN Scanner

Însă (65) este de asemenea inegalitate critică a T.S.R.P. $S(b_*, a_*)$ pentru discriminarea între

$H : \{x_i\}$ sînt independente și identic repartizate cu densitatea $f(x; \theta)$ și

$H^* : \{x_i\}$ sînt independente și identic repartizate cu densitatea $f^*(x; \theta)$

Fie (α_*, β_*) probabilitățile erorilor asociate cu $S(b_*, a_*)$. Urmează că $Q(\theta) = 1 - \alpha_*$ dacă $h(\theta) > 0$ (se obține aceiași identitate dacă $h(\theta) < 0$). Aplicînd teorema 2 și (18) testului $S(b_*, a_*)$ se obține

$$b_* \simeq \ln \frac{\beta_*}{1 - \alpha_*}, \quad a_* \simeq \ln \frac{1 - \beta_*}{\alpha_*}$$

cu condiția ca $b < 0 < a$ și excesul lui Z_n față de b și a să fie pentru $\theta \in \Theta$ dat, mic.

Eliminînd β_* între aceste egalități aproximative găsim

$$Q(\theta) \simeq \tilde{Q}(\theta) = \frac{e^{ah(\theta)} - 1}{e^{ah(\theta)} - e^{bh(\theta)}}, \text{ dacă } M(z; \theta) \neq 0. \tag{66}$$

Dacă $M(z; \theta') = 0$ pentru niște $\theta' \in \Theta$, atunci după lema 2, $h(\theta') = 0$ și derivarea anterioară nu se mai aplică. Totuși, dacă θ este real și $h(\theta)$ este continuă în vecinătatea lui $\theta = \theta'$, atunci (66) dă

$$Q(\theta') \simeq \tilde{Q}(\theta') = \frac{a}{a - b} \text{ dacă } M(z; \theta') = 0. \tag{67}$$

DEFINIȚIA 5. $\tilde{Q}(\theta)$, pentru $\theta \in \Theta$, poartă numele de aproximația lui Wald a funcției C.O. a testului $S(b, a)$.

Dacă $\{x_i\}$ nu sînt independente și identic repartizate, însă $\{z_i\}$ sînt, atunci (66) și (67) au loc.

Dat $0 < \alpha < 1 - \beta < 1$, ecuațiile

$$\tilde{Q}(\theta_0) = 1 - \alpha \quad \text{și} \quad \tilde{Q}(\theta_1) = \beta$$

dau marginile de stopare.

Ne ocupăm de funcția V.M.V.S. a testului $S(b, a)$ cînd $\{z_i\}$ sînt independente și identic repartizate. Mai întîi observăm din teorema 6 că $M(n; \theta) < \infty$ și $D^2(n; \theta) < \infty$. Din (XXI.39) și respectiv (XXI.44) urmează că

$$M(n, \theta) = \begin{cases} \dfrac{Q(\theta) M(Z_n | Z_n \leqslant b | \theta) + [1 - Q(\theta)] M(Z_n | Z_n \geqslant a; \theta)}{M(z; \theta)}, \\ \qquad\qquad M(z; \theta) \neq 0 \\ \dfrac{Q(\theta) M(Z_n^2 | Z_n \leqslant b | \theta) + [1 - Q(\theta)] M(Z_n^2 | Z_n \geqslant a; \theta)}{M(z^2; \theta)} \\ \qquad\qquad M(z; \theta) = 0 \end{cases} \tag{68}$$

Scanned with OKEN Scanner

Dacă, pentru $\theta \in \Theta$ dat, excesul lui Z_n față de b și a este mic, avem

$$M(Z_n^k \mid Z_n \leqslant b;\ \theta) \simeq b^k, \quad M(Z_n^k \mid Z_n \geqslant a;\ \theta) \simeq a^k, \qquad k \geqslant 1.$$

Ținînd seama de acestea în (68), obținem

$$(69) \qquad M(n;\ \theta) \simeq \tilde{M}(\theta) = \frac{bQ(\theta) + a[1 - Q(\theta)]}{M(z;\ \theta)}, \qquad M(z;\ \theta) \neq 0$$

$$(70) \qquad M(n;\ \theta') \simeq \tilde{M}(\theta') = \frac{b^2Q(\theta') + a^2[1 - Q(\theta')]}{M(z^2;\ \theta)}, \qquad M(z;\theta') = 0.$$

Definiția 6. $\tilde{M}(\theta)$, $\theta \in \Theta$ poartă numele de aproximația lui Wald a funcției V.M.V.S. a testului $S(b, a)$.

În aplicații practice adeseori $Q(\theta)$ se determină exact cu greutate. În aceste cazuri, dacă $b < 0 < a$, se poate introduce (66) și (67) în (69) și respectiv (70). Valoarea rezultată a $M(n;\ \theta)$ va fi notată prin $\tilde{\tilde{M}}(\theta)$ și va purta de asemenea numele de aproximația lui Wald.

Avem:

$$M(n;\ \theta') \simeq \tilde{M}(\theta') \simeq \tilde{\tilde{M}}(\theta') = -\frac{ab}{M(z^2;\ \theta')}, \qquad M(z;\ \theta') = 0$$

Dată orice pereche de margini de stopare $b < 0 < a$, pentru diferite valori ale lui $\theta \in \Theta$, se pot calcula $Q(\theta)$ și $M(n;\ \theta)$ corespunzătoare testului $S(b, a)$ din aproximațiile lui Wald. În particular, dacă marginile de stopare (18) sînt înlocuite în (66), (67), (69) și (70), pentru o pereche (α, β) specificată $\alpha + \beta < 1$, se găsesc funcțiile C.O. și V.M.V.S. aproximative ale T.S.R.P.U.C.M.E. pentru (2) sau pentru (23). Astfel sub (18), (66) și (69), $S(b^*, a^*)$ are

$$M^*(n;\ \theta_0) \simeq \tilde{\tilde{M}}(\theta_0) = \frac{(1 - \alpha) \ln [\beta/(1 - \alpha)] + \alpha \ln [(1 - \beta)/\alpha]}{M(z;\ \theta_0)}$$

(71)

$$M^*(n;\ \theta_1) \simeq \tilde{\tilde{M}}(\theta_1) = \frac{\beta \ln [\beta/(1 - \alpha)] + (1 - \beta) \ln [(1 - \beta)/\alpha]}{M(z;\ \theta_1)}.$$

Dacă excesul lui Z_n față de b^* și a^* este foarte mic, $S(b^*, a^*)$ va avea după teorema 2, o intensitate exactă apropiată de (α, β). După teorema 3, (71) vor fi margini inferioare ale V.M.V.S. în $\theta = \theta_0$, θ_1 ale oricărui test valid pentru (2).

Într-o familie ce depinde de un singur parametru $[F_n(x;\ \theta), \underline{\theta} < \theta < \overline{\theta}]$, $Q(\theta)$ a testului $S(b^*, a^*)$ descrește monoton de la $Q(\underline{\theta}) = 1$ la $Q(\overline{\theta}) = 0$. Pe de altă parte, $M(n;\ \theta)$ își atinge maximul în vecinătatea lui $\theta = \theta'$, pentru care $M(z;\ \theta') = 0$, și descrește monoton cînd θ se deplasează de la θ' în fiecare direcție. Obișnuit se pot determina $Q(\underline{\theta})$, $Q(\overline{\theta})$, $M(n;\ \underline{\theta})$, $M(n;\ \overline{\theta})$ exact din considerații privind comportarea limită a testului cînd $\theta \to \underline{\theta}$, $\overline{\theta}$.

Scanned with OKEN Scanner

Exemplul 10. Considerăm T.S.R.P. pentru (40) definit în (42). Se verifică că

$$Q(0) = 1,\ Q(1) = 0,\ M(n;\ 0) = \frac{-h_a}{s};\ M(n;\ 1) = \frac{h_r}{1-s}$$

Deoarece pentru $p = 0,\ 1$, lema 2 și în consecință aproximațiile lui Wald nu au loc, definim

$$\tilde{Q}(0),\ \tilde{Q}(1),\ \tilde{M}(0) = \tilde{\tilde{M}}(0) \quad \text{și} \quad \tilde{M}(1) = \tilde{\tilde{M}}(1)$$

în același mod ca mai înainte.

Dacă $p \neq s$ atunci $\tilde{Q}(p)$, pentru $0 < p < 1$, este dată de (66) în care $h(p) \neq 0$ este soluția lui (43). Pentru orice valoare a lui $p \neq s$, soluția numerică actuală a ecuației (43) nu este dificilă. Alternativ, se pot da diferite valori nenule lui $h(p)$ simultan în (43) și (66) și obținem valorile corespunzătoare ale lui p și $\tilde{Q}(p)$. Dacă punctul $(p, \tilde{Q}(p))$ de pe curba C.O. este determinat de un $h(p) > 0$ ales, punctul $(\bar{p}, \tilde{Q}(\bar{p}))$ asociat cu $-h(p)$ este calculat din:

$$\bar{p} = p\left(\frac{p_1}{p_0}\right)^{h(p)}, \quad \tilde{Q}(\bar{p}) = e^{bh(p)}\tilde{Q}(p).$$

Deoarece $h(p)$ este continuă în $p = s$, valoarea lui $\tilde{Q}(s)$ se poate obține din (67). Dacă $p \neq s$ atunci $\tilde{M}(p)$ pentru $0 < p < 1$ este dată de (69), unde $M(z;\ p)$ este calculată în exemplul 1. În final, $\tilde{M}(s)$ este ca în (70) cu

$$M(z^2;\ s) = \ln\frac{p_1}{p_0} \cdot \ln\frac{1-p_0}{1-p_1}.$$

Freeman (1944), pentru diferite combinații de $(p_0,\ p_1,\ \alpha,\ \beta)$, tabelează $\tilde{\tilde{M}}(p_0)$, $\tilde{\tilde{M}}(s)$ și $\tilde{\tilde{M}}(p_1)$ corespunzătoare testului $S(b^*,\ a^*)$.

4.2. Acuratețea aproximațiilor lui Wald

În obținerea aproximațiilor lui Wald s-a constatat că acestea vor avea o acuratețe rezonabilă atîta timp cît excesele lui Z_n față de marginile de stopare sînt mici cînd θ este punctul adevărat în Θ. Mai precis,

$$|Q(\theta) - \tilde{Q}(\theta)| \quad \text{și} \quad |M(n;\ \theta) - \tilde{M}(\theta)|$$

pentru orice test $S(b,\ a)$ bazat pe $\{z_i\}$ independente și identic repartizate, sînt mici dacă și numai dacă, pentru $\varepsilon > 0$ mic

$$(72)\quad P(Z_n > b - \varepsilon \mid Z_n \leqslant b,\ \theta) \simeq 1, \quad P(Z_n < a + \varepsilon \mid Z_n \geqslant a,\ \theta) \simeq 1.$$

Scanned with OKEN Scanner

În aceleași condiții, $|M(n;\theta) - \tilde{\tilde{M}}(\theta)|$ este de asemenea mică. Dacă are loc (72), cu

$$b = \ln \frac{\beta}{1-\alpha}, \quad a = \ln \frac{1-\beta}{\alpha}, \quad \theta = \theta_0$$

$S(\ln [\beta/(1-\alpha)], \ln [(1-\beta)/\alpha]$ reprezintă T.S.R.P. U.C.M.E.

După teorema 2, aproximațiile lui Wald devin rezultate exacte dacă pentru $\varepsilon = 0$ inegalitățile din (72) au loc strict. În fapt, acesta este cazul cînd z_i poate lua numai două valori, $\gamma > 0$ și $-\gamma$ astfel încît a/γ și b/γ sînt întregi. Astfel în exemplul 10,

$$\tilde{Q}(p) = Q(p) \quad \text{și} \quad \tilde{M}(p) = \tilde{\tilde{M}}(p) = M(n;p) \quad \text{pentru toți} \quad 0 \leqslant p \leqslant 1$$

dacă și numai dacă

$$p_0 + p_1 = 1.$$

(73)

$$\frac{a}{\ln [(1-p_0)/p_0]} = \text{întreg} > \frac{b}{\ln [(1-p_0)/p_0]} = \text{întreg}.$$

Mai general, are loc

PROPOZIȚIA 1. *Dacă pentru o pereche* (b, a) *fixată, atît* $M(z;\theta)$ *cît și* $D^2(z;\theta)$ *converg, pentru* $\theta \in \Theta$ *dat, către zero, atunci au loc condițiile* (72).

Demonstrație. Pentru orice $\varepsilon > 0$, inegalitatea lui Cebîșev dă

$$P(Z_n > b - \varepsilon | Z_n \leqslant b, \theta) > 1 - \varepsilon^{-1} M(b - Z_n | b - Z_n \geqslant 0; \theta)$$

$$P(Z_n < a + \varepsilon | Z_n \geqslant a, \theta) > 1 - \varepsilon^{-1} M(Z_n - a | Z_n - a \geqslant 0; \theta).$$

Deoarece pentru orice $\theta \in \Theta$ fixat, $P(b < Z_{n-1} < a | \theta) = 1$, avem

$$0 \leqslant M(b - Z_n | b - Z_n \geqslant 0; \theta) \leqslant -\inf_{r>0} M(z + r | z + r \leqslant 0; \theta)$$

(74)

$$0 \leqslant M(Z_n - a | Z_n - a \geqslant 0; \theta) \leqslant \sup_{r>0} M(z - r | z - r \geqslant 0; \theta)$$

Dacă $M(z;\theta) \to 0$ și $D^2(z;\theta) \to 0$ atunci

$$P(|Z| < \delta | \theta) \to 1$$

pentru orice $\delta > 0$ arbitrar, și în consecință membrii drepți din (74) tind la zero. Deci, membrii stîngi din (72) tind către unu, și aproximațiile lui Wald sînt adecvate cu condiția ca atît $|M(z;\theta)|$ cît și $D^2(z;\theta)$ să fie mai mici pentru orice (b, a) arbitrari.

Astfel în exemplul 10 cu $0 < p_0 < p_1 < 1$, găsim

$$M(z;p) \xrightarrow[p_0 \to p_1]{} 0$$

Scanned with OKEN Scanner

și

$$D^2(z\,;\,p) = p(1-p)\left[\ln\frac{p_1(1-p_0)}{p_0(1-p_1)}\right]^2 \to 0$$

pentru toți $0 \leqslant p \leqslant 1$ și prin urmare

$$\tilde{Q}(p) \to Q(p) \quad \text{și} \quad \tilde{\tilde{M}}(p) \to M(n\,;\,p) \quad \text{dacă} \quad p_0 \to p_1.$$

Pe de altă parte, convergența $M(z\,;\,\theta)$ și $D^2(z\,;\,\theta)$ către zero depinde de b sau a în așa mod încît $b - Z_n$ și (sau) $Z_n - a$ iau valori mari la terminare cu probabilitate mare. În astfel de cazuri una sau amîndouă condițiile în (72) nu vor fi satisfăcute și aproximațiile lui Wald nu vor fi adecvate.

Pentru a examina acuratețea aproximațiilor lui Wald, cînd $|M(z\,;\,\theta)|$ și $D^2(z\,;\,\theta)$ pot fi mari, considerăm orice T.S.R.P. $S(b,\ a)$, $b < 0 < a$, pentru proporția binomială și media variabilei normale. Am ales aceste două situații datorită aplicațiilor lor în practică și faptului că sînt posibile rezultate exacte pentru funcțiile lor C.O. și V.M.V.S.

Exemplul 11. Vom exprima $\tilde{Q}(\theta)$ și $\tilde{\tilde{M}}(\theta)$ într-o formă ușor schimbată. În (42) fie

$$(75) \qquad h_a = \frac{-k_1}{m_1+m_2}, \quad h_r = \frac{k_2}{m_1+m_2}, \quad s = \frac{m_2}{m_1+m_2},$$

unde k_1, k_2, m_1 și m_2 sînt întregi pozitivi. Atunci inegalitatea critică poate fi exprimată în funcție de $(k_1,\ k_2,\ m_1,\ m_2)$ și

$$a = \frac{k_2}{m_1}\ln\frac{p_1}{p_0}, \quad b = -\frac{k_1}{m_1}\ln\frac{p_1}{p_0}, \quad \ln\frac{1-p_0}{1-p_1} = \frac{m_2}{m_1}\ln\frac{p_1}{p_0}$$

Aproximațiile lui Wald (exemplul 10) pot fi exprimate ca

$$\tilde{Q}(p) = \begin{cases} \dfrac{e^{k_2 t(p)/m_1} - 1}{e^{k_2 t(p)/m_1} - e^{-k_1 t(p)/m_1}}, & p \neq \dfrac{m_2}{m_1+m_2} \\ \dfrac{k_2}{k_1+k_2}, & p = \dfrac{m_2}{m_1+m_2} \end{cases}$$

$$\tilde{\tilde{M}}(p) = \begin{cases} \dfrac{k_2 - (k_1+k_2)\tilde{Q}(p)}{(m_1+m_2)p - m_2}, & p \neq \dfrac{m_2}{m_1+m_2} \\ \dfrac{k_1 k_2}{m_1 m_2}, & p = \dfrac{m_2}{m_1+m_2} \end{cases}$$

unde $t(p) = h(p)\ln(p_1/p_0)$ este rădăcina nenulă a ecuației

$$pe^{t(p)} + (1-p)e^{-m_2 t(p)/m_1} = 1.$$

Scanned with OKEN Scanner

Exemplul 12. Considerăm T.S.R.P. pentru (47) definit în (48). Dacă

$$\mu \neq s = \frac{\mu_0 + \mu_1}{2}$$

atunci $\tilde{Q}(\mu)$, pentru $-\infty < \mu < \infty$, este dată de (66) în care $h(\mu)$ este definit în (50). Deoarece $h(\mu)$ este continuă, valoarea lui $Q(s)$ poate fi obținută din (67). În continuare, dacă $\mu \neq s$ atunci $\tilde{\tilde{M}}(\mu)$, pentru $-\infty < \mu < \infty$, este dată de (69) unde $\tilde{M}(z\,;\,\mu)$ este calculată în exemplul 3). În final, $M(s)$ este ca în (70) cu $M(z^2\,;\,s) = (\mu_1 - \mu_0)^2/\sigma^2$. Din (48) se observă că

$$Q(-\infty) = 1, \quad Q(\infty) = 0$$

și deoarece se cunoaște înaintea extragerii oricărei observații că

$$P(x_1 \leqslant h_a + s \mid \mu = -\infty) = 1 \quad \text{și} \quad P(x_1 \geqslant h_r + s \mid \mu = \infty) = 1,$$

$$M(n\,;\,-\infty) = M(n\,;\,\infty) = 0.$$

Pentru diferite combinații de $((\mu_1 - \mu_0)/\sigma,\ \alpha,\ \beta)$. Freeman (1944) tabelează $\tilde{\tilde{M}}(\mu_0)$, $\tilde{\tilde{M}}(s)$ și $\tilde{\tilde{M}}(\mu_1)$ pentru testul $S(b^*, a^*)$. Dacă în (48) punem

$$h_n = b'\sigma, \quad h_r = a'\sigma \tag{76}$$

inegalitatea critică poate fi exprimată în termeni de $(b',\ a',\ \sigma,\ s)$ și aproximațiile lui Wald sînt

$$\tilde{Q}(\mu) = \begin{cases} \dfrac{e^{-2a'\theta} - 1}{e^{-2a'\theta} - e^{-2b'\theta}}, & \theta \neq 0 \\ \dfrac{a'}{a' - b'}, & \theta = 0 \end{cases}$$

$$\tilde{\tilde{M}}(\mu) = \begin{cases} a' - (a' - b')\tilde{Q}(\mu), & \theta \neq 0 \\ -a'b', & \theta = 0 \end{cases}$$

unde

$$\theta = \frac{2\mu - \mu_0 - \mu_1}{2\sigma}.$$

T.S.R.P. pentru orice pereche $(b',\ a')$ dată este aplicabil la problema $H_0 : \mu = \mu_0$ (sau $\leqslant \mu_0$) față de $H_1 : \mu = \mu_1$ (sau $\geqslant \mu_1$) pentru o infinitate de perechi de valori $(\mu_0,\ \mu_1)$ cu diferite probabilități ale erorilor.

4.3. Aproximațiile Page (1954) — Kemp (1958)

Considerăm orice T.S.R.P. $S(b,\ a)$, $b < 0 < a$ pentru (2), bazat pe variabilele $\{z_i\}$ independente și identic repartizate. Aproximațiile lui Wald, $\tilde{Q}(\theta)$ și $\tilde{\tilde{M}}(\theta)$ ale funcțiilor C.O. și V.M.V.S. au fost prezentate în

Scanned with OKEN Scanner

4.1. Pentru cazurile speciale cînd $\{z_i\}$ sînt variabile aleatoare continui cu densitatea de repartiție comună $g(z\,;\,\theta)$ este posibil să se obțină îmbunătățiri ale acestor aproximații. Variabila aleatoare z se va referi la un z_i arbitrar.

Considerăm mai întîi funcția C.O. Formula (66) se obține rezolvînd

$$q(y) = \int_{-\infty}^{-y} g(z\,;\,\theta)\,dz + \int_{0}^{a-b} g(z-y\,;\,\theta)q(z)\,dz \tag{77}$$

cu condițiile de frontieră $q(0) \simeq 1$ și $q(a-b) \simeq 0$ și înlocuind $y = -b$. Adică $\tilde{Q}(\theta)$ este echivalentă cu

$$q(y) = c_1 + c_2\,e^{yh(\theta)}, \quad M(n\,;\,\theta) \neq 0 \tag{78}$$

în $y = -b$, unde $h(\theta) \neq 0$ este soluția (35) și constantele (c_1, c_2) sînt determinate de soluțiile lui $q(0) = 1$ și $q(a-b) = 0$. Deoarece orice T.S.R.P. prin ipoteză, pornește cu o observație nu trebuie să se termine cu acceptarea ipotezei H_0 cînd $y = 0$ și cu respingerea ipotezei H_0 cînd $y = a - b$. În consecință, avem strict $q(0) < 1$ și $q(a-b) > 0$, cu toate că pentru $|M(n\,;\,\theta)|$ și $D^2(z\,;\,\theta)$ mici inegalitățile stricte pot fi înlocuite prin egalități aproximative. Atunci, dacă se estimează $q(0)$ și $q(a-b)$ și din

$$c_1 + c_2 = q(0), \quad c_1 + c_2\,e^{(a-b)h(\theta)} = q(a-b) \tag{79}$$

se determină (c_1, c_2), expresia rezultată (78) în $y = -b$ va fi sigur o îmbunătățire pentru $\tilde{Q}(\theta)$. Pentru a estima $q(0)$ și $q(a-b)$ punem, mai întîi, în (78) $y = z$ și substituim această valoare a lui $q(z)$ cu acelea ale lui (c_1, c_2) din (79) în a doua integrală din (77). În forma rezultată a lui (77) punem succesiv $y = 0$ și $y = a - b$, în acest fel obținînd două ecuații lineare pentru $q(0)$ și $q(a-b)$. Înlocuind aceste soluții în (78) cu $y = -b$ se obține

$$Q(\theta) \simeq \tilde{Q}^*(\theta) = [q(0) - q(a-b)]\tilde{Q}(\theta) + q(a-b), \quad M(z\,;\,\theta) \neq 0 \tag{80}$$

unde

$$q(0) = \frac{k_2 s_2 - k_4 s_1}{k_2 k_3 - k_1 k_4}, \quad q(a-b) = \frac{k_3 s_1 - k_1 s_2}{k_2 k_3 - k_1 k_4}, \tag{81}$$

$$\begin{aligned}
s_1 &= [1 - e^{(a-b)h(\theta)}]G(0\,;\,\theta), \quad s_2 = [1 - e^{(a-b)h(\theta)}]G(b-a\,;\,\theta)\\
k_1 &= 1 - M_1(\theta) + [G(a-b\,;\,\theta) - G(0\,;\,\theta) - 1]\,e^{(a-b)h(\theta)},\\
k_2 &= G(0\,;\,\theta) - G(a-b\,;\,\theta) + M_1(\theta),\\
k_3 &= [G(0\,;\,\theta) - G(b-a\,;\,\theta) - M_2(\theta)]\,e^{(a-b)h(\theta)},\\
k_4 &= 1 - G(0\,;\,\theta) + G(b-a\,;\,\theta) + [M_2(\theta) - 1]\,e^{(a-b)h(\theta)},\\
M_1(\theta) &= \int_0^{a-b} e^{zh(\theta)}\,g(z\,;\,\theta)\,dz, \quad M_2(\theta) = \int_{b-a}^{0} e^{zh(\theta)}\,g(z\,;\,\theta)\,dz
\end{aligned}$$

$$G(z\,;\,\theta) = \int_{-\infty}^{z} g(u\,;\,\theta)\,du.$$

Scanned with OKEN Scanner

Dacă $M(z\,;\,\theta') = 0$ pentru anumiţi $\theta' \in \Theta$ reali şi $h(\theta)$ este continuă în vecinătatea lui $\theta = \theta'$, atunci $\widetilde{Q}^*(\theta')$ poate fi obţinută din (80) prin luarea limitei cînd $\theta \to \theta'$.

Funcţia V.M.V.S. poate fi tratată similar. Formula (69) cu condiţia (66) este obţinută rezolvînd

$$e(y) = 1 + \int_0^{a-b} g(z - y\,;\,\theta)e(z)\,dz \tag{82}$$

cu condiţiile frontieră $e(0) \simeq 0$ şi $e(a-b) \simeq 0$ şi atunci înlocuind $y = -b$. Adică $\widetilde{\widetilde{M}}(\theta)$ este echivalentă cu

$$e(y) = \frac{c_1' + c_2' e^{yh(\theta)} - y}{M(z\,;\,\theta)}, \quad M(n\,;\,\theta) \neq 0 \tag{83}$$

în $y = -b$, unde constantele (c_1', c_2') sînt determinate de soluţiile ecuaţiilor $e(0) = 0$ şi $e(a-b) = 0$. Din (82) şi (83) folosind argumentele pentru $\widetilde{Q}^*(\theta)$, putem estima $e(0) > 0$ şi $e(a-b) > 0$ adevărate. Obţinem pentru $\widetilde{\widetilde{M}}(\theta)$ următoarea îmbunătăţire

$$M(n\,;\,\theta) \simeq M^*(\theta) = \widetilde{\widetilde{M}}(\theta) +$$

$$+ \frac{[e^{ah(\theta)} - 1]e(0) + [1 - e^{bh(\theta)}]e(a-b)}{e^{ah(\theta)} - e^{bh(\theta)}}, \quad M(z\,;\,\theta) \neq 0, \tag{84}$$

unde

$$e(0) = \frac{k_2 s_2' - k_4 s_1'}{k_2 k_3 - k_1 k_4}, \quad e(a-b) = \frac{k_3 s_1' - k_1 s_2'}{k_2 k_3 - k_1 k_4}, \tag{85}$$

$$s_1' = 1 - e^{(a-b)h(\theta)} - \frac{1}{M(z\,;\,\theta)}\{(a-b)k_2 + [1 - e^{(a-b)h(\theta)}]M_1'(\theta)\},$$

$$s_2' = 1 - e^{(a-b)h(\theta)} + \frac{1}{M(z\,;\,\theta)}\{(a-b)k_3 - [1 - e^{(a-b)h(\theta)}]M_2'(\theta)\},$$

$$M_1'(\theta) = \int_0^{a-b} zg(z\,;\,\theta)\,dz, \quad M_2'(\theta) = \int_{b-a}^{0} zg(z,\ \theta)\,dz,$$

şi (k_1, k_2, k_3, k_4) sînt definiţi în (81). Dacă $M(z\,;\,\theta') = 0$ pentru anumiţi $\theta' \in \Theta$ reali, atunci $\widetilde{\widetilde{M}}^*(\theta)$ este dată de

$$e(y) = \frac{c_1'' + c_2'' e^{yh(\theta)} - y^2}{M(z^2\,;\,\theta)} \tag{86}$$

în $y = -b$, cînd $h(\theta) \to 0$, unde constantele (c_1'', c_2'') sînt determinate de

$$c_1'' + c_2'' = e(0),$$

$$c_1'' + c_2'' e^{(a-b)h(\theta')} = (a-b)^2 + e(a-b)M(z^2,\ \theta')$$

$e(0) > 0$ şi $e(a-b) > 0$ pot fi estimaţi din (82) şi (86).

Scanned with OKEN Scanner

DEFINIȚIA 7. $\widetilde{Q}^*(\theta)$ și $\widetilde{\widetilde{M}}^*(\theta)$ poartă numele de aproximațiile lui Page-Kemp pentru funcțiile C.O. și V.M.V.S.

Observații i) Pentru $q(0) = 1$, $q(a - b) = 0 = e(0) = e(a - b)$, formulele anterioare se reduc la $\widetilde{Q}(\theta)$ și respectiv $\widetilde{\widetilde{M}}(\theta)$.

ii) Avem o creștere pronunțată a acurateții acestor aproximații cînd $|M(z; \theta)|$ și $D^2(z; \theta)$ sînt mari. De obicei, dacă se rezolvă

$$\widetilde{Q}^*(\theta_0) = 1 - \alpha \quad \text{și} \quad \widetilde{Q}^*(\theta_1) = \beta$$

pentru b și a se obțin valori mai precise pentru (b^*, a^*) ale T.S.R.P. U.C.M.E. decît acelea din (18).

4.4. Aproximațiile Kemp

Considerăm suma

$$z_n = y + \sum_{i=1}^{n} x_i^*,$$

unde: $-x_i^*$ sînt independente și identic repartizate cu media finită și dispersia nenulă,

— n este un întreg și

— y este un întreg care aparține intervalului închis $[0, h]$.

Fie $f(x^*, \theta)$ $[F(x^*, \theta)]$ densitatea [funcția] de repartiție a variabilei x_i^* și h o constantă pozitivă.

Presupunem că $f(x^*, \theta)$ este continuă în x cu $f(0, \theta) > 0$ și considerăm testul secvențial care continuă atîta timp cît z_n aparține intervalului deschis $(0, h)$.

Fie $N(\geqslant 1)$ valoarea lui n pentru care pentru prima oară $z_n \notin (0, h)$ și $P(y, \theta) = P_0(y)$ probabilitatea ca $z_N \in (-\infty, 0]$ astfel că probabilitatea ca $z_N \in [h, \infty)$ va fi $1 - P(y, 0) = P_h(y)$. Vom folosi notația $M\{\alpha(z_N; N); y, \theta\}$ pentru media necondiționată a funcției $\alpha(z_N; N)$ pentru y dat și $M\{\alpha(z_N; \theta); y, \theta | C\}$ pentru media funcției $\alpha(z_N; N)$ supusă condiției C. Notăm V.M.V.S. a testului prin $M\{N; y, \theta\}$ și V.M.V.S. a testului condiționată de $z_N \in (-\infty, 0]$ prin $M\{N; y; \theta | z_N \leqslant 0\}$.

Fie $\psi(t, \theta)$ funcția generatoare de momente a variabilei x_i^* și presupunem că satisface următoarele condiții necesare ca ecuația $\psi(t, \theta) = 1$ să aibă în afară de $t = 0$ și rădăcina reală finită și nenulă $t = t_0$ (De obicei se notează aceste rădăcini prin λ astfel că $\lambda = 0$ sau t_0).

a) integrala ce definește $\psi(t, \theta)$ este absolut convergentă

b) $\psi(t, \theta)$ și primele sale două derivate în raport cu t există pentru toți t finiți și aceste derivate pot fi obținute prin derivate sub semnul integrală.

c) media și dispersia variabilei x_i^* nu sînt egale cu zero.

Dacă notăm prin $G_n(z_n, y)$ funcția de repartiție a variabilei z_n, avem

$$G_n(z_n, y) = \int_0^h G_{n-1}(z_{n-1}; y)\, dF(z_n - z_{n-1}; \theta).$$

Scanned with OKEN Scanner

Kemp (1967) obține

$$P_0(y)M\{e^{\omega z_N};\ y \mid z_N \leqslant 0\} =$$

$$= \int_{-\infty}^{0} e^{\omega z_1}\, dF(z_1 - y;\ \theta) + \sum_{N=2}^{\infty} \int_{-\infty}^{0} \int_{0}^{h} e^{\omega z_N}\, dF(u - y;\ \theta)\, dG_{N-1}(z_N,\ u) =$$

$$= \int_{-\infty}^{0} e^{\omega z_1}\, dF(z_1 - y;\ \theta) + \int_{0}^{h} \sum_{N=2}^{\infty} \int_{-\infty}^{0} e^{\omega z_N}\, dG_{N-1}(z_N;\ u)\, dF(u - y;\ \theta),$$

astfel că

$$P_0(y)M\{e^{\omega z_N};\ y \mid z_N \leqslant 0\} =$$

$$= \int_{-\infty}^{0} e^{\omega z_1}\, dF(z_1 - y;\ \theta) + \int_{0}^{h} P_0(u)M\{e^{\omega z_N};\ u \mid z_N \leqslant 0\}\, dF(u - y;\ \theta).$$

Dacă considerăm

$$\lim_{t \searrow 0} P_0(y)M\{e^{tz_N}; y \mid z_N \leqslant 0\}$$

cînd t_0 este pozitiv sau

$$\lim_{t \nearrow 0} P_0(y)M\{e^{tz_N};\ y \mid z \leqslant 0\}$$

cînd t_0 este negativ obținem (Kemp (1958))

$$P_0(y) = F(-y;\ \theta) + \int_{0}^{h} P_0(u)\, dF(u - y;\ \theta).$$

Din aceste două limite, după diferențiere în raport cu ω, obținem (Kemp (1967))

$$P_0(y)M\{z_N;\ y \mid z_N \leqslant 0\} = \int_{-\infty}^{0} z_1\, dF(z_1 - y;\ \theta) +$$

$$+ \int_{0}^{h} P_0(u)M\{z_N;\ u \mid z_N \leqslant 0\}\, dF(u - y;\ \theta)$$

și analog

$$P_h(y)M\{z_N;\ y \mid z_N \geqslant h\} = \int_{h}^{\infty} z_1\, dF(z_1 - y;\ \theta) +$$

$$+ \int_{0}^{h} P_h(u)M\{z_N;\ u \mid z_N \geqslant h\} dF(u - y;\ \theta).$$

Pentru media $M\{z_N;\ y\}$ obținem

$$M(z_N;\ y) = y + \theta - \int_{0}^{h} z_1\, dF(z_1 - y;\ \theta) + \int_{0}^{h} M\{z_N;\ u\}\, dF(u - y;\ \theta).$$

Scanned with OKEN Scanner

De asemenea avem

$$P_0(y)M[e^{\omega z_N}\{\psi(\omega)\}^{-N};\ y\,|\,z_N \leqslant 0] = \{\psi(\omega)\}^{-1}\Big[\int_{-\infty}^{h} e^{\omega z_1}\,dF(z_1 - y;\ \theta) +$$

$$+\int_0^h P_0(u)M[e^{\omega z_N}\{\psi(\omega)\}^{-N};\ u\,|\,z_N \leqslant 0]\,dF(u - y;\ \theta)\Big]$$

de unde, prin diferențiere și pentru $\omega = 0$

$$P_0(y)M\{N;\ y\,|\,z_N \leqslant 0\} = P_0(y) + \int_0^h P_0(u)M\{N;\ u\,|\,z_N \leqslant 0\}\,dF(u - y;\ \theta).$$

Similar

$$P_h(y)M\{N;\ y\,|\,z_N \geqslant h\} = P_h(y) + \int_0^h P_h(u)M\{N;\ u\,|\,z_N \geqslant h\}\,dF(u - y;\ \theta).$$

Adunînd ultimile două relații găsim

$$M\{N;\ y\} = 1 + \int_0^h M\{N;\ u\}\,dF(u - y;\ \theta).$$

Cu aceste rezultate Kemp (1967) obține

$$P_0^*(y) \leqslant P_0(y) \leqslant P_0^{**}(y),$$

unde

$$P_0^*(y) = \Big\{M_h(Y_m)F(h - y;\ \theta) - M_0(y_m)F(-y,\ \theta) -$$

$$-\int_0^h e^{t_0 u}\,dF(u - y;\ \theta)\Big\} \Big/ \{M_h(Y_m) - M_0(y_m)\},$$

$$P_0^{**}(y) = \Big\{M_h(Y_M)F(h - y;\ \theta) - M_0(y_M)F(-y;\ \theta) -$$

$$-\int_0^h e^{t_0 u}\,dF(u - y;\ \theta)\Big\} \Big/ \{M_h(Y_M) - M_0(y_M)\}$$

în cazul în care nu este posibilă o expresie formală exactă pentru $P_0(y)$. Am notat prin y_M și y_m valorile lui y în care $M\{e^{t_0 z_N};\ y\,|\,z \leqslant 0\}$ ia valoarea maximă respectiv minimă și prin Y_M și Y_m valorile corespunzătoare pentru $M\{e^{t_0 z_N};\ y\,|\,z_N \geqslant h\}$.
Pentru $M\{N;\ y\}$, Kemp (1967) obține

$$M^*\{N;\ y\} \leqslant M\{N;\ y\} \leqslant M^{**}\{N;\ y\},$$

Scanned with OKEN Scanner

unde

$$M^*\{N;\ y\} = 1 + \Big[\{P_0^*(y) - F(-y;\ \theta)\}\bar{M}_0(\bar{y}_M) +$$

$$+ \{F(h - y;\ \theta) - P_0^*(y)\}\bar{M}_h(\bar{Y}_M) - \int_0^h z\, dF(z - y;\ \theta)\Big] \Big/ M(x_t;\ \theta),$$

$$M^{**}\{N;\ y\} = 1 + \Big[\{P_0^{**}(y) - F(-y;\ \theta)\}\bar{M}_0(\bar{y}_m) +$$

$$+ \{F(h - y;\ \theta) - P_0^*(y)\}\bar{M}_h(\bar{Y}_m) - \int_0^h z\, dF(z - y;\ \theta)\Big] \Big/ M(x_t;\ \theta),$$

cu

$$\bar{M}_0(\bar{y}_m) = \int_{-\infty}^{0} z\, dF(z - \bar{y}_m;\ \theta)/F(-\bar{y}_m;\ \theta);$$

$$\bar{M}_0(\bar{y}_M) = \int_{-\infty}^{0} z\, dF(z - \bar{y}_M;\ \theta)/F(-\bar{y}_M;\ \theta)$$

și

$$\bar{M}_h(\bar{Y}_m) = \int_h^{\infty} z\, dF(z - \bar{Y}_m;\ \theta)/\{1 - F(h - \bar{Y}_m;\ \theta)\};$$

$$\bar{M}_h(\bar{Y}_M) = \int_h^{\infty} z\, dF(z - \bar{Y}_M;\ \theta)/\{1 - F(h - \bar{Y}_M;\ \theta)\}.$$

Exemplul 13. Dacă $x_t \sim N(\theta, 1)$, atunci cînd θ este negativ putem pune

$$y_m = Y_m = \bar{y}_m = \bar{Y}_m = 0$$

și

$$y_M = Y_M = \bar{y}_M = \bar{Y}_M = h.$$

Dacă luăm $R(X) = \varphi(X)/\Phi(X)$, $\varphi(X) = (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \exp\left(-\frac{1}{2}x^2\right)$, atunci

$$P_0^*(y) = [\xi\Phi(h - y - \theta) - \mu\Phi(-y - \theta) - e^{-2\theta y}\{\Phi(h - y + \theta) -$$

$$- \Phi(-y + \theta)\}]/(\xi - \mu)$$

și

$$P_0^{**}(y) = [\xi\Phi(h - y - \theta) - \mu\Phi(-y - \theta) - \xi\mu\, e^{2\theta(h-y)}\{\Phi(h - y + \theta) -$$

$$- \Phi(-y + \theta)\}]/(\xi - \mu),$$

unde $\xi = \Phi(-h - \theta)/\Phi(\theta - h)$ și $\mu = \Phi(\theta)/\Phi(-\theta)$. Pentru V.M.V.S.

Scanned with OKEN Scanner

scriem

$$\rho(y;\ h,\ \theta) = \varphi(-y - \theta) - \varphi(h - y - \theta) +$$
$$+ (y + \theta)\{\Phi(h - y - \theta) - \Phi(-y - \theta)\}$$

şi obţinem

$$M^*(N,\ y) = 1 - 0^{-1}[\rho(y;\ h,\ \theta) - \{P_0^*(y) -$$
$$- \Phi(-y - \theta)\}\{h + \theta - R(-h - \theta)\} -$$
$$- \{\Phi(h - y - \theta) - P_0^*(y)\}\{h + \theta + R(\theta)\}]$$

şi

$$M^{**}(N;y) = 1 - \theta^{-1}[\rho(y;\ h,\ \theta) - \{P_0^{**}(y) -$$
$$- \Phi(-y - \theta)\}\{\theta - R(-\theta)\} -$$
$$- \{\Phi(h - y - \theta) - P_0^{**}(y)\}\{\theta + R(\theta - h)\}].$$

Exemplul 14. Reluăm exemplul 3. Avem

$$y = \{\sigma^2/(\mu_0 - \mu_1)\log b$$

$$x_i^* = x_i - \frac{1}{2}(\mu_0 + \mu_1)$$

şi

$$h = \{\sigma^2/(\mu_1 - \mu_0)\}\log(a/b).$$

Presupunem $\sigma = 1$ şi notăm probabilitatea de acceptare a ipotezei H_0 prin $P\{y;\ \theta\}$. Cu aceste notaţii, din consideraţii de simetrie, avem

$P_0\{y;\ -\theta\} = 1 - P_0\{h - y;\ \theta\}$ şi $M\{N;\ y,\ \theta\} = M\{N;\ h - y,\ -\theta\}$.

Avem

$$P\ (\text{accept } H_1 \mid H_0 \text{ adev}) = 1 - P_0\left\{y;\ \frac{1}{2}(\mu_0 - \mu_1)\right\}$$

şi

$$P\ (\text{accept } H_0 \mid H_1 \text{ adev}) = 1 - P_0\left\{h - y;\ \frac{1}{2}(\mu_0 - \mu_1)\right\}.$$

Folosind rezultatele obţinute în 4.4. putem obţine limitele între care variază.

$$P\ (\text{accept } H_1 \mid H_0 \text{ adev}) \text{ şi } P\ (\text{accept } H_0 \mid H_1 \text{ adev}).$$

De exemplu dacă luăm

$$P\ (\text{acc. } H_1 \mid H_0) = 0{,}01 \text{ şi } P\ (\text{acc. } H_0 \mid H_1) = 0{,}05$$

Scanned with OKEN Scanner

din procedeul lui Wald găsim $a = 95$ şi $b = 0{,}0505$. Valorile lui h şi y corespunzătoare acestora sînt

$$h = 7{,}54/(\mu_1 - \mu_0) \quad \text{şi} \quad y = 3/(\mu_1 - \mu_0).$$

Dacă H_0 este că $\mu_0 = -0{,}75$ şi H_1 că $\mu_1 = 0{,}75$ obţinem (din 4.4.) $0{,}0075 > P$ (acc. $H_1 | H_0) > 0{,}0029$ şi $0{,}0362 > P$ (acc. $H_0 | H_1) > 0{,}0159$. Dacă presupunem că în toate diferenţialele de forma $\mathrm{d}F$ $(\gamma - \beta)$ prima variabilă din paranteză este variabila de integrare, avem

$$M\{\mathrm{e}^{\lambda z_N};\ y,\ \theta\} = \mathrm{e}^{\lambda y};$$

$$M\{z_N\,\mathrm{e}^{\lambda z_N};\ y,\ \theta\} - \left\{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,[\psi(t,\theta)]_{t=\lambda}\right\} M\{N\,\mathrm{e}^{\lambda z_N};\ y,\ \theta\} = y\,\mathrm{e}^{\lambda y};$$

$$P(y,\ \theta)M\{\mathrm{e}^{\lambda z_N};\ y,\ \theta \mid z_N \leqslant 0\} =$$

(87)

$$= \int_{-\infty}^{0} \mathrm{e}^{\lambda\omega}\,\mathrm{d}F(\omega - y,\ \theta) + \int_0^h P(\omega,\theta)M\{\mathrm{e}^{\lambda z_N};\ \omega,\ \theta \mid z_N \leqslant 0\}\,\mathrm{d}F(\omega - y,\ \theta);$$

$$[1 - P(y,\ \theta)]M\{\mathrm{e}^{\lambda z_N};\ y,\ \theta \mid z_N \geqslant h\} =$$

(87a)

$$= \int_h^{\infty} \mathrm{e}^{\lambda\omega}\,\mathrm{d}F(\omega - y,\ \theta) + \int_0^h [1 - P(\omega,\ \theta)]M\{\mathrm{e}^{\lambda z_N};\ \omega,\ \theta \mid z_N \geqslant h\}\mathrm{d}F(\omega - y,\ \theta)$$

(88) $$P(y,\ \theta)M\{z_N;\ y,\ \theta \mid z_N \leqslant 0\} =$$

$$= \int_{-\infty}^{0} \omega\,\mathrm{d}F(\omega - y,\ \theta) + \int_0^h P(\omega,\ \theta)\,M\{z_N;\ \omega,\ \theta \mid z_N \leqslant 0\}\,\mathrm{d}F(\omega - y,\ \theta);$$

(88a) $$[1 - P(y,\ \theta)]M\{z_N;\ y,\ \theta \mid z_N \geqslant h\} =$$

$$= \int_h^{\infty} \omega\,\mathrm{d}F(\omega - y,\ \theta) + \int_0^h [1 - P(\omega,\ \theta)]M\{z_N;\ \omega,\ \theta \mid z_N \geqslant h\}\,\mathrm{d}F(\omega - y,\ \theta);$$

$$M\{N;\ y,\ \theta\} = 1 + \int_0^h M\{N;\ \omega,\ \theta\}\,\mathrm{d}F(\omega - y,\ \theta).$$

Kemp (1970) folosind substituţii succesive în ecuaţii obţinute din acestea dă expresii care converg asimptotic către valorile adevărate ale cantităţilor $P(y,\ \theta)$ şi $M(N;\ y,\ \theta)$.
Kemp porneşte de la ecuaţia

(89) $$\tau(y,\ \theta) = g(y,\ \theta) + \int_0^h \tau(\omega,\ \theta)\,\mathrm{d}F(\omega - y,\ \theta)$$

unde $g(y,\ \theta)$ şi $\tau(y,\ \theta)$ sînt funcţii continui de y pentru $y \in [0,\ h]$ şi mărginite.

Scanned with OKEN Scanner

Kemp (1970) găsește că

$$P(y,\ \theta) \geqslant \frac{M_m^h(r,\ \theta) - e^{t_0 y}}{M_m^h(r,\ \theta) - M_m^0(r,\ \theta)} \quad \text{și}$$

(90)

$$P(y,\ \theta) \leqslant \frac{M_M^h(r,\ \theta) - e^{t_0 y}}{M_M^h(r,\ \theta) - M_M^0(r,\ \theta)}$$

unde : — pentru $y \in [0,\ h]$, $M_M^h(r,\ \theta)$ și $M_m^h(r,\ \theta)$ sînt maximul și respectiv minimul valorilor funcției $M^h(y,\ r,\ \theta)$

$$M^h(y_0\,;\ r,\ \theta) = \sum_{k=1}^{r} \int_{I_k^*} e^{t_0 y_k} \prod_{i=1}^{k} dF(y_i - y_{i-1},\ \theta) \Big/ \sum_{k=1}^{r} \int_{I_k^*} \prod_{i=1}^{k} dF(y_i - y_{i-1},\ \theta),$$

(91)

I_r^* este intervalul din E_r definit de $0 \leqslant y_{r-1} \leqslant h,\ h \leqslant y_r \leqslant \infty$, $(y_1, y_2, \ldots$ $\ldots, y_r)$ fiind un punct în E^r.
Cu notația

$$P_l^{1,r}(y_0,\ \theta) =$$

(92)

$$= \sum_{k=1}^{r} \int_{\tilde{I}_k} \prod_{i=1}^{k} dF(y_i - y_{i-1},\ \theta) + \int_{I_r} \left[\frac{M_m^h(r,\ \theta) - e^{t_0 y_r}}{M_m^h(r,\ \theta) - M_m^0(r,\ \theta)} \right] \prod_{i=1}^{r} dF(y_i - y_{i-1},\ \theta)$$

unde — I_r este un interval închis în spațiul euclidian r-dimensional E^r definit de mulțimea de inegalități

$$0 \leqslant y_k \leqslant h \quad \text{cu} \quad 1 \leqslant k \leqslant r,$$

$(y_1, y_2, \ldots, y_r)$ fiind un punct în E^r și
— $\tilde{I}_r$ este un interval din E^r definit de mulțimea de inegalități

$$0 \leqslant y_{r-1} \leqslant h \quad \text{și} \quad -\infty \leqslant y_r \leqslant 0.$$

Kemp (1970) găsește că

$$P_u^{n_1, r_1}(y,\ \theta) \geqslant P_u^{n_2, r_2}(y,\ \theta) \geqslant P(y,\ \theta)$$

cînd

$$P_u^{0, r_1}(y,\ \theta) \geqslant P_u^{0, r_2}(y,\ \theta) \geqslant P(y,\ \theta) \text{ și } n_1 r_1 = n_2 r_2 = nr.$$

$P_u^{n_2, r_2}(y,\ \theta)$ și $P_l^{n_2, r_2}(y,\ \theta)$ pot fi mai apropiate de $P(y,\ \theta)$ decît $P_u^{n_1, r_1}(y,\ \theta)$ și $P_l^{n_1, r_1}(y,\ \theta)$ cînd t_0 este pozitiv dacă

(93) $$[M_m^h(r_2,\ \theta) - M_m^0(r_2,\ \theta)] - [M_m^h(r_1,\ \theta) - M_m^0(r_1,\ \theta)] \geqslant$$

$$\geqslant M_m^0(r_1,\ \theta) M_m^h(r_2,\ \theta) - M_m^0(r_2,\ \theta) M_m^h(r_1,\ \theta)$$

Scanned with OKEN Scanner

și

$$(94)\quad [M_M^h(r_1,\ \theta) - M_M^0(r_1,\ \theta)] - [M_M^h(r_2,\ \theta) - M_M^0(r_2,\ \theta)] \geqslant$$

$$\geqslant M_M^0(r_2,\ \theta)M_M^h(r_1,\ \theta) - M_M^h(r_2,\ \theta)M_M^0(r_1,\ \theta).$$

Fie $\bar{y}_m$, $\bar{y}_M$, $\bar{Y}_m$ și $\bar{Y}_M$ valorile lui y pentru care mediile condiționate $M\{z_N;\ y,\ \theta \mid z_N \leqslant 0\}$ și respectiv $M\{z_N;\ y,\ \theta \mid z_N \geqslant h\}$ iau valorile minime și maxime. Din (88) găsim că

$$\bar{M}_0\{\bar{y}_M;\ r,\ \theta\} \geqslant M\{z_N;\ y_0,\ \theta \mid z_N \leqslant 0\} \geqslant \bar{M}_0(\bar{y}_m;\ r,\ \theta)$$

cînd $y_0 \in [0,\ h]$ unde

$$\bar{M}^0\{y_0;\ r,\ \theta\} = \sum_{k=1}^{r} \int_{\bar{I}_k} y_k \prod_{i=1}^{k} dF(y_i - y_{i-1},\ \theta) \Big/ \sum_{k=1}^{r} \int_{\bar{I}_k} \prod_{i=1}^{k} dF(y_i - y_{i-1},\ \theta)$$

(95)

în timp ce din (88a)

$$\bar{M}^h\{\bar{Y}_M;\ r,\ \theta\} \geqslant M\{z_N;\ y_0,\ \theta \mid z_N \geqslant h\} \geqslant \bar{M}^h\{\bar{Y}_m;\ r,\ \theta\},$$

cu

$$\bar{M}^h\{y_0;\ r,\ \theta\} = \sum_{k=1}^{r} \int_{I_k^*} y_k \prod_{i=1}^{k} dF(y_i - y_{i-1},\ \theta) \Big/ \sum_{k=1}^{r} \int_{I_k^*} \prod_{i=1}^{k} dF(y_i - y_{i-1},\ \theta).$$

(96)

Fie $\bar{M}_M^0(r,\ \theta)$, $\bar{M}_m^0(r,\ \theta)$, $\bar{M}_M^h(r,\ \theta)$ și $\bar{M}_m^h(r,\ \theta)$ valorile maxime și minime ale funcțiilor $\bar{M}^0\{y_0;\ r,\ \theta\}$ și $\bar{M}^h\{y_0;\ r,\ \theta\}$ pentru toți $y \in [0,\ h]$. Kemp (1970) generează șirul de margini $M_u^{n,r}\{N;\ y,\ \theta\}$ și $M_l^{n,r}\{N;\ y,\ \theta\}$ dacă

$$(97)\quad M_l^{0,r}\{N;\ y,\ \theta\} = \frac{P_u^{0,r}(y,\ \theta)\bar{M}_m^0(r,\ \theta) + [1 - P_u^{0,r}(y,\ \theta)]\bar{M}_m^h(r,\ \theta) - y}{M(x,\ \theta)}$$

și

$$(98)\quad M_u^{0,r}\{N;\ y,\ \theta\} = \frac{P_l^{0,r}(y,\ \theta)\bar{M}_M^0(r,\ \theta) + [1 - P_l^{0,r}(y,\ \theta)]\bar{M}_M^h(r,\ \theta) - y}{M(x,\ \theta)}.$$

4.5. Identitatea fundamentală

Vom obține un rezultat important, cunoscut sub numele de identitatea fundamentală și care formează baza unor margini pentru funcțiile C.O. și V.M.V.S. ale T.S.R.P.

TEOREMA 8. (Wald (1947)). *Fie $S(b,\ a)$ orice T.S.R.P. pentru $H_0: \theta = \theta_0$ față de $H_1: \theta = \theta_1$ bazat pe variabilele $\{z_i\}$ independente și identic repartizate care, pentru un $\theta \in \Theta$ dat, satisfac condițiile lemei 2. Atunci pentru fiecare h real, are loc identitatea:*

$$(99)\qquad M(e^{hz_n}[\varphi(h)]^{-n};\ \theta) = 1.$$

Scanned with OKEN Scanner

Demonstrație. Pentru fiecare întreg pozitiv N fixat și pentru θ dat, considerăm identitatea

$$[\varphi(h)]^N = M(e^{hZ_N};\ \theta) = P(n \leqslant N|\ \theta) M(e^{hZ_n + h(Z_N - Z_n)}|\ n \leqslant N;\ \theta) + \tag{100}$$

$$+ P(n > N|\ \theta)\ M(e^{hZ_N}|\ n > N;\ \theta).$$

Deoarece, pentru fiecare $n \leqslant N$, $Z_n = (z_1 + \ldots + z_n)$ și $Z_N - Z_n = (z_{n+1} + \ldots + z_N)$ sînt independente, putem să scriem

$$M(e^{hZ_n + h(Z_N - Z_n)}|\ n \leqslant N;\ \theta) = M(e^{hZ_n}[\varphi(h)]^{N-n}|\ n \leqslant N;\ \theta).$$

Deci, împărțind (100) prin $[\varphi(h)]$, obținem

$$P(n \leqslant N|\ \theta) M(e^{hZ_n}[\varphi(h)]^{-n}|\ n \leqslant N;\ \theta) + \tag{101}$$

$$+ P(n > N|\ \theta)\ \frac{M(e^{hZ_n}|\ n > N;\ \theta)}{[\varphi(h)]^N} = 1.$$

Din lema 2 urmează că $D^2(z;\ \theta) > 0$ și prin urmare, după corolarul 1 pentru fiecare h real

$$\lim_{N \to \infty} P(n \leqslant N|\ \theta) M(e^{hZ_n}[\varphi(h)]^{-n}|\ n \leqslant N;\ \theta) = M(e^{hZ_n}[\varphi(h)]^{-n};\ \theta),$$

care este membrul stîng al relației (99). Pentru a arăta că al doilea termen din membrul stîng al relației (101) tinde la zero pentru toți h reali, cînd $N \to \infty$, considerăm variabila y cu funcția de repartiție

$$G_1(y;\ \theta) = [\varphi(h^*)]^{-1} \int_{-\infty}^{y} e^{h^* z}\, dG(z;\ \theta),$$

unde h^* este definită în lema 2. Atunci funcția generatoare de momente a variabilei y

$$\psi(h) = \frac{\varphi(h + h^*)}{\varphi(h^*)}$$

există pentru toți h reali deoarece $\varphi(h^*) > 0$. În continuare din lema 2 urmează că

$$\psi'(0) = \frac{\varphi'(h^*)}{\varphi(h^*)} = 0, \quad \psi''(0) = \frac{\varphi''(h^*)}{\varphi(h^*)} > 0,$$

astfel că $\psi(h) > \psi(0) = 1$ pentru fiecare h real. Notînd prin C_N condiția ca $n > N$ cînd $\{z_i\}$ sînt independente și identic repartizate în concordanță cu $G_1(z;\ \theta)$, avem:

$$P(n > N|\ \theta)\ \frac{M(e^{hZ_N}|\ n > N;\ \theta)}{[\varphi(h)]^N} = P(C_N|\ \theta)\ \frac{M(e^{(h-h^*)Z_N}|\ C_N;\ \theta)}{[\psi(h - h^*)]^N}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Din teorema 6 urmează că $\lim_{N\to\infty} P(C_N \mid \theta) = 0$. În continuare urmează că $\lim_{N\to\infty} [\psi(h - h^*)]^{-N}$ este zero pentru toți $h \neq h'$ reali și unu pentru $h = h^*$. În final $M(e^{(h-h^*)Z_N} \mid C_N ; \theta)$ este uniform mărginită în raport cu N de $(e^{b(h-h^*)}, e^{a(h-h^*)})$ dacă $h \geqslant h^*$ și de $(e^{a(h-h^*)}, e^{b(h-h^*)})$ dacă $h < h^*$. Deci, pentru fiecare h real,

$$\lim_{N\to\infty} P(n > N \mid \theta) \frac{M(e^{hZ_N} \mid n > N ; \theta)}{[\varphi(h)]^N} = 0$$

ceea ce demonstrează teorema.

Observație. Identitatea fundamentală are loc pentru orice test bazat pe o selecție de volum fix.

Albert (1947) arată că membrul stîng al relației (99) poate fi derivat în raport cu h sub semnul medie de orice număr de ori pentru toți h reali.

4.6. Margini pentru funcția C.O.

Vom obține margini inferioare și superioare generale pentru $Q(\theta)$ a testului $S(b, a)$, $b < 0 < a$, bazate pe variabilele independente și identic repartizate $\{z_i\}$. Cînd nu este posibil să se găsească o expresie exactă pentru funcția C.O., aceste margini sînt adeseori folosite pentru a judeca acuratețea aproximațiilor Wald și Page-Kemp.

Scriind $h = h(\theta)$ în (99), unde $h(\theta) \neq 0$ este soluția ecuației (35) pentru un $\theta \in \Theta$ dat, obținem:

$$1 = M(e^{h(\theta)Z_n} ; \theta) = Q(\theta) M(e^{h(\theta)Z_n} \mid Z_n \leqslant b ; \theta) +$$

$$+ [1 - Q(\theta)] M(e^{h(\theta)Z_n} \mid Z_n \geqslant a ; \theta)$$

care dă

$$(102) \qquad Q(\theta) = \frac{M(e^{h(\theta)Z_n} \mid Z_n \geqslant a ; \theta) - 1}{M(e^{h(\theta)Z_n} \mid Z_n \geqslant a ; \theta) - M(e^{h(\theta)Z_n} \mid Z_n \leqslant b ; \theta)}.$$

Observație. (66) rezultă din (102).

În cele ce urmează vom obține limite pentru două medii condiționate în (102), deci și pentru $Q(\theta)$.

TEOREMA 9. *Dacă pentru un $\theta \in \Theta$ dat, $\{z_i\}$ sînt variabilele aleatoare independente și identic repartizate și satisfac condițiile lemei 2, funcția C.O. a testului $S(b, a)$, $b < 0 < a$, are marginile*

$$(103) \qquad \frac{e^{ah(\theta)} - 1}{e^{ah(\theta)} - \eta(\theta) e^{bh(\theta)}} \leqslant Q(\theta) \leqslant \frac{\delta(\theta) e^{ah(\theta)} - 1}{\delta(\theta) e^{ah(\theta)} - e^{bh(\theta)}}, \quad h(\theta) > 0$$

$$(104) \qquad \frac{e^{ah(\theta)} - 1}{e^{ah(\theta)} - \delta(\theta) e^{bh(\theta)}} \leqslant Q(\theta) \leqslant \frac{\eta(\theta) e^{ah(\theta)} - 1}{\eta(\theta) e^{ah(\theta)} - e^{bh(\theta)}}, \quad h(\theta) < 0,$$

Scanned with OKEN Scanner

unde

$$\eta(\theta) = \inf_{1<\zeta<\infty} \zeta M\left(e^{h(\theta)z} \mid e^{h(\theta)z} \leqslant \frac{1}{\zeta};\ \theta\right)$$

(105)

$$\delta(\theta) = \sup_{0<\xi<1} \xi M\left(e^{h(\theta)z} \mid e^{h(\theta)z} \geqslant \frac{1}{\xi};\ \theta\right) \quad \text{(Wald (1963)).}$$

Demonstrație. Pentru un θ dat, considerăm cazul $h(\theta) > 0$, adică după lema 2, $M(z;\ \theta) < 0$. Definim funcția de repartiție a variabilei Z_{n-1} în forma

$$P_1(\zeta;\ \theta) = \sum_{n=1}^{\infty} P\left(Z_{n-1} \leqslant b + \frac{\ln \zeta}{h(\theta)} \,\middle|\, n = n;\ \theta\right) p(n,\ \theta), \qquad 1 < \zeta < \infty$$

$$P_2(\xi;\ \theta) = \sum_{n=1}^{\infty} P\left(Z_{n-1} \leqslant a + \frac{\ln \xi}{h(\theta)} \,\middle|\, n = n;\ \theta\right) p(n;\ \theta), \qquad 0 < \xi < 1,$$

unde ζ și ξ sînt variabile reale și $p(n;\ \theta)$ este funcția de frecvențe a lui n. Atunci

$$M(e^{h(\theta)Z_n} \mid Z_n \leqslant b;\ \theta) = M(e^{h(\theta)Z_{n-1} + h(\theta)z_n} \mid z_n \leqslant b - Z_{n-1};\ \theta) =$$

$$= e^{bh(\theta)} \int_1^{\infty} \zeta M\left(e^{h(\theta)z} \mid z \leqslant \frac{-\ln \zeta}{h(\theta)};\ \theta\right) dP_1(\zeta;\ \theta) \geqslant e^{bh(\theta)}\, \eta(\theta),$$

unde $\eta(\theta)$ este definită în (105). Analog, găsim

$$M(e^{h(\theta)Z_n} \mid Z_n \geqslant a;\ \theta) = e^{ah(\theta)} \int_0^1 \xi M\left(e^{h(\theta)z} \mid z \geqslant \frac{-\ln \xi}{h(\theta)};\ \theta\right) dP_2(\xi,\ \theta) \leqslant$$

$$\leqslant e^{ah(\theta)} \delta(\theta).$$

Deci, pentru fiecare $\theta \in \Theta$ fixat pentru care $h(\theta) > 0$, avem

$$\eta(\theta)\, e^{bh(\theta)} \leqslant M(e^{h(\theta)Z_n} \mid Z_n \leqslant b;\ \theta) \leqslant e^{bh(\theta)},$$

(106)

$$e^{ah(\theta)} \leqslant M(e^{h(\theta)Z_n} \mid Z_n \geqslant a;\ \theta) \leqslant \delta(\theta) e^{ah(\theta)}.$$

Substituind cele două inegalități duble din (106) în (102) urmează (103). Mai departe, dacă $h(\theta) < 0$, putem aplica argumentele anterioare la T.S.R.P. bazat pe $\{-z_i\}$ și cu marginile de stopare $(-a, -b)$. Atunci (104) urmează din (103). Acum cantitățile $\eta(\theta)$ și $\delta(\theta)$ sînt definite în (105) însă pentru $h(\theta) < 0$.

Observație. Scriind $b = \ln [\beta/(1-\alpha)]$ și $a = \ln [(1-\beta)/\alpha]$, (103) cu $h(\theta) = 1$ și (104) cu $h(\theta) = -1$ dau margini pentru probabilitățile

Scanned with OKEN Scanner

erorilor adevărate ale testului

$$S(\ln [\beta/(1-\alpha)],\ \ln [(1-\beta)/\alpha]),$$

$$\frac{\alpha(1-\alpha-\beta)}{(1-\alpha)(1-\beta)\delta(\theta_0)-\alpha\beta} \leqslant \alpha(\theta_0) \leqslant \frac{\alpha(1-\alpha-\beta\eta(\theta_0))}{(1-\alpha)(1-\beta)-\alpha\beta\eta(\theta_0)}$$

(107)

$$\frac{\beta(1-\alpha-\beta)}{(1-\alpha)(1-\beta)\delta(\theta_1)-\alpha\beta} \leqslant \beta(\theta_1) \leqslant \frac{\beta(1-\alpha\eta(\theta_1)-\beta)}{(1-\alpha)(1-\beta)-\alpha\beta\eta(\theta_1)}.$$

Dacă $h(\theta')=0$ pentru $\theta' \in \Theta$ reali, marginile pentru $Q(\theta')$ pot fi obținute din (103) sau (104) cînd $h(\theta) \to 0$

Exemplul 15. Considerăm T.S.R.P. din exemplul 3. Fie $y \sim N(\theta, 1)$. Atunci, pentru $h(\mu) > 0$ (adică $\theta < 0$) relațiile (105) dau

$$\delta(\mu) = \sup_{0<\xi<1} \xi M\left[\exp\left(-\frac{2\theta\sigma}{\mu_1-\mu_0}z\right)\middle|\exp\left(\frac{2\theta\sigma}{\mu_1-\mu_0}z\right) \geqslant \frac{1}{\xi};\ \theta\right] =$$

(108)

$$= \sup_{0<\xi<1} \xi M\left(e^{-2\theta y}\middle|\ y \geqslant \frac{\ln\xi}{2\theta};\ \theta\right) = \sup_{0<\xi<1} \frac{\xi\Phi[-(\ln\xi)/(2\theta)-\theta]}{\Phi[-(\ln\xi)/(2\theta)+\theta]}$$

$$\eta(\mu) = \inf_{1<\zeta<\infty} \zeta M\left(e^{-2\theta y}\middle|\ y \leqslant \frac{\ln\zeta}{2\theta};\ \theta\right) =$$

$$= \inf_{1<\zeta<\infty} \frac{\zeta\Phi[(\ln\zeta)/(2\theta)+\theta]}{\Phi[(\ln\zeta)/(2\theta)-\theta]} = \left\{\sup_{0<\xi<1} \frac{\xi\Phi[-(\ln\xi)/(2\theta)-\theta]}{\Phi[-(\ln\xi)/(2\theta)+\theta]}\right\}^{-1} = \frac{1}{\delta(\mu)}.$$

Analog, pentru $h(\mu) < 0$ (adică $\theta > 0$), găsim

$$\delta(\mu) = \sup_{0<\xi<1} \frac{\xi\Phi[(\ln\xi)/(2\theta)+\theta]}{\Phi[(\ln\xi)/(2\theta)-\theta]}, \quad \eta(\mu) = \frac{1}{\delta(\mu)}.$$

Astfel $\delta(\mu)$ rămîne neschimbat pentru $\theta = \theta'$ sau $-\theta'$. Prin urmare este suficient să determinăm $\delta(\mu)$ numai pentru $\theta < 0$. Punînd în (108) $2r\theta = \ln\xi$, obținem

$$\delta(\mu) = \sup_r J(r,\ \theta)$$

unde, pentru $r > 0$

$$J(r,\ \theta) = \frac{e^{2r\theta}\Phi(-r-\theta)}{\Phi(-r+\theta)} = \frac{\int_0^\infty e^{-(r+\theta)z-\frac{z^2}{2}}dz}{\int_0^\infty e^{-(r-\theta)z-\frac{z^2}{2}}dz}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Pentru a arăta că $J(r,\ \theta)$ este o funcţie strict descrescătoare de r pe $(0,\ \infty)$ pentru orice $\theta < 0$ fixat, observăm că

$$\frac{\partial \ln J(r,\ \theta)}{\partial r} = \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{e^{-(z_0^2+z_1^2)/2-(r+\theta)z_0-(r-\theta)z_1}(z_1 - z_0)dz_0\,dz_1}{C(r,\ \theta)}$$

unde $C(r,\ \theta) > 0$ este integrala de la numărător fără factorul $(z_1 - z_0)$ în integrant. Folosind transformările

$$z_1 - z_0 = u \quad \text{şi} \quad z_1 + z_0 = u_1$$

rezultă că integrala din dreapta este nenegativă pentru fiecare $\theta < 0$ fixat şi pentru toţi $r > 0$. Deci $J(r,\ \theta)$ este strict descrescătoare cu $0 < r < \infty$ pentru fiecare $\theta < 0$ fixat şi prin urmare

$$\delta(\mu) = J(0,\ \theta) = \frac{\Phi(-\theta)}{\Phi(\theta)}, \qquad \theta < 0.$$

Astfel, pentru toţi $\mu \neq (\mu_0 + \mu_1)/2$, marginile din (103) sau din (104) pot fi scrise ca

$$(109) \qquad \frac{\Phi(-\theta)e^{-2a'\theta} - \Phi(-\theta)}{\Phi(-\theta)e^{-2a'\theta} - \Phi(\theta)e^{-2b'\theta}} \leqslant Q(\mu) \leqslant \frac{\Phi(-\theta)e^{-2a'\theta} - \Phi(\theta)}{\Phi(-\theta)e^{-2a'\theta} - \Phi(\theta)e^{-2b'\theta}}.$$

Amîndoi membrii din (109) sînt funcţii strict descrescătoare de μ pe $(-\infty,\ \infty)$. În consecinţă, cînd $\mu \to (\mu_0 + \mu_1)/2$ obţinem

$$\frac{a'}{a' - b' + \sqrt{2/\pi}} \leqslant Q\left(\frac{\mu_0 + \mu_1}{2}\right) \leqslant \frac{a' + \sqrt{2/\pi}}{a' - b' + \sqrt{2/\pi}}.$$

4.7. Margini pentru funcţia V.M.V.S.

Vom determina margini pentru $M(n\,;\ \theta)$ a testului $S(b,\ a)$, $b < 0 < a$, bazat pe variabilele independente şi identice repartizate $\{z_i\}$. Cînd nu este posibil să găsim o expresie exactă pentru V.M.V.S., aceste margini sînt adeseori folosite pentru a judeca acurateţea aproximaţiilor Wald şi Page-Kemp. De altfel, comparînd marginea superioară care urmează cu $n(\alpha,\ \beta)$ a testului optim bazat pe o selecţie de volum fix se poate evalua eficienţa relativă minimă ce poate fi atinsă de T.S.R.P.U.C.M.E. pentru orice $\theta \in \Theta$.

TEOREMA 10. (Wald (1963)) *Dacă $\{z_i\}$ sînt independente şi identic repartizate pentru $\theta \in \Theta$ dat şi satisfac condiţiile lemei 2, atunci funcţia V.M.V.S. a testului $S(b,\ a)$, $b < 0 < a$, are marginile*

$$\frac{[b + \gamma_1(\theta)]Q(\theta) + [1 - Q(\theta)]a}{M(z\,;\ \theta)} \leqslant M(n\,;\ \theta) \leqslant$$

$$(110) \qquad \leqslant \frac{bQ(\theta) + [a + \gamma_2(\theta)][1 - Q(\theta)]}{M(z\,;\ \theta)}$$

Scanned with OKEN Scanner

pentru $M(z;\ \theta)>0$ *şi inegalităţile sînt inversate dacă* $M(z;\ \theta)<0$, *unde*

$$\gamma_1=\inf_{r>0} M(z+r\,|\,z\leqslant -r<0;\ \theta)$$

(111)

$$\gamma_2=\sup_{r>0} M(z-r\,|\,z\geqslant r>0;\ \theta).$$

Dacă $M(z;\ \theta')=0$ *pentru unii* $\theta'\in\Theta$, *atunci*

$$\frac{b^2Q(\theta')+a^2[(1-Q(\theta)]}{M(z^2;\ \theta)}\leqslant M(n;\ \theta')\leqslant$$

(112)

$$\leqslant\frac{[b^2+2b\gamma_1(\theta')+\gamma_3(\theta')]Q(\theta')+[a^2+2a\gamma_2(\theta')+\gamma_4(\theta')][1-Q(\theta')]}{M(z^2;\ \theta')},$$

unde

$$\gamma_3(\theta)\leqslant\sup_{r>0} M([z+r]^2\,|\,z\leqslant -r<0;\ \theta),$$

(113)

$$\gamma_4(\theta)=\sup_{r>0} M([z-r]^2\,|\,z\geqslant r>0;\ \theta).$$

Demonstraţie. Mai întîi considerăm cazul cînd $M(z;\ \theta)\neq 0$. Folosim relaţia (68). Deoarece $P(b<Z_{n-1}<|\ \theta)=1$, avem

$$b\geqslant M(Z_n\,|\,Z_n\leqslant b;\ \theta)=b+M(z_n+[Z_{n-1}-b]\,|\,z_n\leqslant$$

$$\leqslant b-Z_{n-1}<0;\ \theta)\geqslant b+\gamma_1(\theta)$$

$$a\leqslant M(Z_n\,|\,Z_n\geqslant a;\ \theta)=a+M(z_n-[a-Z_{n-1}]\,|\,z_n\geqslant$$

$$\geqslant a-Z_{n-1}>0,\ \theta)\leqslant a+\gamma_2(\theta).$$

Înlocuind aceste inegalităţi în prima relaţie din (68) obţinem (110) dacă $M(z;\ \theta)>0$, în timp ce pentru $M(z;\ \theta)<0$ obţinem (110) cu amîndouă inegalităţile inversate.

Mai departe, dacă $M(z,\ \theta')=0$ pentru unii $\theta'\in\Theta$, deoarece $b<0<a$, obţinem

$$b^2\leqslant M(Z_n^2\,|\,Z_n\leqslant b;\ \theta')=$$

$$=M([Z_n-b]^2\,|\,Z_n\leqslant b;\ \theta')+2b\,M(Z_n-b\,|\,Z_n\leqslant b;\theta')+b^2\leqslant$$

$$\leqslant\gamma_3(\theta')+2b\gamma_1(\theta')+b^2,$$

şi analog

$$a^2\leqslant M(Z_n^2\,|\,Z_n\geqslant a;\ \theta')\leqslant\gamma_4(\theta')+2a\gamma_2(\theta')+a^2.$$

Scanned with OKEN Scanner

Înlocuind aceste inegalităţi în a doua relaţie din (68) rezultă (112).

Observaţie i). $\gamma_1(\theta) \leqslant 0$, $\gamma_2(\theta) \geqslant 0$, $\gamma_3(\theta) \geqslant 0$ şi $\gamma_4(\theta) \geqslant 0$ pentru toţi $\theta \in \Theta$.

ii) Dacă $\ln g(z\,;\,\theta)$ este o funcţie continuă concavă de z pentru orice $\theta \in \Theta$ fixat, atunci

$$M(z + r \mid z \leqslant r < 0\,;\ \theta)$$

este o funcţie strict crescătoare de r, în timp ce

$$M(z - r \mid z \geqslant r > 0\,;\ \theta), \quad M([z + r]^2 \mid z \leqslant -r < 0\,;\ \theta) \quad \text{şi}$$

$$M([z - r]^2 \mid z \geqslant r > 0\,;\ \theta)$$

sînt funcţii strict descrescătoare de r.

În consecinţă, pentru astfel de cazuri (111) şi (113) se simplifică la

$$\gamma_1 = M(z \mid z < 0\,;\ \theta), \qquad \gamma_2(\theta) = M(z \mid z > 0\,;\ \theta),$$

(114)

$$\gamma_3 = M(z^2 \mid z < 0\,;\ \theta), \qquad \gamma_4(\theta) = M(z^2 \mid z > 0\,;\ \theta)$$

iii) Dacă $M(z\,;\,\theta)$ este apropiată de zero, marginile din (110) nu au interes practic. Wald (1947) dă o abordare alternativă pentru a găsi margini mai apropiate în astfel de cazuri.

IV) Totuşi mai restrictiv este faptul că atît (110) cît şi (112) depind de cunoaşterea exactă a $Q(\theta)$. Pentru a înlătura această dificultate se poate înlocui $Q(\theta)$ în (110) prin (66) şi $Q(\theta')$ în (112) prin (67) obţinîndu-se concluzii aproximative folositoare. Alternativ se pot folosi marginile date de teorema 9 într-un mod convenabil în (110). De exemplu, dacă $M(z\,;\,\theta) \geqslant 0$, notăm prin $\underline{Q}(\theta)$ $[\bar{Q}(\theta)]$ membrul stîng (drept) al relaţiei (104). Atunci inegalităţile din (110) rămîn valabile dacă se înlocuieşte $Q(\theta)$ din membrul stîng (drept) prin $\bar{Q}(\theta)$ $[\underline{Q}(\theta)]$.

Cazul $M(z\,;\,\theta) < 0$ şi $M(z\,;\,\theta') = 0$ se tratează în mod analog folosind (103) şi, dacă θ este real, limita sa cînd $h(\theta) \to 0$.

Exemplul 16. Considerăm T.S.R.P. din exemplul 3. Deoarece pentru orice $-\infty < \mu < \infty$, $\ln g(z\,;\,\mu)$ este concav, din (114) urmează că

$$\gamma_1(\mu) = \frac{\mu_1 - \mu_0}{\sigma}\left[\theta - \frac{\varphi(\theta)}{\Phi(-\theta)}\right],$$

$$\gamma_2(\mu) = \frac{\mu_1 - \mu_0}{\sigma}\left[\theta + \frac{\varphi(\theta)}{\Phi(\theta)}\right],$$

$$\gamma_3(\mu) = \left(\frac{\mu_1 - \mu_0}{\sigma}\right)^2\left[1 + \theta^2 - \frac{\theta\varphi(\theta)}{\Phi(-\theta)}\right],$$

$$\gamma_4(\mu) = \left(\frac{\mu_1 - \mu_0}{\sigma}\right)^2\left[1 + \theta^2 + \frac{\theta\varphi(\theta)}{\Phi(\theta)}\right].$$

Scanned with OKEN Scanner

Dacă în (110) ţinem seama de γ_i, $i = 1, 2, 3, 4$, pentru $\theta > 0$, obţinem

$$\frac{a'}{\theta} - \left[\frac{a' - b'}{\theta} + \frac{\varphi(\theta)}{\theta\Phi(-\theta)} - 1\right] Q(\mu \leqslant M(n\,;\,\mu) \leqslant$$

(115)

$$\leqslant \frac{b'}{\theta} + \left[\frac{a' - b'}{\theta} + \frac{\varphi(\theta)}{\theta\Phi(\theta)} + 1\right][1 - Q(\theta)].$$

Dacă $\theta < 0$ inegalităţile în (115) sînt inversate. Pentru $\theta = 0$, (112) dă

$$a'^2 - (a'^2 - b'^2)Q\left(\frac{\mu_0 + \mu_1}{2}\right) \leqslant M\left(n\,;\,\frac{\mu_0 + \mu_1}{2}\right) \leqslant$$

$$\leqslant a'^2 + 1 + \frac{4a'}{\sqrt{2\pi}} - (a' + b')\left(a' - b' + \frac{4}{\sqrt{2\pi}}\right) Q\left(\frac{\mu_0 + \mu_1}{2}\right).$$

4.8. Repartiţia V.D.S.

Teorema 6 arată că dacă $S(b, a)$ este bazată pe variabilele $\{z_i\}$ independente şi identic repartizate, atunci există momentele V.D.S. n. O expresie pentru $M(n^k\,;\,\theta)$, k fiind orice întreg pozitiv, poate fi obţinută prin derivarea identităţii fundamentale în raport cu h în $h = 0$. De exemplu se derivează (99) şi se obţine (44) cu $T_n \equiv Z_n$, $t \equiv z$ şi aceasta cu a doua derivare a relaţiei (99) dă

$$D^2(n\,;\,\theta) = \frac{D^2(z\,;\,\theta)M(Z_n\,;\,\theta)}{[M(z\,;\,\theta)]^3} + \frac{2M(nZ_n\,;\,\theta)}{M(z\,;\,\theta)} - \frac{M(Z_n^2\,;\,\theta) + [M(Z_n\,;\,\theta)]^2}{[M(z\,;\,\theta)]^2}$$

Totuşi dacă excesele lui Z_n faţă de b şi a sînt mici (însă nu zero) nu ştim cum se poate găsi o aproximaţie pentru $M(nZ_n\,;\,\theta)$ (exceptînd cînd $a = -b$ şi repartiţia lui z este simetrică faţă de zero, în care caz $M(nZ_n\,;\,\theta) = 0$). În consecinţă o formulă aproximativă pentru $D^2(n\,;\,\theta)$ şi momentele superioare ale lui n, similare cu (69) şi (70) nu urmează imediat din identitatea fundamentală. Pe de altă parte, acest neajuns poate fi înlăturat considerînd mai întîi funcţia caracteristică a lui n în $S(b, a)$

$$\varphi(t) = M\,(e^{itn}\,;\,\theta) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{itn}\rho(n\,;\,\theta)$$

Cercetăm aproximaţia funcţiei $\varphi(t)$ în presupunerea că excesele lui Z_n faţă de b şi a sînt mici.

Din lema 2 urmează că $G(h)$ ca funcţie de variabila complexă h este nesingulară în 0 şi $h_0 = h(0) \neq 0$. Pentru $|t|$ suficient de mic, ecuaţia

(116)

$$-\ln G(h) = it$$

Scanned with OKEN Scanner

are prin urmare două rădăcini $h_1(it)$ şi $h_2(it)$, astfel încît

$$\lim_{t\to 0} h_1(it) = 0, \quad \lim_{t\to 0} h_2(it) = h_0.$$

Înlocuind succesiv $h = h_1(it)$, $h_2(it)$ în (99), obţinem

$$Q(\theta)\, M(e^{h_1(it)Z_n} e^{itn} \mid Z_n \leqslant b;\ \theta) + [1 - Q(\theta)]\, M(e^{h_1(it)Z_n} e^{itn} \mid Z_n \geqslant a;\ \theta) = 1,$$

$$Q(\theta)\, M(e^{h_2(it)Z_n} e^{itn} \mid Z_n \leqslant b,\ \theta) + [1 - Q(\theta)]\, M(e^{h_2(it)Z_n} e^{itn} \mid Z_n \geqslant a;\ \theta) = 1.$$

Presupunînd că excesele lui Z_n faţă de b şi a la terminare sînt neglijabile cele două inegalităţi de mai sus dau

$$M(e^{itn} \mid Z_n \leqslant b;\ \theta) \simeq \frac{e^{ah_2(it)} - e^{ah_1(it)}}{[e^{ah_2(it)+bh_1(it)} - e^{ah_1(it)+bh_2(it)}]Q(\theta)}$$

$$M(e^{itn} \mid Z_n \geqslant a;\ \theta) \simeq \frac{e^{bh_1(it)} - e^{bh_2(it)}}{[e^{ah_2(it)+bh_1(it)} - e^{ah_1(it)+bh_2(it)}][1-Q(\theta)]}$$

Deci $\varphi(t)$ se reduce la

$$\varphi(t) = Q(\theta)M(e^{itn} \mid Z_n \leqslant b;\ \theta) + [1 - Q(\theta)]M(e^{itn} \mid Z_n \geqslant a;\ \theta) \simeq$$

(117)

$$\simeq \frac{e^{ah_2(it)} - e^{ah_1(it)} + e^{bh_1(it)} - e^{bh_2(it)}}{e^{ah_2(it)+bh_1(it)} - e^{ah_1(it)+bh_2(it)}}, \quad M(z;\ \theta) \neq 0$$

În orice situaţie putem determina din (116) mai întîi $h_1(it)$ şi $h_2(it)$ şi atunci funcţia caracteristică va fi dată, aproximativ, de (117).

Observaţie. Diferenţa dintre $\varphi(t)$ şi (117) tinde către zero cînd $|M(z;\ \theta)| \to 0$ şi $D^2(z;\ \theta) \to 0$.

Derivata de ordinul k a membrului drept al relaţiei (117) în $t = 0$ dă o expresie aproximativă pentru $M(n^k;\ \theta)$. Pentru $k = 1$ aceasta dă aproximaţia lui Wald $\tilde{\tilde{M}}(\theta)$. Fie

$$\mu_\theta = M(z;\ \theta), \qquad \sigma_\theta^2 = D^2(z;\ \theta)$$

$$\gamma_\theta = M([z - \mu_\theta]^3;\ \theta), \qquad \xi_\theta = M([z - \mu_\theta]^4;\ \theta),$$

şi fie G'_θ, G''_θ, G'''_θ primele trei derivate ale funcţiei $G(h)$ în $h = h_0$, unde $h_0 = h(\theta)$ este soluţia nenulă a ecuaţiei (35).

Dacă $\mu_\theta \neq 0$, atunci obţinem (pentru $k = 2,3,4$)

$$D^2(n;\ \theta) = \frac{\sigma_\theta^2[a - (a-b)\tilde{Q}(\theta)]}{\mu_\theta^3} + \frac{(a-b)^2\tilde{Q}(\theta)[1-\tilde{Q}(\theta)]}{\mu_\theta}\left(\frac{2}{G'_\theta} - \frac{1}{\mu_\theta}\right) +$$

118)

$$+ \frac{2(a-b)[a-(a-b)\tilde{Q}(\theta)]}{\mu_\theta(e^{ah_0} - e^{bh_0})}\left(\frac{1}{G'_\theta} - \frac{1}{\mu_\theta}\right),$$

$$M(n^3;\ \theta) \simeq c_3 - 3c_2d_1 + 3c_1(2d_1^2 - d_2),$$

$$M(n^4;\ \theta) \simeq c_4 - 4c_3d_1 + 6c_2(2d_1^2 - d_2) - 4c_1(6d_1^3 - 6d_1d_2 + d_3),$$

Scanned with OKEN Scanner

unde

$$c_1 = F_0^{-1}(a - b + F_1)\mu_0^{-1},$$

$$c_2 = F_0^{-1}[(a - b + F_1)\sigma_0^2\mu_0^{-3} - (a^2 - b^2 + F_2)\mu_0^{-2}] - 2ab\mu_0^{-1}G_0'^{-1},$$

$$c_3 = F_0^{-1}[(a - b + F_1)(3\sigma_0^4 - \mu_0\gamma_0)\mu_0^{-5} - 3(a^2 - b^2 + F_2)\sigma_0^2\mu_0^{-4} +$$

$$+ (a^3 - b^3 + F_3)\mu_0^{-3} + 3abG_1\mu_0^{-1}G_0'^{-2} + 3abF_1\mu_0^{-2}G_0'^{-1}] -$$

$$- 3abH\mu_0^{-1} - 3ab\sigma_0^2\mu_0^{-3}G_0'^{-1},$$

$$c_4 = F_0^{-1}[(a - b + F_1)\{(\xi_0 - 3\sigma_0^4)\mu_0^{-5} + 5\sigma_0^2(3\sigma_0^4 - 2\mu_0\gamma_0)\mu_0^{-7}\} -$$

$$- (a^2 - b^2 + F_2)(15\sigma_0^4 - 4\mu_0\gamma_0)\mu_0^{-6} + 6(a^3 - b^3 + F_3)\sigma_0^2\mu_0^{-5} -$$

$$- (a^4 - b^4 + F_4)\mu_0^{-4} + 12\,abG_1H\mu_0^{-1}G_0'^{-1} + GabG_1\sigma_0^2\mu_0^{-3}G_0'^{-2} +$$

$$+ 12\,abF_1\sigma_0^2\mu_0^{-4}G_0'^{-1} + 6abF_1H\mu_0^{-2} - 4abG_2\mu_0^{-1}G_0'^{-3} - 4abF_2\mu_0^{-3}G_0'^{-1}] -$$

$$- 4ab(3\sigma_0^4 - \mu_0\gamma_0)\mu_0^{-5}G_0'^{-1} + 4ab(G_0''' - G_0'^3)\mu_0^{-1}G_0'^{-4} -$$

$$- 12\,abHG_0''\mu_0^{-1}G_0'^{-2} - 6abH\sigma_0^2\mu_0^{-3} - 6a^2b^2\mu_0^{-2}G_0'^{-2},$$

$$d_1 = F_0^{-1}(-G_1G_0'^{-1} - F_1\mu_0^{-1}),$$

$$d_2 = F_0^{-1}(-G_1H - F_1\sigma_0^2\mu_0^{-3} + G_2G_0'^{-2} + F_2\mu_0^{-2}) + 2ab\mu_0^{-1}G_0'^{-1},$$

$$d_3 = F_0^{-1}[G_1\{(G_0''' - G_0'^3)G_0'^{-4} - 3HG_0''G_0'^{-2}\} - F_1(3\sigma_0^4 - \mu_0\gamma_0)\mu_0^{-5} -$$

$$- 3abG_1\mu_0^{-1}G_0'^{-2} - 3abF_1\mu_0^{-2}G_0'^{-1} + 3G_2HG_0'^{-1} + 3F_2\sigma_0^2\mu_0^{-4} -$$

$$- G_3G_0'^{-3} - F_3\mu_0^{-3}] + 3abH\mu_0^{-1} + 3ab\sigma_0^2\mu_0^{-3}G_0'^{-1},$$

$$F_j = b^j e^{ah_0} - a^j e^{bh_0}, \qquad j = 0,1,2,3,4$$

$$G_j = a^j e^{ah_0} - b^j e^{bh_0}, \qquad j = 1,2,3.$$

$$H = (G_0'' - G_0'^2)G_0'^{-3}.$$

Adeseori membrii din dreapta ai relațiilor (118) sînt funcții continui și derivabile de θ. Atunci expresiile limită (cînd $\mu_0 \to 0$) pentru $D^2(n;\ \theta)$, $M(n^3;\ \theta)$, și $M(n^4;\ \theta)$ pot fi determinate analitic.

Cele patru momente ale lui n dau o imagine bună asupra repartiției. V.D.S. Totuși, dacă se cere, $P(n \leqslant n|\ \theta)$ pentru orice $n \geqslant 1$ poate fi determinată mai direct din (117) folosind teorema de unicitate. Deoarece (117) este adevărată strict cînd $|M(z;\ \theta)|$ și $D^2(z;\ \theta)$ sînt arbitrar de mici, este rezonabil să reprezentăm funcția de frecvență a variabilei n prin densi-

Scanned with OKEN Scanner

tatea de repartiție

$$p(n;\ \theta) \simeq \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-it\mu_\theta}\varphi(t)\,dt, \quad n>0. \tag{119}$$

Bhate (1959) obține margini inferioare și superioare pentru $P(n \leqslant n|\theta)$ și dă o metodă pentru calcularea aproximativă a $p(n;\ \theta)$ ca medie a acestor medii.

Exemplul 17. Considerăm testul $S(b, a)$, $b<0<a$, pentru (47) cînd $(\mu_1-\mu_0)/\sigma$ este mic. Din expresia lui $G(h)=G(h;\ \mu)$ dată în exemplul 3, urmează că cele două soluții în (116) sînt

$$h_1(it)=\frac{-\theta\sigma(1-\zeta)}{\mu_1-\mu_0}, \quad h_2(it)=\frac{-\theta\sigma(1+\zeta)}{\mu_1-\mu_0}$$

unde $\theta=(2\mu-\mu_0-\mu_1)/2\sigma$ și $\zeta=\sqrt{1-2it/\theta^2}$. Atunci (117) se reduce la

$$\varphi(t)\simeq\frac{e^{b'\theta}(e^{a'\theta\zeta}-e^{-a'\theta\zeta})+e^{a'\theta}(e^{-b'\theta\zeta}-e^{b'\theta\zeta})}{e^{(a'-b')\theta\zeta}-e^{-(a-b')\theta\zeta}}, \quad \theta\neq 0,$$

unde $b'=b\sigma/(\mu_1-\mu_0)$ și $a'=a\sigma/(\mu_1-\mu_0)$.

În (118) folosim

$$\mu_\theta=\frac{\theta(\mu_1-\mu_0)}{\sigma}, \quad \sigma_\theta^2=\frac{(\mu_1-\mu_0)^2}{\sigma^2}, \quad \gamma_\theta=0,$$

$$\xi_\theta=\frac{3(\mu_1-\mu_0)^4}{\sigma^4}, \quad G_\theta'=\frac{-\theta(\mu_1-\mu_0)}{\sigma}, \quad G_\theta''=\frac{(1+\theta^2)(\mu_1-\mu_0)^2}{\sigma^2},$$

$$G_\theta'''=\frac{-\theta(3+\theta^2)(\mu_1-\mu_0)^2}{\sigma^3}, \quad h_0=\frac{-2\theta\sigma}{\mu_1-\mu_0}.$$

Cînd $\mu_\theta\to 0$, $\tilde{\tilde{M}}(\mu)$ și membrii din dreapta ai relațiilor (118) dau

$$M\left(n;\ \frac{\mu_0+\mu_1}{2}\right)\simeq -a'b', \quad D^2\left(n;\ \frac{\mu_0+\mu_1}{2}\right)\simeq -\frac{1}{3}a'b'(a'^2+b'^2),$$

$$M\left([n+a'b']^3;\ \frac{\mu_0+\mu_1}{2}\right)\simeq -\frac{1}{15}a'b'[3(a'^2+b'^2)^2+4a'^2b'^2]$$

$$M\left([n+a'b']^4;\ \frac{\mu_0+\mu_1}{2}\right)\simeq$$

$$=-\frac{1}{105}a'b'(a'^2+b'^2)[17(a'^2+b'^2)^2-35a'b'(a'b'(a'^2+b'^2)+68a'^2b'^2]$$

Scanned with OKEN Scanner

Cum numitor funcției $\varphi(t)$ poate fi dezvoltat ca o serie de puteri în $e^{-(a'-b')\theta\zeta}$, (119) se poate integra. Dacă $\theta > 0$, această metodă dă

$$(120) \qquad p(n;\ \mu) \simeq \frac{e^{-\frac{1}{2}n\theta^2}}{n\sqrt{2\pi n}} \sum_{k=1}^{4} \sum_{j=0}^{\infty} \delta_k \lambda_{kj} e^{-\frac{1}{2n}\lambda_{kj}^2}, \quad n > 0,$$

unde

$$\delta_1 = e^{b'\theta} = -\delta_2, \quad \delta_3 = e^{a'\theta} = -\delta_4$$

$$\lambda_{1j} = 2ja' - (2j+1)b', \quad \lambda_{2j} = 2(j+1)a' - (2j+1)b',$$

$$\lambda_{3j} = (2j+1)a' - 2jb', \quad \lambda_{4j} = (2j+1)a' - 2(j+1)b'.$$

Presupunerile care au condus la (120), implică ca n ia valori mari cu probabilități mari. În consecință, factorul $e^{-\frac{1}{2}n\theta^2}$ va domina ceilalți factori care conțin pe n din (120).

Baker (1950) aplică 2003 T.S.R.P. independente cu $\mu_0 = 0$, $\mu_1 = 1$, $\sigma = 1$ și pentru patru mulțimi de (b, a) cînd selecția se consideră asupra unei variabile normale cu $\mu = 0$.

§ 5. Rezultate exacte

5.1. Punerea problemei

Vom obține expresii exacte pentru funcțiile C.O. și V.M.V.S. pentru $S(b, a)$, $b < 0 < a$, pentru familii probabilistice speciale. Vom presupune că $\{z_i\}$ sînt independente și identic repartizate cu

$$P(z_i < 0 \mid \theta) > 0 < P(z_i > 0 \mid \theta)$$

pentru orice $\theta \in \Theta$. Scriind inegalitatea critică ca

$$0 < Z_n - b < a - b, \text{ pentru } n \geqslant 1,$$

din (9) și (10) urmează că pentru orice $\theta \in \Theta$, $Q(\theta)$ și $M(n;\ \theta)$ depind de $-b$ și $a - b$. Vom folosi următoarele notații

$$(121) \quad Q(\theta) \equiv q(-b), \quad M(n;\ \theta) \equiv e(-b), \qquad 0 < -b < a - b < k.$$

Se înțelege că $q(-b)$ și $e(-b)$ sînt amîndouă funcții de θ și k. Cunoscînd $q(-b)$ explicit se poate determina (b^*, a^*) a T.S.R.P. U.C.M.E. pentru o mulțime dată $(\theta_0, \theta_1, \alpha, \beta)$.

5.2. Cazul cînd $\{z_i\}$ sînt discrete independente și identic repartizate

Presupunem că $\{z_i\}$ sînt independente și identic repartizate cu funcția de frecvențe comună

$g(z;\ \theta) > 0$ dacă și numai dacă $z = -z, -z+1, \ldots, -1, 0, 1, \ldots, \bar{z}$ unde $\underline{z}$ și $\bar{z}$ sînt doi întregi pozitivi. Presupunem pentru moment că $-b$ și $a - b$ sînt întregi pozitivi. Considerăm situația după ce a fost obținut z_1.

Scanned with OKEN Scanner

Dacă $z_1 - b \leqslant 0$ atunci $S(b, a)$ începe cu acceptarea ipotezei H_0 și pentru luarea deciziei trebuie exact o observație. Dacă $0 < z_1 - b < k$ atunci se pornește cu un nou T.S.R.P. cu inegalitatea critică.

$$0 < Z_n - (b - z_1) < k \text{ pentru } n \geqslant 2.$$

Deoarece $\{z_i\}$ sînt independente și identic repartizate, funcția C.O. și V.M.V.S. a acestui nou T.S.R.P. sînt

$$q(z_1 - b) \text{ și respectiv } e(z_1 - b).$$

Deci,

$$q(-b) = P(z_1 \leqslant b \mid \theta) + \sum_{z=1}^{k-1} P(z_1 = z + b \mid \theta) q(z) =$$

(122)

$$= \sum_{z=-\underline{z}}^{b} g(z;\ \theta) + \sum_{z=1}^{k-1} g(z + b;\ \theta) q(z), \qquad 0 < -b < k$$

(123) $$e(-b) = 1 + \sum_{z=1}^{k-1} g(z + b;\ \theta) e(z), \qquad 0 < -b < k.$$

Pentru anumite valori ale lui b prima sumă din (122) poate fi zero, de exemplu dacă $b < -1$ și $P(z_i < -1 \mid \theta) = 0$. Înlocuind $-b$ prin întregul pozitiv $y (0 < y < k)$ (122) și (123) reprezintă două ecuații cu diferențe pentru $q(y)$ și respectiv $e(y)$. În fiecare sînt $k - 1$ ecuații liniare pentru $k - 1$ necunoscute $\{q(y)\}$ sau $\{e(y)\}$ $(y = 1, \ldots, k - 1)$. Domeniul acestor ecuații poate fi extins la $-\infty < y < \infty$ introducînd condițiile de frontieră $q(y) = 1$ pentru $y \leqslant 0$, $q(y) = 0$ pentru $y \geqslant k$ și $e(y) = 0$ pentru $y \leqslant 0$ sau $y \geqslant k$. Totuși din forma presupusă a lui $g(z; \theta)$ urmează că pentru fiecare sistem avem nevoie să considerăm numai $\underline{z} + \bar{z}$ condiții de frontieră

(124) $$q(y) = \begin{cases} 1, & y = 0, -1, \ldots, -\underline{z} + 1 \\ 0, & y = k, \ldots, k + \bar{z} - 1 \end{cases}$$

(125) $$e(y) = 0, \quad y = 0, -1, \ldots, -\underline{z} + 1, \ k + 1, \ldots, k + \bar{z} - 1.$$

Din (122) și (123) urmează că pentru $q(y)$ și $e(y)$ există o soluție unică (pentru $y = 1, \ldots, k - 1$).

Pentru a obține $q(y)$ explicit fie $\{t_j\}$ $(j = 1, \ldots, \underline{z} + \bar{z})$ rădăcinile ecuației polinomiale

$$\psi(t;\ \theta) = \sum_{z=-\underline{z}}^{\bar{z}} t^z g(z;\ \theta) = 1.$$

Dacă toate rădăcinile sînt distincte, o soluție formală a ecuației (122) este dată de

(126) $$q(y) = \sum_{j=1}^{\underline{z}+\bar{z}} c_j t_j^y \text{ pentru } y = 1, \ldots, k - 1$$

Scanned with OKEN Scanner

unde constantele $\{c_j\}$ sînt determinate de condiţiile de frontieră (124). Dacă două rădăcini, să spunem t_1 şi t_2, sînt aceleaşi, în (126) adăugăm $c_1 + c_2 y$. În acelaşi mod, pentru $j = 1, \ldots, k-1$, se obţine

$$(127) \qquad e(y) = \begin{cases} \dfrac{\sum_{j=1}^{\underline{z}+\bar{z}} c_j t_j^y - y}{M(z\,;\ 0)}, & M(z\,;\ 0) \neq 0 \\ \dfrac{\sum_{j=1}^{\underline{z}+\bar{z}} c_j' t_j^y - y^2}{M(z^2\,;\ 0)}, & M(z\,;\ 0) = 0 \end{cases}$$

unde constantele $\{c_j'\}$ şi $\{c_j''\}$ sînt determinate de condiţiile de frontieră (125).

Observaţii. i) Metoda anterioară se aplică de asemenea la situaţia cînd $\{z_i\}$ pot lua multipli de întregi, pozitivi şi negativi a unui număr real pozitiv c. În acest caz se înlocuiesc a, b şi y prin a/c, b/c şi respectiv y/c.

ii) Cu mici modificări tehnica se aplică, de asemenea, cînd a şi (sau) b nu sînt întregi. Astfel, dacă numai $-b$ este un întreg, se înlocuieşte în cele anterioare, k prin cel mai mic întreg $\geqslant k$.

Exemplul 18. Considerăm T.S.R.P. al proporţiei binomial pentru cazul particular cînd

$$p_1 = 1 - p_0, \quad -b/\ln[(1-p_0)/p_0] = -b' \quad \text{şi} \quad a/\ln[(1-p_0/p_0] = a'$$

sînt întregi pozitivi. Tratînd întreaga analiză anterioară în termeni de şirul $\{z_i' = z_i/\ln[(1-p_0)/p_0]\}$ obţinem, în $y' = -b'$,

$$Q(p) = q(y') \quad \text{şi} \quad M(n\,;\ p) = e(y').$$

În acest caz

$$\underline{z} = 1 - \bar{z} \quad \text{şi} \quad g(1\,;\ p) = p,\ g(-1,\ p) = 1 - p.$$

Atunci

$$\psi(t\,;\ p) = pt + (1-p)/t = 1 \quad \text{dă} \quad t_1 = 1 \quad \text{şi} \quad t_2 = (1-p)/p.$$

Rezolvînd (126) cu condiţiile $q(0) = 1$, $q(a' - b') = 0$ şi (127) în condiţiile $e(0) = 0 = e(a' - b')$, în $y' = -b'$, obţinem:

$$Q(p) = \begin{cases} \dfrac{[(1-p)/p]^{a'} - 1}{[(1-p)/p]^{a'} - [(1-p/p]^{b'}}, & p \neq \dfrac{1}{2} \\ \dfrac{a'}{a' - b'}, & p = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

$$M(n\,;\ p) = \begin{cases} \dfrac{a' - b' - a'[(1-p)/p]^{b'} + b'\,[(1-p)/p]^{a'}}{(2p-1)\{[(1-p)/p]^{a'} - [(1-p)/p^{b'}]\}}, & p \neq \dfrac{1}{2} \\ -a'b', & p = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

Scanned with OKEN Scanner

Aceste rezultate sînt aceleași ca $\tilde{\tilde{Q}}(p)$ și $\tilde{\tilde{M}}(p)$ din exemplul 10 (propoziția 1). Dacă a' și $-b'$ nu sînt întregi, rezultatele anterioare au loc dacă b' și a' sînt înlocuite prin $-[-b']$ și $[a']$, unde $[m]$ reprezintă cel mai mic întreg $\geqslant m$.

5.3. Cazul cînd $\{z_i\}$ sînt continui, independente și identic repartizate

Presupunem că $\{z_i\}$ sînt independente cu densitatea de repartiție $g(z;\ \theta)$. Aplicînd argumentele care au condus la (122) și (123) pentru orice $(b,\ a)$ real, $0 < -b < a - b = k$, obținem funcțiile C.O. și V.M.V.S,

$$(128)\quad q(-b) = \int_{-\infty}^{b} g(z;\ \theta)\,dz + \int_{0}^{k} g(z+b;\ \theta)q(z)\,dz, \quad 0 < -b < k,$$

$$(129)\quad e(-b) = 1 + \int_{0}^{k} g(z+b;\ \theta)e(z)\,dz, \qquad 0 < -b < k.$$

Pentru anumite valori ale lui b prima integrală din (128) poate fi zero ($b = -1$ și $P(z_i < -1 \mid \theta) = 0$). Înlocuind $-b$ prin numărul real y din $(0,\ k)$ cele două relații (128) și (129) reprezintă ecuații integrale pentru $q(y)$ și respectiv $e(y)$ pentru $0 < y < k$. Domeniul poate fi extins la $-\infty < y < \infty$ introducînd condițiile de frontieră

$$q(y) = \begin{cases} 0, & y \geqslant k \\ 1, & y \leqslant 0 \end{cases}$$

$$e(y) = 0, \qquad y \leqslant 0,\ y \geqslant k$$

PROPOZIȚIA 2. *Soluțiile $q(y)$ și $e(y)$ există și sînt unice pentru fiecare $0 < y < k$.*

În general este dificil să se obțină soluția ecuației (128) și a ecuației (129) într-o formă simplă. Totuși sînt metode numerice pentru rezolvarea unor astfel de ecuații integrale. Pentru a folosi o astfel de tehnică observăm mai întîi că atît (128) cît și (129) aparțin la o familie generală și anume ecuația Fredholm de al doilea tip,

$$(130)\qquad M(y) = C(y) + \int_{0}^{k} K(y,\ z)M(z)\,dz, \quad 0 < y < k,$$

unde $C(y)$ și nucleul $K(y,\ z)$ sînt funcții continui cunoscute. Presupunem că integrala din dreapta poate fi reprezentată satisfăcător de formula de quadratură a lui Gauss

$$M(y) = C(y) + \sum_{j=1}^{m} W_j K(y,\ z_j)M(z_j),$$

unde $\{z_j\}$ $(j = 1, \ldots, m)$ sînt valori convenabil alese în $(0,\ k)$ și $\{W_j\}$ sînt ponderile lui Gauss corespunzătoare. Scriind $y = z_1, \ldots, z_m$ se obțin m ecuații liniare cu necunoscutele $\{M(z_j)\}$. Plecînd de la o aproximație ini-

Scanned with OKEN Scanner

țială, de exemplu $M(z_j) = 0$, $j = 1, \ldots, m$, valorile lui $M(z_j)$ pot fi obținute prin iterație care continuă pînă ce aproximațiile succesive la fiecare $M(z_j)$ ating o acuratețe prestabilită. Atunci, valorile $M(y)$, pentru $y \neq z_1, \ldots, z_m$ pot fi obținute prin interpolare inversă din mulțimea $\{M(z_j)\}$. Pentru a determina (b^*, a^*) se scrie succesiv în (128) $\theta = \theta_0, \theta_1$ și se egalează expresiile rezultate cu $1 - \alpha$ și respectiv β. Aceste două ecuații pot fi rezolvate pentru b și $k = a - b$ prin metodele numerice anterioare. Pentru aceste valori ale lui (b, k), din (129) se calculează $M(n; \theta)$ pentru diferiți $\theta \in \Theta$.

§ 6. Trunchiere și grupare

6.1. Trunchiere

DEFINIȚIA 8. Orice test secvențial S pentru o ipoteză dată este trunchiat la pasul $N (1 \leqslant N < \infty)$ dacă

$$P(n > N \mid \theta) > 0 \text{ sub } S \text{ pentru anumiți } \theta \in \Theta,$$

și se folosesc aceleași reguli de decizie specificate de S pentru toți $n \leqslant N$ însă o regulă arbitrară la decizia terminală dacă $x \in R_N$ sub S.

În particular, un T.S.R.P. trunchiat $\{S_d(b, a, N)$ pentru (2) este definit de (4) dacă $n = 1, \ldots, N$ și de o anumită regulă de la terminare dacă $b < Z_N < a$. Proprietățile testului $S_d(b, a, N)$ vor depinde de (b, a) cît și de d și de numărul de trunchiere N. Trunchierea oricărui test secvențial care ocazional poate cere un număr mare de observații este adeseori necesară în practică, chiar cînd, pentru toți θ, testul posedă o V.M.V.S. mică.

În această secțiune vom face un studiu comparativ al $S(b, a)$ și $S_d(b, a, N)$, $b < 0 < a$, în ceea ce privește funcțiile lor C.O., probabilitățile erorilor și funcțiile V.M.V.S.

Dacă pentru $\theta \in \Theta$ dat, N este suficient de mare pentru a asigura că $P(n \leqslant N \mid \theta) \simeq 1$ sub $S(b, a)$, proprietățile generale ale $S(b, a)$ pot fi extinse la $S_d(b, a, N)$ fără deosebire de alegerea lui d. Dată (b, a, θ) se poate asigura această valoare mare a lui N (dacă $\{z_i\}$ sînt variabile aleatoare independente, identic repartizate) din $\tilde{\tilde{M}}(\theta)$ și (118). Cînd $\{z_i\}$ sînt independente și identic repartizate pentru fiecare θ, o metodă de lucru care să asigure $P(n \leqslant N \mid \theta) \simeq 1$ pentru toți θ este de a lua $N = 3 \sup_\theta \tilde{\tilde{M}}(\theta)$, sau

$$N = 3\zeta, \quad \zeta = \max [\tilde{\tilde{M}}(\theta_0), \tilde{\tilde{M}}(\theta_1)]. \tag{131}$$

Dată (b, a, N), repartiția V.D.S. și prin urmare funcția V.M.V.S. sub $S_d(b, a, N)$ nu depind de d, însă funcția C.O. și prin urmare probabilitățile erorilor lui $S_d(b, a, N)$ depind de d. Regula d la pasul N poate fi luată în diferite moduri, o formulare rezonabilă fiind

$$\begin{aligned} &\text{accept } H_0 \text{ dacă } Z_N \leqslant 0 \text{ sau} \\ &\text{resping } H_0 \text{ dacă } Z_N > 0. \end{aligned} \tag{132}$$

Scanned with OKEN Scanner

Vom nota T.S.R.P. trunchiat din (132) prin $S(b, a, N)$ și indicele N va fi atașat probabilităților corespunzătoare erorilor sale, precum și funcțiilor C.O. și V.M.V.S.

$S(b, a, N)$ are

$$Q_N(\theta) = P(Z_1 \leqslant b|\ \theta) + \sum_{n=2}^{N} P(b < Z_1 < a, \ldots, b < Z_{n-1} < a,\ Z_n \leqslant b|\theta) + \tag{133}$$

$$+ P(b < Z_1 < a, \ldots, b < Z_{N-1} < a,\ b < Z_N < 0|\theta),$$

$$M_N(n;\ \theta) = \sum_{n=1}^{N-1} np(n;\ \theta) + N \sum_{n=N}^{\infty} p(n;\ \theta), \tag{134}$$

unde $p(n;\ \theta)$ este densitatea V.D.S. sub $S(b, a)$ definită în (10). Din teorema 1 urmează că, dat N, T.S.R.P. trunchiat U.C.M.E. din (132) este $S(b', a', N)$ unde b' și a' sînt alese să satisfacă condițiile

$$Q_N(\theta_0) \geqslant 1 - \alpha \quad \text{și} \quad Q_N(\theta_1) \leqslant \beta$$

cît mai apropiat posibil. Dacă N este rezonabil de mic, b' și a', $Q_N(\theta)$ și $M_N(n;\ \theta)$ pentru orice $\theta \in \Theta$ pot fi determinate numeric cu orice grade de acuratețe (*Aroian, Robison (1965)*). Metoda devine greoaie pentru valori mari ale lui N și cînd $\{z_i\}$ nu sînt independente și identic repartizate. Totuși, pentru astfel de cazuri, din (9) și (133) că pentru fiecare $N \geqslant 1$,

$$Q(\theta) - P(0 < Z_N < a|\ \theta) \leqslant Q_N(\theta) \leqslant Q(\theta) + P(b < Z_N \leqslant 0|\ \theta). \tag{135}$$

În consecință dacă excesele lui Z_n față de marginile de stopare sub $S(b, a)$ sînt mici, soluția (b', a') în

$$\frac{e^{a'} - 1}{e^{a'} - e^{b'}} - P(0 \leqslant Z_N < a'|\ \theta_0) = 1 - \alpha,$$

$$\frac{e^{b'}(e^{a'} - 1)}{e^{a'} - e^{b'}} + P(b' < Z_N \leqslant 0|\ \theta_1) = \beta$$

garantează o intensitate (α, β) minimă pentru $S(b', a', N)$. Din (11) și (134) urmează că, pentru fiecare $N \geqslant 1$,

$$M_N(n;\ \theta) \leqslant \min\,[N,\ M(n;\ \theta)]. \tag{136}$$

De obicei, după teorema 3, economia în V.M.V.S. a $S(b, a, N)$ față de $S(b, a)$ este atinsă pe seama unor probabilități mari ale erorilor. În particular, dacă $\{z_i\}$ sînt independente și identic repartizate, din (135) și (136) folosind aproximațiile lui Wald pentru $Q(\theta)$ și $M(n;\ \theta)$ se pot obține margini pentru funcțiile C.O. și V.M.V.S. ale testului $S(b, a, N)$. Mai mult, dacă N este suficient de mare, se poate folosi aproximația

$$P(k_1 < Z_N \leqslant k_2|\ \theta) \simeq \Phi\left(\frac{k_2 - NM(z;\ \theta)}{\sqrt{N}\,D(z;\ \theta)}\right) - \Phi\left(\frac{k_1 - NM(z;\ \theta)}{\sqrt{N}\,D(z;\ \theta)}\right)$$

pentru cele două probabilități în (135).

Scanned with OKEN Scanner

Prezintă interes examinarea efectului trunchierii T.S.R.P. U.C.M.E. $S(b^*, a^*)$ dat de (132) în creşterea probabilităţilor erorilor. În acest scop considerăm cazul, particular cînd $\{x_i\}$ sînt variabile aleatoare independente identic repartizate $N(\mu, \sigma)$, $\sigma > 0$ fiind cunoscută şi

$$H_0 : \mu = \mu_0, \quad H_1 : \mu = \mu_1, \ \mu_1 > \mu_0 \quad (\mu_1 - \mu_0 \text{ fiind foarte mică}).$$

Atunci $S(b^*, a^*)$ este definit de inegalitatea critică (48), unde

$$b^* \simeq \ln [\beta/(1 - \alpha)] \quad \text{şi} \quad a^* \simeq \ln [(1 - \beta)/\alpha].$$

$S(b^*, a^*)$ are probabilităţile erorilor

$$\alpha(\mu_0) \simeq \alpha \quad \text{şi} \quad \beta(\mu_1) \simeq \beta.$$

Testul trunchiat $S(b^*, a^*, N)$ este definit de (48) pentru $n = 1, \ldots, N$. Dacă

$$h_a + sN < N\bar{X}_N < h_r + sN,$$

$S(b^*, a^*, N)$ acceptă H_0 pentru $\bar{X}_N \leqslant (\mu_0 + \mu_1)/2$ şi respinge H_0 în rest. (135) dă marginile superioare ale probabilităţilor erorilor pentru $S(b^*, a^*, N)$ ca

$$\alpha_N(\mu_0) \leqslant \bar{\alpha}_N(\mu_0) = \alpha + \Phi\left(\frac{\ln [(1 - \beta)/\alpha] + N\delta^2/2}{\delta\sqrt{N}}\right) - \Phi\left(\frac{\delta\sqrt{N}}{2}\right),$$

$$\beta_N(\mu_1) \leqslant \bar{\beta}_N(\mu_1) = \beta + \Phi\left(\frac{\ln [(1 - \alpha)/\beta] + N\delta^2/2}{\delta\sqrt{N}}\right) - \Phi\left(\frac{\delta\sqrt{N}}{2}\right),$$

$\delta = (\mu_1 - \mu_0)/\sigma$ (Wald (1945)).

6.2. Grupare

Dat şirul de variabile aleatoare $\{x_i\}$ $i = 1, 2, \ldots$ care pot fi observate succesiv, considerăm problema alegerii între densităţile

$$f_n(x_1, \ldots, x_n ; \theta) \quad \text{şi} \quad f_n(x_1, \ldots, x_n ; \theta_1)$$

corespunzătoare vectorului $(x_1, \ldots, x_n)$, pentru fiecare n, cu probabilităţile erorilor (α, β) specificate. T.S.R.P. $S(b, a)$ definit în (4) este corespunzător cînd la pasul i al selecţiei a fost observat numai x_i. Pe de altă parte, în multe cercetări datele sînt adunate în grupuri de mărime prestabilită la paşii succesivi ai selecţiei. Cu alte cuvinte se observă la pasul i vectorul

$$X_i(m_i) = (x_{m_1 + \ldots + m_{i-1} + 1} ; \ldots, x_{m_1 + \ldots + m_i}), \quad \text{cu} \quad m_0 = 0, \quad m_i \geqslant 1.$$

În acest caz vom spune că datele sînt luate în grupe de mărime $\{m_i\}$.

Scanned with OKEN Scanner

Rezultatele obținute în paragrafele anterioare pot fi extinse la orice T.S.R.P. grupat $S_g(b, a)$, $b < 0 < a$, pentru (2) bazat pe $\{X_i(m_i)\}$. Regulile de decizie ale $S_g(b, a)$ sînt ca în (4), unde x_{n+1} și Z_n sînt înlocuite prin $X_{n+1}(m_{n+1})$ și respectiv Z'_n

$$Z'_n = \sum_{i=1}^{n} z'_i, \quad z'_1 = \ln \frac{f_{M_1}(x_1, \ldots, x_{M_1}; \theta_1)}{f_{M_1}(x_1, \ldots, x_{M_1}; \theta_0)}, \quad M_i = \sum_{j=1}^{i} m_j,$$

$$z'_i = \ln \frac{f_{M_i}(x_1, \ldots, x_{M_i}; \theta_1) f_{M_i - m_i}(x_1, \ldots, x_{M_i - m_i}; \theta_0)}{f_{M_i}(x_1, \ldots, x_{M_i}; \theta_0) f_{M_i - m_i}(x_1, \ldots, x_{M_i - m_i}; \theta_1)}, \quad i > 1.$$

În acest caz, V.D.S. n este interpretat ca numărul decisiv de grupuri la luarea deciziei. Atunci $M_g(b; \theta)$, dacă există, numărul mediu de grupuri, în timp ce

$$N(\theta) = \sum_{i=1}^{\infty} (m_1 + \ldots + m_n) P(n = n | \theta)$$

este numărul mediu de observații cerut de $S_g(b, a)$. $N(\theta)$ se poate numi funcția V.M.V.S. a testului $S_g(b, a)$, deoarece este comparabil în scop cu $M(n; \theta)$ a testului $S(b, a)$ și în particular că

$$N(\theta) = m\, M_g(n; \theta) \quad \text{dacă} \quad m_i = m \text{ pentru toți } i.$$

Date $\{m_i\}$, α și β, $S_g(b', a')$ este T.S.R.P. grupat U.C.M.E.; b' și a' sînt determinate rezolvînd inegalitățile stricte

$$Q_g(\theta_0) \geqslant 1 - \alpha \quad \text{și} \quad Q_g(\theta_1) \leqslant \beta.$$

Dacă excesele lui Z'_n față de b și a sînt mici, atunci

$$b' \simeq \ln [\beta/(1 - \alpha)] \quad \text{și} \quad a' \simeq \ln [(1 - \beta)/\alpha].$$

Dacă $\{z'_i\}$ sînt independente și identic repartizate și $S_g(b', a')$ atinge (α, β), $S_g(b', a')$ minimizează media numărului de grupe (și prin urmare V.M.V.S.) cînd $\theta = \theta_0$ sau θ_1, pentru toate testele valide pentru (2) care sînt bazate pe $\{X_i(m_i)\}$. $Q_g(\theta)$ este aproximativ dată de (66) și $M_g(n; \theta)$ de (69). Marginile date în § 4.6 și § 4.7 sînt de asemenea aplicabile pentru $Q_g(\theta)$ și $M_g(n; \theta)$ dacă se înlocuiește $\{z_i\}$ prin $\{z'_i\}$.

Testul optim bazat pe o selecție de volum fixat pentru (2) folosind grupul de mărime $\{m_i\}$ este definit de regiunea critică

$$Z'_n(x) > c(\alpha, \beta)$$

unde $n = n_g(\alpha, \beta)$ și $c(\alpha, \beta)$ sînt determinate în (XIII.3.1) cu $x = (X_1(m_1), \ldots, X_n(m_n))$.

Dacă $m_i = 1$ pentru toți i, atunci $S_g(b, a) \equiv S(b, a)$.

Deoarece repartițiile statisticilor Z_n și Z'_n sînt în general diferite (cu excepția cazului $m_i = 1$ pentru toți i), urmează că proprietățile testelor $S(b, a)$ și $S_g(b, a)$ nu sînt aceleași.

Scanned with OKEN Scanner

În cazul în care $\{x_i\}$ sînt independente și identic repartizate și $m_i = m \geqslant 1$ pentru toți i cercetăm funcțiile C.O. și V.M.V.S., și probabilitățile erorilor asociate cu $S(b, a)$ și $S_g(b, a)$. Avem

$$Z_n = \sum_{i=1}^{n} z_i, \quad Z'_n = \sum_{i=1}^{n} z'_i, \quad z'_i = \sum_{j=1}^{m} z_j, \quad z_i = \ln \frac{f(x_i ; \theta_1)}{f(x_i ; \theta_0)},$$

$$[G_z(h ; \theta)]^m = G_{z'}(h ; \theta), \quad mM(z ; \theta) = M(z' ; \theta), \quad mD^2(z ; \theta) = D^2(z' ; \theta),$$

unde $G_z(h ; \theta)$ este funcția generatoare de momente comună lui $\{z_i\}$. Acum, deoarece terminarea sub $S_g(b, a)$ cu N sau cu mai puține observații $\{x_i\}$ implică terminarea sub $S(b, a)$ cu N sau mai puține observații, însă nu și invers, avem :

$$M(n ; \theta) \leqslant N(\theta) = mM_g(n ; \theta) \text{ pentru toți } \theta \in \Theta.$$

Pe de altă parte din cele două inegalități din (14) urmează că probabilitățile erorilor testelor $S(b, a)$ și $S_g(b, a)$ trebuie să satisfacă

$$\alpha(\theta_0) + \beta(\theta_1) \geqslant \alpha_g(\theta_0) + \beta_g(\theta_1).$$

Teorema 3 implicată că, dacă se folosește $S_g(b, a)$ în locul testului $S(b, a)$, se poate reduce una sau amîndouă probabilitățile erorilor.

Cu aproximațiile lui Wald, pentru aceste două teste găsim

$$Q(\theta) \simeq \widetilde{Q}(\theta) = \widetilde{Q}_g(\theta) \simeq Q_g(\theta), \; M(n ; \theta) \simeq \widetilde{\widetilde{M}}(\theta) = m\widetilde{\widetilde{M}}_g(\theta) \simeq mM_g(n\theta)$$

unde $\widetilde{Q}(\theta)$ este dată de (66), $h(\theta) \neq 0$ este determinată de $G_z(h ; \theta) = 0$, și $\widetilde{\widetilde{M}}(\theta)$ este dată de (69) cu $Q(\theta)$ înlocuit cu $\widetilde{Q}(\theta)$. Dacă $|M(z ; \theta)|$ și $D^2(z ; \theta)$ sînt foarte mici, aproximațiile lui Wald sînt adecvate pentru funcțiile C.O. și V.M.V.S. ale testelor $S(b, a)$ și $S_g(b, a)$. Date orice $|M(z ; \theta)|$ și $D^2(z ; \theta)$ aproximațiile lui Wald $\widetilde{Q}_g(\theta)$ și $\widetilde{\widetilde{M}}_g(\theta)$ devin progresiv mai puțin precise cînd m crește.

Manly (1967) dă o aproximație alternativă pentru $M_g(n ; \theta)$.

§ 7. Proprietăți ale testului secvențial al raportului probabilităților generalizat

Eisenberg, Ghosh, Simons (1976) consideră testul secvențial al raportului probabilităților generalizat (T.S.R.P.G.) care nu este necesar bazat pe observații independente sau identic repartizate pentru a distinge între măsurile probabilistice P și Q. Arată că dacă T este orice test într-o clasă largă de T.S.R.P.G. incluzînd toate T.S.R.P. și T' este orice test rival care are probabilitățile erorilor și volumul selecție nu mai mari decît acelea ale lui T, atunci T' trebuie să fie echivalent cu T. Această noțiune de optimalitate a testului T este mai slabă decît aceia a lui Kiefer, Weiss (1957) însă rezultatele obținute sînt mai puternice.

Scanned with OKEN Scanner

Există exemple de T.S.R.P. pentru care modelul variabile aleatoare *independente și identic repartizate* (i.i.r.) nu este corespunzător. Acestea includ un număr de teste invariante, astfel ca testele secvențiale t, t^2, χ^2, F, T^2 și de rang (Hall, Wijsman, Ghosh (1965) și B. K. Ghosh (1970)). Mai recent, Robbins, Siegmund (1974) au introdus o familie de T.S.R.P. în contextul planurilor secvențiale. Cu toate că aceste exemple apar în prezența selecțiilor aleatoare, modelul i.i.r. nu este corespunzător deoarece rapoartele de verosimilități folosite în aceste teste nu sînt definite direct din selecții. Proprietățile acestor teste au fost cercetate individual. Eisenberg, Ghosh, Simons (1976) examinează ce se poate și ce nu se poate spune despre T.S.R.P. în general, cînd toate presupunerile privind modul în care au fost generate și folosite datele sînt pierdute. Multe dintre aceste rezultate sînt descrise mai general de T.S.R.P.G. Generalizările de acest fel vor prezenta interes deoarece sînt T.S.R.P.G. recomandate în literatură (Armitage (1957) și Anderson (1960)) care includ cel puțin unul pentru care modelul i.i.r. nu este corespunzător (Meyers, Schneiderman, Armitage (1966)).

DEFINIȚIA 9. (Keifer, Weiss (1957)). Un test secvențial pentru a decide între P și Q a cărui variabilă de stopare este N și ale cărui probabilități ale erorilor sînt α și β este *inadmisibil* dacă există un test alternativ T' cu variabila de stopare N' și probabilitățile erorilor α' și β', astfel încît

$$\alpha' \leqslant \alpha, \quad \beta' \leqslant \beta, \quad P(N' > n) \leqslant P(N > n),$$

$$Q(N' > n) \leqslant Q(N > n), \quad n = 1,2, \ldots$$

cu cel puțin una dintre aceste inegalități strictă.

T este admisibil dacă un astfel de test T' nu există.

DEFINIȚIA 10. Testul T este *puternic inadmisibil* dacă există un test alternativ T' care nu numai că depășește T în sensul admisibilității însă oprește experimentul nu mai tîrziu decît T sub P și Q.

T este *slab inadmisibil* dacă un astfel de T' nu există. Nu orice T.S.R.P.G. este slab admisibil. Totuși, un T.S.R.P.G. este slab admisibil în modelul general dacă

$$0 \leqslant A_{n+1} \leqslant A_n \leqslant B_n \leqslant B_{n+1} \leqslant \infty$$

pentru fiecare n, unde $A_n(B_n)$ sînt marginile inferioare (superioare) ale testului.

Kiefer, Weiss (1957) demonstrează că în modelul i.i.r. nu este posibilă o caracterizare simplă a admisibilității. Situația nu este mai bună pentru admisibilitatea slabă în modelul general.

Pentru orice T.S.R.P.G., sub modelul general, are loc următorul sistem de inegalități.

$$A_n P(N > n) \leqslant Q(N > n) \leqslant B_n P(N > n), \qquad n \geqslant 1. \tag{137}$$

Aceste inegalități implică (cînd $\inf A_n > 0$ și $\sup B_n < \infty$) că fiecare T.S.R.P.G. oprește experimentul cu probabilitatea unu sub cele două măsuri probabilistice sau sub nici una.

Fie P și Q măsuri probabilistice fixate pe spațiul măsurabil $(\Omega, \mathcal{F})$. Obișnuit se introduce un șir de variabile aleatoare $X_1, X_2, \ldots$ ce reprezintă datele potențiale și se definește șirul rapoartelor de verosimilități

$$\lambda_n = q_n(X_1, \ldots, X_n)/p_n(X_1, \ldots, X_n), \qquad n \geqslant 1,$$

Scanned with OKEN Scanner

unde p_n și q_n sînt densităţile pentru $X_1, \ldots, X_n$ în raport cu o măsură comună, sub P și respectiv Q. Totuși acest model este de asemenea restrictiv deoarece el nu permite rapoarte de verosimilităţi bazate pe invarianţi maximali (ca în Robbins, Siegmund (1974)). Savage și Savage (1965) au rezolvat această problemă într-un caz particular lucrînd cu date de dimensiuni crescătoare. Soluţia generală se obţine introducînd următorul model general.

Fie

$$\mathcal{E}_1 \subset \mathcal{E}_2 \subset \ldots \subset \mathcal{E}_\infty \subset \mathcal{F}$$

un șir de σ-cîmpuri unde $\mathcal{E}_n$ reprezintă *informaţia* disponibilă la pasul n al experimentului. Raportul de verosimilităţi λ_n asociat cu pasul n al experimentului este definit direct în termeni de $\mathcal{E}_n$. Variabila aleatoare nenegativă λ va purta numele de raportul de verosimilităţi pentru σ-cîmpul $\mathcal{E} \subset \mathcal{F}$ dacă este $\mathcal{E}$-măsurabil și

$$(138) \qquad Q(E, \lambda \neq \infty) = \int_E \lambda \, dP, \quad P(E, \lambda \neq 0) = \int_E \lambda^{-1} \, dQ, \quad E \in \mathcal{E},$$

unde $\lambda^{-1} = 0$ cînd $\lambda = \infty$. Se verifică că λ există întotdeauna și este unic în raport cu P și Q. Mai mult dacă $\mathcal{E}$ este generat de aplicaţia aleatoare X, atunci λ devine raportul de verosimilităţi al lui X în sensul obișnuit al raportului de densităţi.

DEFINIŢIA 11. O variabilă de stopare N este o variabilă aleatoare care ia valori în mulţimea $\{1, 2, \ldots, \infty\}$ astfel că evenimentul $[N = n] \in \mathcal{E}_n$ pentru fiecare $n = 1, 2, \ldots, \infty$. Fie $\mathcal{E}_n$ σ — cîmpul de evenimente pînă la timpul N, adică de evenimente E astfel ca

$$E \cap [N = n] \in \mathcal{E}_n \text{ pentru fiecare } n.$$

Urmează că variabila aleatoare λ_N care concordă cu λ_n pe $[N = n]$ este raportul de verosimilităţi al lui $\mathcal{E}_N$.

DEFINIŢIA 12. *O decizie* D este o aplicaţie aleatoare care ia valori în *spaţiul acţiunilor* $\{P, Q, \Delta\}$ astfel că evenimentul $[D = a] \in \mathcal{E}_N$ pentru fiecare acţiune a și astfel că $[D = \Delta] = [N = \infty]$. Realizarea evenimentului $[D = P]$ ($[D = Q]$) va fi interpretată ca arătînd că ipoteza nulă (alternativă), că P(Q) este măsura probabilistică adevărată, a fost acceptată. Realizarea evenimentului $[D = \Delta]$ arată că nici o ipoteză nu este acceptată.

DEFINIŢIA 13. Un test T este o pereche (N, D). Probabilităţile erorilor pentru T sînt definite de

$$\alpha = P(D = Q) \quad \text{și} \quad \beta = Q(D = P)$$

DEFINIŢIA 14. Vom spune că două teste $T = (N, D)$ și $T' = (N', D')$ sînt *echivalente* dacă

$$P(N = N', \ D = D') = Q(N = N', \ D = D') = 1.$$

Scanned with OKEN Scanner

DEFINIȚIA 15. Testul secvențial al raportului de verosimilități generalizat (T.S.R.P.G.) este un test $T = (N, D)$ de forma

$$N = \text{primul } n \geq 1 \text{ astfel ca } \lambda_n \notin (A_n, B_n),$$
$$= \infty \text{ dacă un astfel de } n \text{ nu există,}$$

(139)
$$D = P \text{ pe } [N < \infty, \lambda_N \leq A_n], \text{ și}$$
$$= Q \text{ pe } [N < \infty, \lambda_N \geq B_N],$$

unde: $-A_n$ și B_n, $0 \leq A_n \leq B_n \leq \infty$ sînt constante fixate pentru $n = 1,2,\ldots$

$-D$ este definit ca P dacă $\lambda_N = A_N = B_N = 0$ și ca Q dacă $\lambda_N = A_N = B_N = \infty$

$-D$ poate fi definit ca P sau Q într-un mod arbitrar, sau prin aleatorizare (restricția $[D = a] \in \mathcal{E}_N$ nu este o barieră în calea aleatorizării).

Pe scurt testul va fi notat $S(A_n, B_n)$.

Dacă fiecare $A_n = A$ și fiecare $B_n = B$, cu $A < B$, testul $T = S(A, B)$ este testul secvențial al raportului de verosimilități (T.S.R.P.).

În cele ce urmează vom nota T.S.R.P.G. prin $T = (N, D)$ și prin $T' = (N', D')$ cu probabilitățile erorilor α' și β' testul competitoriu.

Dacă $T = (N, D)$ este T.S.R.P.G. $S(A_n, B_n)$, atunci $A_n < \lambda_n < B_n$ cînd $N > n$ și (137) se obține luînd în (138) $\mathcal{E} = \mathcal{E}_n$ și $E = [N = n]$.

Alternativ, dacă T este T.S.R.P. $S(A, B)$ și luăm $\mathcal{E} = \mathcal{E}_M$ și $E = [D = P]$, atunci $\lambda_N \leq A$ pe E și urmează inegalitatea

$$\beta \leq A(1 - \alpha).$$

Inegalitatea $\alpha \leq B^{-1}(1 - \beta)$.

De fapt este posibil să se obțină inegalitatea fundamentală (Bahadur (1958)) din (138).

LEMA 3. (Eisenberg, Ghosh, Simons (1976)). *Fie* $T = (N, D)$ T.S.R.P.G. $S(A_n, B_n)$. *Atunci pentru fiecare eveniment* $E \in \mathcal{E}_N$,

(140) $$Q(E \cap [D = Q] \cap [\lambda_n \neq \infty]) \geq (\inf B_n) P(E \cap [D = Q])$$

și

(141) $$P(E \cap [D = P] \cap [\lambda_N \neq 0]) \geq (\sup A_n)^{-1} Q(E \cap [D = P]).$$

Observație. În această lemă și teoria care urmează produsul $\infty . c$ va fi interpretat ca ∞ pentru $c > 0$, ca 0 pentru $c = 0$ și $-\infty$ pentru $c < 0$. Dacă fiecare $B_n = \infty$, (140) implică $\alpha = P(D = Q) = 0$.

Demonstrație. În (138) luăm $\mathcal{E} = \mathcal{E}_N$. Atunci $E \cap [D = Q] \in \mathcal{E}$ și

$$Q(E \cap [D = Q] \cap [\lambda_N \neq \infty]) = \int_{E \cap [D = Q]} \lambda_N \, dP.$$

TEOREMA 11. (Eisenberg, Ghosh, Simons (1976)). *Fie* $T = (N, D)$ T.S.R.P.G. $S(A_n, B_n)$ *și* $T' = (N', D')$ *orice alt test pentru care* $N' \leq N$. a.s. *sub* P *și* Q. *Mai departe, se presupune* $\sup A_n \leq \inf B_n$. *Atunci pentru fiecare* $c \in [\sup A_n, \inf B_n]$,

(142) $$c(\alpha' - \alpha - p) + (\beta' - \beta - q) \geq 0$$

Scanned with OKEN Scanner

şi

$$(\alpha' - \alpha - p) + c^{-1}(\beta' - \beta - q) \geqslant 0, \tag{143}$$

unde

$$p = P(D = \Delta,\ D' = Q) + P(D = P,\ \lambda_N = 0,\ D' = Q),$$

$$q = Q(D = \Delta,\ D' = P) + Q(D = Q,\ \lambda_N = \infty,\ D' = P).$$

Observaţie. Cele două inegalităţi (142) şi (143) nu sînt întotdeauna echivalente. Inegalitatea (143) este mai informativă decît (142) cînd $c = 0$ (astfel ca $c^{-1} = \infty$) şi (142) este mai informativă cînd $c = \infty$ (astfel ca $c^{-1} = 0$).

COROLARUL 2. *În presupunerile teoremei* 11, *dacă* $\alpha' \leqslant \alpha$ *şi* $\beta' \leqslant \beta$, *atunci* $\alpha' = \alpha$ *şi* $\beta' = \beta$.

COROLARUL 3. *Dacă în plus faţă de presupunerile teoremei* 11

$$\sup A_n \leqslant 1 \leqslant \inf B_n,$$

atunci

$$\alpha' + \beta' \geqslant \alpha + \beta. \tag{144}$$

Corolarul 2 arată, printre altele, că în presupunerile făcute

$$\alpha' < \alpha \Rightarrow \beta' > \beta \quad \text{şi} \quad \beta' < \beta \Rightarrow \alpha' > \alpha.$$

Contraexemplul 1 arată că, dacă presupunerea $\sup A_n \leqslant \inf B_n$ este călcată, nu trebuie să aibe loc aceste implicaţii.

Contraexemplul 1. În acest contraexemplu şi în cele ce urmează se dă numai informaţia necesară. Astfel se descriu numai variabilele aleatoare X_1 şi X_2 cînd N şi $N' \leqslant 2$. $T(N, D)$ va fi T.S.R.P.G. $S(A_n, B_n)$ şi $T' = (N', D')$ T.S.R.P. competitoriu

$$A_1 = 1, \quad B_1 = 2, \quad A_2 = 0, \quad B_2 = \frac{1}{2}$$

X_1	X_2	P	Q	λ_1	λ_2	$N = N'$	D	D'
−1	−1	1/4	0	0	0	1	P	P
0	−1	1/3	1/6	3/2	1/2	2	Q	P
0	1	1/6	7/12	3/2	7/2	2	Q	Q
1	1	1/4	1/4	1	1	1	P	Q

$$\alpha' = \frac{5}{12} < \frac{1}{2} = \alpha \text{ şi } \beta' = \frac{1}{6} < \frac{1}{4}\beta \cdot \max(A_1, A_2) = 1 > \frac{1}{2} = \min(B_1, B_2).$$

Astfel $\sup A_n > \inf B_n$.

Observaţie. Dacă $P(N = n) = Q(N = n) = 1$, corolarul 2 se reduce la lema Neyman-Pearson.

Presupunerile corolarului 2 nu implică că testul competitoriu T' nu poate fi superior T.S.R.P.G.T. Este posibil ca $\alpha' = \alpha$, $\beta' = \beta$ şi $N' < N$ cu (P şi Q) probabilitatea unu.

Scanned with OKEN Scanner

Contraexemplul 2. Fie X_1 o variabilă Bernoulli cu media $\frac{1}{3}$ sub P şi $\frac{2}{3}$ sub Q şi fie $X_2 \equiv 0$. Atunci $\lambda_1 = \lambda_2 = \frac{1}{2}$ dacă $X_1 = 0$ şi $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$ dacă $X_1 = 1$. Fie $A_1 = \frac{1}{4}$, $B_1 = 4$, $A_2 = \frac{1}{2}$, $B_2 = 2$ şi fie $T' = S\left(\frac{1}{2}, 2\right)$. Atunci $\alpha = \alpha' = \beta = \beta' = \frac{1}{3}$, $P(D = D') = Q(D = D') = 1$ şi $\max(A_1, A_2) = \frac{1}{2} < 2 = \min(B_1, B_2)$. Însă $N' \equiv 1$ şi $N \equiv 2$.

Mai departe, egalităţile $\alpha' = \alpha$ şi $\beta' = \beta$ (şi chiar $N' \equiv N$) nu implică că T' ia aceiaşi decizie ca T.

Contraexemplul 3. $A_1 = 1$, $B_2 = 2$, $A_2 = 0$, $B_2 = 1$

X_1	X_2	P	Q	λ_1	λ_2	$N = N'$	D	D'
−1	−1	1/4	0	0	0	1	P	P
0	−1	1/4	1/4	3/2	1	2	Q	P
0	1	1/4	1/2	3/2	2	2	Q	Q
1	1	1/4	1/4	1	1	1	P	Q

Aici, $\alpha = \alpha' = \frac{1}{2}$, $\beta = \beta' = \frac{1}{4}$, $N \equiv N'$ şi $\max(A_1, A_2) = \min(B_1, B_2) = 1$. Însă $P(D \neq D')$ şi $Q(D \neq D')$ sînt amîndouă pozitive.

LEMA 4. (Eisenberg, Ghosh, Simons (1976)). *Fie* $T = (N, D)$ T.S.R.P.G. *Atunci pentru fiecare întreg* $m \geqslant 1$ *şi orice eveniment* $E \in [N \geqslant m]\mathcal{E}_m$,

$$Q(E \cap [D = Q])P(E) \geqslant P(E \cap [D = Q])Q(E) \tag{145}$$

şi

$$P(E \cap [D = P])Q(E) \geqslant Q(E \cap [D = P])P(E). \tag{146}$$

Observaţie. Această lemă generalizează teorema 1 a lui J. K. Ghosh (1960). Dacă $P(E) > 0$ şi $Q(E) > 0$, atunci concluziile în (145) şi (146) pot fi de asemenea exprimate în termeni de probabilităţi condiţionate, adică

$$Q(D = Q \mid E) \geqslant P(D = Q \mid E) \quad \text{şi} \quad P(D = P \mid E) \geqslant Q(D = P \mid E).$$

Pentru demonstraţie a se vedea Eisenberg, Ghosh, Simons (1976) lema 2.

TEOREMA 12. (Eisenberg, Ghosh, Simons (1976)). *Fie* $T = (N, D)$ T.S.R.P.G. $S(A_n, B_n)$ *şi* $T' = (N', D')$ *orice alt test pentru care* $N' \leqslant N$ a.s. *sub* P *şi* Q. *Fie* $0 \leqslant \sup A_n < \inf B_n < \infty$. *Dacă*

$$\alpha' \leqslant \alpha \quad \text{şi} \quad \beta' \leqslant \beta$$

atunci

$$P(D' = D) = Q(D' = D) = 1.$$

În demonstraţie se folosesc lemele 3 şi 4.

Scanned with OKEN Scanner

COROLARUL 4. *Dacă în plus față de presupunerile teoremei* 12 *șirul* A_n *este necrescător și șirul* B_n *este nedescrescător, atunci testul* T' *este echivalent cu testul* T.

Demonstrație. În baza teoremei 12 este suficient să arătăm că

a) $P(D' = P,\ N > N') = 0$

b) $Q(D' = P,\ N > N') = 0$ și

c) $P(D' = Q,\ N > N') = Q(D' = Q,\ N > N') = 0.$

Demonstrația lui c) este similară cu demonstrațiile pentru a) și b). De asemenea din lema următoare rezultă că a) și b) sînt echivalente. În consecință trebuie să demonstrăm numai a). Teorema 12 va fi folosită în mai multe rînduri și (138) va fi folosit de două ori, odată cu $\mathcal{E} = \mathcal{E}_{N'}$, și odată cu $\mathcal{E} = \mathcal{E}_N$:

$$0 = Q(D' = P) - Q(D = P) \geqslant Q(D' = P,\ \lambda_N \neq \infty) - Q(D = P,$$

$$\lambda_N \neq \infty) = \int_{[D'=P]} \lambda_{N'}\,dP - \int_{[D=P]} \lambda_N\,dP = \int_{[D=D'=P,\,N>N']} (\lambda_{N'} - \lambda_N)\,dP$$

Însă pe $[D = D' = P,\ N > N']$, $\lambda_{N'} > A_{N'} \geqslant A_N \geqslant \lambda_N$ (din cauza faptului că șirul A_n este monoton). În consecință

$$P(D' = P,\ N > N') = P(D = D' = P,\ N > N') = 0.$$

Observație. Corolarul 4 arată că T.S.R.P.G. $S(A_n, B_n)$ este *slab admisibil* dacă $0 \leqslant A_{n+1} \leqslant A_n < B_n \leqslant B_{n+1} \leqslant \infty$ pentru $n \geqslant 1$. În particular, *fiecare T.S.R.P. este slab admisibil.* Pe de altă parte, testul raportului de verosimilități bazat pe o selecție de volum fix tratat ca T.S.R.P.G., nu satisface condițiile de marginire ale corolarului 4 și în fapt, nici un test al raportului de verosimilități bazat pe o selecție de volum fix nu este slab admisibil.

Vom spune că variabila de stopare N este *regulată* dacă, pentru fiecare $n \geqslant 1$, $N > n$ implică $\lambda_n \neq 0$ sau ∞.

Fiecare T.S.R.P.G. are o variabilă de stopare regulată.

LEMA 5. (Eisenberg, Ghosh, Simons (1976)). *Fie* N *o variabilă de stopare regulată și* N' *orice altă variabilă de stopare. Atunci, pentru orice eveniment* $E \in [N' < N]\mathcal{E}_{N'}$, $P(E) = 0$ *dacă și numai dacă* $Q(E) = 0$.

Demonstrație. Din (138) urmează că, pentru $E \in [\lambda \neq \infty]\mathcal{E}$, $P(E) = 0$ implică $Q(E) = 0$ și că, pentru $E \in [\lambda \neq 0]\mathcal{E}$, $Q(E)$ implică $P(E) = 0$. Astfel, este suficient să observăm că $[N' < N]$ este un subeveniment al evenimentului $[\lambda_{N'} \neq 0$ sau $\infty]$ cînd N este regulată.

Teoremele 11 și 12 iau în discuție T.S.R.P.G. $T = (N, D) = S(A_n, B_n)$ și testul competitoriu T'. În cele ce urmează vom considera un alt tip de test competitoriu. Presupunem că $T' = (N', D')$ este un al doilea T.S.R.P.G $S(A'_n, B'_n)$ cu marginile deasupra acelora corespunzătoare testului T, adică $A'_n \geqslant A_n$ și $B'_n \geqslant B_n$ pentru fiecare n.
Atunci, din considerații geometrice,

(147) $$D = P \Rightarrow D' = P \text{ și } N' \leqslant N,$$

(148) $$D' = Q \Rightarrow D = Q \text{ și } N \leqslant N'.$$

Scanned with OKEN Scanner

(cazul particular $N = N'$, $\lambda_N = A_N = B_N = A'_N = B'_N$, $D = P$, $D' = Q$ trebuie să fie exclus). Următoarea teoremă discută testul competitoriu $T' = (N', D')$ nu necesar T.S.R.P.G., care satisface (147) și (148).

TEOREMA 13. (Eisenberg, Ghosh, Simons (1976)). *Fie* $T = (N, D)$ T.S.R.P.G. $S(A_n, B_n)$ *și* $T' = (N', D')$ *orice alt test care satisface* (147) și (148). *Atunci*

I) $\alpha - \alpha' = P(D \neq D') - P(D = \Delta, D' = P) = P(D' \neq D = Q)$

II) $\beta' - \beta = Q(D \neq D') - Q(D = Q, D' = \Delta) = Q(D \neq D' = P)$

III) Dacă $\beta' = \beta$ atunci $\alpha - \alpha' = P(D \neq D') = P(D = Q, N' = \infty) + P(D = Q, D' = P, N < N')$.

IV) Dacă $\beta' = \beta$ și șirul A_n este necrescător, atunci $P(N' \geqslant N) = Q(N' \geqslant N) = 1$.

Contraexemplul 4. Fie $X_1(X_2)$ o variabilă Bernoulli cu media $\frac{1}{3}$ (zero) sub P și $\frac{2}{3}$ (unu) sub Q. Mai departe, fie $T = S\left(\frac{1}{2}, 2\right)$ și $T' = S\left(\frac{1}{2}, 3\right)$, astfel că T' este *deasupra* lui T. Atunci $Q(D \neq D' = P) = 0$. Însă $P(D \neq D' = P) = P(D \neq D' = P, \quad N < N') = P(X_1 = 1) = \frac{1}{3}$.

Teorema 13 afirma că $P(D \neq D' = P, N \geqslant N') = 0$.

Contraexemplul 4 demonstrează că condiția $Q(D \neq D' = P) = 0$ nu implică $P(D \neq D' = P) = 0$. Arată că ultima probabilitate în III) nu este superflu; poate fi pozitivă,

III) spune că

$$\alpha = \alpha' \quad \text{și} \quad \beta = \beta' \Rightarrow P(D = D') = 1.$$

Totuși implicația $Q(D = D') = 1$ nu este garantată în general.

Contraexemplul 5. Fie $X_1, X_2, \ldots$ variabile aleatoare independente identic repartizate Bernoulli cu media $\frac{1}{3}$ sub P și $\frac{2}{3}$ sub Q. Fie $T = S\left(\frac{1}{2}, 2\right)$ și definim

$$N' = \inf\{n \geqslant 1;\ \lambda_n \leqslant 1\},\ [D' = P] = [X_1 = 0],$$
$$[D' = Q] = [X_1 = 1,\ \lambda_n = 1 \text{ pentru } n \geqslant 2] \text{ și}$$
$$[D' = \Delta] = [N' = \infty] = [\lambda_n > 1,\ n \geqslant 1].$$

Atunci sînt satisfăcute (147) și (148), $\alpha = \alpha' = \beta' = \beta = \frac{1}{3}$ și $P(D = D') = 1$. Însă

$$Q(D \neq D') = Q(D = Q, \ D' = \Delta) = \frac{1}{3}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Însă dacă T' este T.S.R.P.G. $S(A'_n, B'_n)$ care satisface (147) și (148), atunci implicația $Q(D = D') = 1$ este garantată. Aceasta se poate vedea schimbînd în teorema 13 rolurile lui T și T' și ale lui P și Q. Mai mult, dacă în plus, șirul B'_n este nedescrescător, atunci $P(N' \leqslant N) = Q(N' \leqslant N) = 1$. În consecință avem

COROLARUL 5. *Fie* $T = (N, D)$ T.S.R.P.G. $S(A_n, B_n)$ *și* $T' = (N', D')$ *alt* T.S.R.P.G. $S(A'_n, B'_n)$ *care este deasupra lui* T (*adică care satisface* (147) *și* (148)). *Dacă* $\alpha = \alpha'$ *și* $\beta = \beta'$, *atunci*

$$P(D = D') = Q(D = D') = 1.$$

Dacă, în plus, șirul A_n *este necrescător și șirul* B'_n *este nedescrescător, atunci* T *și* T' *sînt teste echivalente.*

COROLARUL 6. *Fie* $T = (N, D)$ *și* $T' = (N', D')$ T.S.R.P. *pentru care* $\alpha' \leqslant \alpha$ *și* $\beta' \leqslant \beta$. *Atunci.*

I) $P(N \leqslant N') = Q(N \leqslant N') = 1$, $P(N = N', D \neq D') = Q(N = N', D \neq D') = 0$

II) *Dacă* $\alpha' = \alpha$ *și* $\beta' = \beta$, *atunci* T *și* T' *sînt echivalente.*

III) *Dacă* $\alpha' < \alpha$ *sau* $\beta' < \beta$, *atunci* $P(N < N')$ *și* $Q(N < N')$ *sînt amîndouă pozitive.*

În cele ce urmează se arată (cu ajutorul lemei Neyman Pearson) că numai o anumită clasă de T.S.R.P.G. pot fi slab admisibile.

Fie N orice variabilă de stopare. Pentru fiecare punct $k \in [0, \infty]$ și $\gamma \in [0, 1]$, definim un test aleator $T(k, \gamma) = (N, D(k, \gamma))$, unde

$$\begin{aligned} D(k, \gamma) &= P \text{ dacă } N < \infty \text{ și } \lambda_N < k, \\ &= Q \text{ dacă } N < \infty \text{ și } \lambda_N > k, \\ &= P \text{ cu probabilitatea } \gamma \text{ dacă } N < \infty \text{ și } \lambda_N = k, \\ &= Q \text{ cu probabilitatea } (1 - \gamma) \text{ dacă } N < \infty \text{ și } \lambda_N = k, \\ &= \Delta \text{ dacă } N = \infty. \end{aligned}$$

Fie $\alpha(k, \gamma)$ și $\beta(k, \gamma)$ probabilitățile erorilor pentru $T(k, \gamma)$. Vom considera că punctele (k, γ) în dreptunghiul $[0, \infty] \times [0, 1]$ sînt ordonate linear lexicografic. Atunci

i) $\alpha(k, \gamma)$ ($\beta(k, \gamma)$) este o funcție necrescătoare (nedescrescătoare) de (k, γ) și ia valori în intervalul $[0, P(N < \infty)]$ ($[0, Q(N < \infty)]$).

ii) Pentru o valoare $\alpha \in [0, P(N < \infty)]$ dată, ecuația $\alpha(k, \gamma) = \alpha$ are loc pentru cel puțin o valoare (k_0, γ_0).

iii) $T(k_0, \gamma_0)$ este C.M.P.T. de volum α printre toate testele a căror variabilă de stopare este N.

Ultimul rezultat este o versiune a lemei Neyman-Pearson. El rezultă din (138). În particular, dacă $T = (N, D)$ este un test cu probabilitățile erorilor α și β, atunci, cînd $k_0 < \infty$

$$(149) \qquad \beta - \beta(k_0, \gamma_0) \geqslant \int (\lambda_N - k_0)(I(D = P) - I(D(k_0, \gamma_0) = P))\, dP \geqslant 0$$

(unde $I(E) = 1$ dacă se realizează evenimentul E și 0 în rest) și cînd $k_0 = \infty$, $\alpha(k_0, \gamma_0) = \alpha = \gamma_0 = 0$ și

$$\beta(k_0, \gamma_0) = Q(N < \infty, \lambda_N \neq \infty) = \int_{[N < \infty]} \lambda_N\, dP = \int_{[D = P]} \lambda_N\, dP \leqslant \beta.$$

Scanned with OKEN Scanner

Dacă T este slab admisibil și $k_0 < \infty$, integrantul din (149) trebuie să fie zero a.s. (P) și urmează că

$$P(\lambda_N > k_0,\ D = P) = P(\lambda_N < k_0,\ D = Q) = 0. \tag{150}$$

Aceasta are loc și pentru $k = \infty$. Mai departe presupunem că T este T.S.R.P.G. $S(A_n, B_n)$. Definim $T' = (N', D') = S(A'_n, B'_n)$, unde $A'_n = \min(A_n, k_0)$, $B'_n = \max(B_n, k_0)$ și $D' = D$ dacă $\lambda_N = A_N = B_N = k_0$. Avem $N' \geqslant N$. Deoarece evenimentul $[N' > N]$ este conținut în reuniunea a două evenimente de P măsură nulă descrise în (150), $P(N = N') = 1$. Din lema 5 urmează că $Q(N = N') = 1$. Astfel, am demonstrat

TEOREMA 14. (Eisenberg, Ghosh, Simons (1976)). *T.S.R.P.G. slab admisibil este echivalent cu un* T.S.R.P.G. $S(A_n, B_n)$ *pentru care* $\sup A_n \leqslant \inf B_n$.

§ 8. Proprietăți asimptotice ale T.S.R.P.

În acest paragraf prezentăm, după Berk (1973), comportarea asimptotică a probabilităților erorilor și a V.M.V.S. a T.S.R.P. al lui Wald. Presupune, că sub H_i, $i = 0, 1$, variabilele $X_1, X_2, \ldots$ sînt independente și identic repartizate cu densitatea f_i. T.S.R.P. al lui Wald pentru H_0 față de H_1 dă timpul de stopare

$$N = \inf\{n : S_n \notin (b, a)\}. \tag{151}$$

unde $S_n = \sum_1^n Z_j$, $Z_j = \ln[f_1(x_j)/f_0(x_j)]$ și (b, a) sînt două numere pozitive (presupunem că Z este finită cu probabilitatea unu). Erorile sînt notate prin α și β. Adică

$$\alpha = P_0(S_N \geqslant a) \quad \text{și} \quad \beta = P_1(S_N \leqslant b).$$

Vom numi (α, β) stingența testului. Inegalitățile lui Wald (1947) pentru (α, β) pot fi scrise ca

$$\beta \leqslant (1 - \alpha)\, e^b, \quad \alpha \leqslant (1 - \beta)\, e^{-a}. \tag{152}$$

Dacă $X_1, X_2, \ldots$ sînt variabile aleatoare independente identic repartizate și $P(Z = 0) < 1$, atunci pentru $t > 0$, $M(e^{tN}) < \infty$ (Aici P și M se referă la repartiția adevărată a lui X, care nu trebuie să fie f_0 sau f_1). În particular $MN < \infty$. În acest paragraf vom presupune că $P(Z = 0) < 1$. Presupunem că

$$c = \min(-b, a) \to \infty.$$

Avem

$$\lim_{c\to\infty} \alpha = \lim_{c\to\infty} \beta = 0 \quad \text{și} \quad \lim_{c\to\infty} N = \infty \ (\lim_{c\to\infty} MN = \infty)$$

Următoarea teoremă stabilește mai precis comportarea asimptotică a lui N și MN.

TEOREMA 15. (Berk (1973). *Presupunem că* X, X_1, X_2, ..., *sînt variabile aleatoare independente identic repartizate și că există* $\mu = MZ$.

Scanned with OKEN Scanner

Atunci dacă $\mu > 0$,

i) $\lim_c I_{(S_n \geqslant a)} = \lim_c P(S_N \geqslant a) = 1$,

ii) $\lim_c N/a = \lim_c MN/a = 1/\mu$.

Dacă $\mu < 0$,

iii) $\lim_c I_{(S_n \leqslant b)} = \lim_c P(S_N \leqslant b) = 1$,

ii) $\lim_c \{N/b\} = \lim_c \{MN/b\} = 1/\mu$.

Demonstrație. Tratăm cazul $\mu > 0$. Deoarece

$$\lim_n S_n/n = \mu, \text{ avem de asemenea } \lim_n S_n = \infty.$$

Astfel, $S_* = \min_n S_n$ este finită. Atunci avem

$$I_{(S_n < b)} \leqslant I_{(S_N^* < b)} \to 0 \quad \text{cînd} \quad c \to \infty.$$

Astfel, $\lim_c I_{(S_N \geqslant a)} = 1$ și după convergența dominată, $\lim_c P(S_N \geqslant a) = 1$. Deoarece $\lim_c N = \infty$, $\lim_c S_N/N = \mu$. Din definiția lui N,

$$S_{N-1} I_{(S_N \geqslant a)} < a I_{(S_N \geqslant a)} \leqslant S_N I_{(S_N \geqslant a)}.$$

Împărțind prin N și făcînd pe $c \to \infty$, termenii extremi se apropie de μ; astfel

$$\lim_c a/N = \mu \quad \text{sau} \quad \lim_c N/a = 1/\mu.$$

Din lema lui Fatou,

$$\lim_c MN/a \geqslant 1/\mu.$$

Fie $t = \inf\{n : S_n \geqslant a\}$. Avem $N \leqslant t$. După Siegmund (1967) urmează că în presupunerile noastre $\lim_c MN/a = 1/\mu$. Deci de asemenea $\limsup_a MN/a \leqslant 1/\mu$. Demonstrația teoremei pentru $\mu < 0$ este asemănătoare.

Teorema 15 arată că aproximația lui Wald pentru V.M.V.S. este asimptotic corectă. Această aproximație se aplică cînd $0 < |\mu| < \infty$ și poate fi scrisă ca

$$MN \simeq [bP(S_N \leqslant b) + aP(S_N \geqslant a)]/\mu. \tag{153}$$

După teorema 15, raportul celor doi membri din (153) se apropie de unu cînd $c \to \infty$. Din inegalitățile lui Wald (152) se pot obține inegalitățile

$$\alpha \leqslant e^{-a}, \quad \beta \leqslant e^{b}. \tag{154}$$

Următoarea teoremă arată că asimptotic, inegalitățile (154), într-un anumit sens, sînt egalități.

Scanned with OKEN Scanner

TEOREMA 16. (Berk (1973)). *Fie* X, $X_1, \ldots$ *variabile aleatoare independente, identic repartizate şi* $M_i|Z| < \infty$ *pentru* $i = 0, 1$. *Atunci*

$$\lim_c a^{-1} \ln \alpha^{-1} = \lim_c b^{-1} \ln \beta^{-1} = 1.$$

Demonstraţie. Fie $\mu_i = M_i Z$. Necesar $\mu_0 < 0 < \mu$. Wald (1947 p. 197) dă următoarea inegalitate

(155) $M_1 S_N = \mu_1 M_1 N \geqslant (1 - \beta) \ln [(1 - \beta)/\alpha] + \beta \ln [\beta/(1 - \alpha)]$.

Din (154) $\alpha = 0(1) = \beta$ cînd $c \to \infty$. După ce împărţim în (155) prin a, obţinem

$$\mu_1 M_1 N/a \geqslant a^{-1} \ln \alpha^{-1} [1 + 0(1)].$$

Din teorema 15 avem: $\lim_c \mu_1 M_1 N/a = 1$; deci

$$\limsup_c a^{-1} \ln \alpha^{-1} \leqslant 1.$$

Dacă (154) $a^{-1} \ln \alpha^{-1} \geqslant 1$ şi deci $\lim_c a^{-1} \ln \alpha^{-1} = 1$. Demonstraţia pentru β este analogă.

Observaţie. Acest rezultat arată de asemenea că aproximaţiile lui Wald pentru probabilităţile erorilor obţinute tratînd relaţiile (152) ca egalităţi şi rezolvînd pentru (α, β) sînt asimptotic corecte în sensul teoremei.

Pentru curba puterii T.S.R.P. se obţine o aproximaţie cu presupunerea suplimentară că pentru un $h \neq 0$ real $M(e^{hZ}) = 1$. În notaţiile anterioare aproximaţia puterii poate fi scrisă ca

$$P(S_N \geqslant a) = (1 - e^{hb})/(e^{ha} - e^{hb}).$$

Teorema 16 în conjuncţie cu considerarea T.S.R.P. ca fiind generat de $S'_n = hS_n$ cu marginile de stopare $(b', a') = (hb, ha)$ dacă $h > 0$ [respectiv $(b', a') = (ha, hb)$ dacă $h < 0$] stabilesc următorul corolar.

COROLARUL 7. *Fie* X, $X_1, \ldots$ *variabile aleatoare independente şi identic repartizate,* $M|Z| < \infty$ *şi pentru* $h \neq 0$, $M(e^{hZ}) = 1$. *Atunci*

$$\lim_c (-ha)^{-1} \ln P(S_N \geqslant a) = 1, \qquad h > 0$$

$$\lim_c (hb)^{-1} \ln P(S_N \leqslant b) = 1, \qquad h < 0.$$

Demonstraţie. Reamintim că S'_n este logaritmul raportului de verosimilităţi pentru $X_1, \ldots, X_n$ sub două repartiţii independente, cu repartiţia adevărată a lui X la numărător. Astfel se aplică teorema 16.

Notăm că dată existenţa lui h, avem

$$MhZ < \ln M(e^{hZ}) = 0,$$

astfel ca $\mu = MZ \neq 0$ şi este opus ca semn lui h. Cînd $MZ = 0$, comportarea lui MN este substanţial diferită de aceea dată în teorema 15.

Scanned with OKEN Scanner

TEOREMA 17. (Berk (1973)) *Fie* $X, X_1, X_2, \ldots$ *variabile aleatoare independente şi identic repartizate cu* $\sigma^2 = MZ^2 < \infty$ *şi* $MZ = 0$. *Fie* $d = a - b$ *şi pentru* $j > 0$ *fie*

$$\Phi_j(d) = \max [\sup \{M([Z^+ - \mu]^j \mid Z^+ \geqslant u);\ 0 \leqslant u \leqslant d\},$$

$$\sup \{M([Z^- - \mu]^j \mid Z^- \geqslant u) : 0 \leqslant u \leqslant d\}].$$

Dacă $d = 0(c)$ *sau* $\Phi_1(d) = 0(c)$, *atunci luînd* $p = P(S_N \geqslant a)$ *şi* $\pi = -b/d$,

$$\lim_c p/\pi = 1 = \lim_c (1-p)/(1-\pi). \tag{156}$$

Dacă condiţiile anterioare sînt restrînse la $d = 0(c)$ *sau* $\Phi_2(d) = 0(c^2)$, *atunci*

$$\lim_c \sigma^2 MN/(-ab) = 1, \tag{157}$$

unde $Z^+ = Z (Z^- = Z)$ *dacă* $Z > 0$ ($Z < 0$ *şi zero în rest.*

Observaţie. Teorema 17, arată că pentru $MZ = 0$ şi $MZ^2 < \infty$, aproximaţiile lui Wald pentru putere şi V.M.V.S. sînt, în anumite condiţii de regularitate, asimptotic exacte.

Demonstraţie. Fie

$$\Delta^- = S_N^- + bI_{(S_N \leqslant b)}, \quad \Delta^+ = S_N^+ - aI_{(S_N \geqslant a)}. \tag{158}$$

Astfel $\Delta = \Delta^+ + \Delta^-$ este mărimea depăşirii. După ce luăm media în (158) (şi notînd că după lema lui Wald, $MS_N = 0$ astfel că $MS_N^+ = MS_N^- = M|S_N|/2$), prin scădere obţinem

$$-b(1-p) - ap = M\Delta^+ - M\Delta^-. \tag{159}$$

Împărţind prin $-b$ ultima relaţie obţinem :

$$[p/\pi - 1| \leqslant M\Delta/(-b). \tag{160}$$

O margine pentru media depăşirii este dată de

$$M\Delta \leqslant \Phi_1(d). \tag{161}$$

Aceasta este o variantă a marginii date de Wald (1947). Astfel dacă $\Phi_1(d) = 0(c)$, (160) şi (161) implică că

$$p/\pi - 1 = 0(1)$$

şi deci prima relaţie din (156) are loc. A doua relaţie din (156) urmează similar, împărţind (159) prin a.
Presupunem acum că $d = 0(c)$. Arătăm că aceasta antrenează

$$M\Delta^2 = 0(c^2) \tag{162}$$

Începem notînd că

$$(S_N - a)(S_N - b) \geqslant 0,$$

Scanned with OKEN Scanner

deci

$$0 \leqslant M(S_N^2 - (b+a)S_N + ab) = \sigma^2 MN + ab \text{ (după lemele lui Wald)}$$

astfel

$$\sigma^2 MN/(-ab) \geqslant 1 \tag{163}$$

și în particular $\lim_c MN = \infty$. În continuare notăm că $\Delta \leqslant |Z_N|$ și din rezultatele lui Gundy, Siegmund (1967) urmează că în condițiile noastre

$$MZ_N^2 = 0(MN). \tag{164}$$

Pentru a stabili (162) trebuie să arătăm numai că

$$MN = 0(c^2). \tag{165}$$

Fie $t = \inf\{n : |S_n| \geqslant d\}$. Avem $N \leqslant t$. Mai mult

$$0 \leqslant (|S_t| - d)^2 \leqslant Z_t^2,$$

astfel ca

$$0 \leqslant \sigma^2 MT + d^2 \leqslant 2dM|S_t| + MZ_t^2 \leqslant$$

$$\leqslant 2d(MS_t^2)^{1/2} + MZ_t^2 = 2d\sigma(Mt)^{1/2} + MZ_t^2,$$

adică

$[\sigma(Mt)^{1/2} - d]^2 \leqslant MZ_t^2 = 0(Mt)$ care antrenează $d/\sigma(Mt)^{1/2} - 1 = 0(1)$.

Astfel

$$\lim_c \sigma^2 M(t)/d^2 = 1, \quad M(t) = 0(c^2) = 0(d^2)$$

și afortiori are loc (165) (acest rezultat pentru $M(t)$ este un caz particular al relației (157)). (162) împreună cu (160) antrenează (156).

Considerăm acum MN. Ridicăm la patrat relațiile (158), adunăm și luăm mediile; obținem:

$$\sigma^2 MN - dM|S_N| + a^2 p + b^2(1-p) = M\Delta^2, \tag{166}$$

astfel ca

$$\sigma^2 MN/(-ab) - dM|S_N|/(-ab) + (1-\pi)p/\pi + \tag{167}$$

$$+ \pi(1-p)/(1-\pi) = M\Delta^2/(-ab).$$

Presupunem mai întîi că $\Phi_2(d) = 0(c^2)$. Atunci, analog lui (161) $M\Delta^2 \leqslant \Phi_2(d)$, astfel ca $M\Delta^2 = 0(c^2)$.
Adunînd relațiile din (158) și luînd media obținem

$$M|S_N| - ap + b(1-p) = M\Delta.$$

Deci

$$dM|S_N|/(-ab) - p/\pi - (1-p)/(1-\pi) =$$

$$= dM\Delta/(-ab) \leqslant 2M\Delta/c = 0(1). \tag{168}$$

Adunînd (167) și (168) obținem (157).

Capitolul XXIII

DISCRIMINAREA DINTRE $k \geqslant 2$ IPOTEZE. SUFICIENȚA FRASER

§ 1. Problema celor două selecții și suficiența Fraser

1.1. Familii Darmois-Koopman

Una dintre problemele care apar în sistemul manufacturier este aceea a comparării a două procese de producție în raport cu eficiența producerii pieselor fără defect. Frecvent această comparație se face prin cercetarea pieselor în perechi, una din fiecare proces. Atunci problema poate fi formulată în termeni de verificarea unei ipoteze privind două proporții binomiale. Natura precisă a ipotezei va depinde de modul cum se definește eficiența procesului ca funcție de proporția binomială. Analog, în experimentele clinice dorim să cunoaștem efectul relativ a două medicamente în reducerea presiunii sîngelui. Dacă se presupune că efectul fiecărui medicament poate fi reprezentat prin media unei variabile normale, atunci problema se reduce la compararea a două medii ale unor variabile normale cu dispersiile cunoscute sau nu. Din nou, formularea actuală a ipotezei depinde de măsura efectului relativ în termeni de medii. În acest subparagraf vom considera o clasă particulară de ipoteze într-o familie de modele cu două selecții și această familie include ca un caz particular situațiile fizice descrise anterior.

Fie Π_x și Π_y două populații ale căror densități $f_x(x, \theta_x)$ și $f_y(y; \theta_y)$ sînt de forma Darmois-Koopman

$$f_x(x; \theta_x) = C(\theta_x)\, e^{D(\theta_x)T_x(x)}\, g_x(x).$$

Se presupune că la pasul $i \geqslant 1$ se poate obține o pereche de observații independente din populații, x_i din Π_x și y_i din Π_y. Formal, familia modelelor în considerare poate fi reprezentată de

$$[F_n(x_1, y_1, \ldots, x_n, y_n; \theta_x, \theta_y),\ \underline{\theta} < \theta_x < \overline{\theta},\ \underline{\theta} < \theta_y < \overline{\theta}],$$

unde funcția de repartiție a variabilelor independente și identic repartizate $\{x_i, y_i\}$ poate fi obținută din faptul că x_i și y_i au densitățile (XXII.39) cu parametru θ_x și respectiv θ_y. Mai întîi considerăm problema discriminării între

$$(1) \qquad H_0 : \theta_x = \theta',\quad \theta_y = \theta'',\quad H_1 : \theta_x = \theta'',\quad \theta_y = \theta'$$

$$\underline{\theta} < \theta' < \theta'' < \overline{\theta}$$

Scanned with OKEN Scanner

supusă la criteriu de validitate (XXI.18) (b) şi (c) care se pot exprima ca

$$Q_S(\theta',\ \theta'') \geqslant 1-\alpha,\quad Q_S(\theta'',\ \theta') \leqslant \beta \tag{2}$$

unde $Q_S(\theta_x,\ \theta_y)$ este funcţia C.O. a unui test arbitrar S pentru (1).

Teoria generală a T.S.R.P. bazată pe variabilele independente şi identic repartizate $\{z_i\}$ dată în capitolul XXII poate fi extinsă la testul (1) fără nici o modificare. Avem

$$z_i = \ln \frac{f_x(x_i;\ \theta'')f_y(y_i;\ \theta')}{f_x(x_i;\ \theta')f_y(y_i;\ \theta'')} = [T_x(x_i) - T_y(y_i)]\psi_0, \qquad i \geqslant 1,$$

(3)

$$Z_n = \sum_1^n z_i,$$

unde

$$\psi_0 = \psi(\theta'',\ \theta'),\quad \psi(\theta_x,\ \theta_y) = D(\theta_x) - D(\theta_y). \tag{4}$$

Deoarece $D(\theta)$ este presupusă crescătoare în θ, funcţia parametrică $\psi(\theta_x,\ \theta_y)$ satisface

$$\psi(\theta,\ \theta) = 0 \text{ pentru fiecare } \underline{\theta} < \theta < \overline{\theta},$$

$$\psi(\theta_x,\ \theta_y) = -\psi(\theta_y,\ \theta_x) < 0 \text{ pentru toţi } \underline{\theta} < \theta_x < \theta_y < \overline{\theta}.$$

Deoarece $\psi_0 > 0$, inegalitatea oricărui T.S.R.P. $S(b,\ a)$, arbitrar, pentru (1) poate fi scrisă în forma

$$\frac{b}{\psi_0} < \sum_{i=1}^n [T_x(x_i) - T_y(y_i)] < \frac{a}{\psi_0}. \tag{5}$$

Are loc

TEOREMA 1. *Presupunem că excesele lui Z_n faţă de b şi a sub $S(b,\ a)$ sînt zero cu probabilitatea unu. Atunci*

i) *funcţia* C.O. *a $S(b,\ a)$, $b < 0 < a$ este*

$$Q(\theta_x,\ \theta_y) = \begin{cases} \dfrac{e^{a\psi(\theta_y,\theta_x)/\psi_0} - 1}{e^{a\psi(\theta_y,\theta_x)/\psi_0} - e^{b\psi(\theta_y,\theta_x)/\psi_0}}, & \theta_x \neq \theta_y \\ \dfrac{a}{a-b}, & \theta_x = \theta_y \end{cases} \tag{6}$$

şi funcţia V.M.V.S. (*numărul mediu de perechi*) *a $S(b,\ a)$ este*

$$M(n;\theta_x,\theta_y) = \begin{cases} \dfrac{[a-(a-b)Q(\theta_x,\ \theta_y)]\psi_0^{-1}}{M(T_x;\ \theta_x) - M(T_x;\ \theta_y)}, & \theta_x \neq \theta_y \\ \dfrac{[a^2-(a^2-b^2)Q(\theta_x,\ \theta_y)]\psi_0^{-2}}{2D^2(T_x;\ \theta_x)}, & \theta_x = \theta_y \end{cases} \tag{7}$$

Scanned with OKEN Scanner

ii) *Dacă* $0 < \alpha < 1 - \beta < 1$, $S(b^*, a^*)$ *cu*

$$b^* = \ln [\beta/(1 - \alpha)] \quad \text{şi} \quad a^* = \ln [(1 - \beta)/\alpha]$$

atinge (α, β) *pentru verificarea oricărei ipoteze*

$$H' : \theta_x = C, \ \theta_y = d \text{ faţă de } H'' : \theta_x = d, \ \theta_y = C,$$

cu condiţia ca $\psi(d, c) = \psi_0$.

iii) *Dacă* $0 < \alpha < 1 - \beta < 1$, $S(b^*, a^*)$ *minimizează* $M_S(n; \theta_x, \theta_y)$ *pentru toţi* θ_x, θ_y *se satisfac*

$$\psi(\theta_x, \theta_y) = \pm \psi_0$$

printre toate testele S *pentru* (1) *supuse la* (2).

În demonstraţie se folosesc : lema XXII.2 şi teoremele XXII.2 şi 3.

Observaţie. Din (6) urmează că funcţia C.O. a testului $S(b, a)$ depinde de (θ_x, θ_y) numai împreună cu $\psi(\theta_x, \theta_y)$.

Pe de altă parte (7) arată că în general V.M.V.S. depinde de $\psi(\theta_x, \theta_y)$ cît şi de θ_x (sau θ_y).

În cele mai multe aplicaţii, sub (1), Z_n va avea un exces asupra lui b sau a, însă excesele vor fi mici (cu probabilitate apropiată de unitate) dacă $\theta' - \theta''$ este mică. În astfel de cazuri se aplică teorema 1 în sens aproximativ.

După teorema XXII.1. $S(b^*, a^*)$ de mai înainte este T.S.R.P.U.C.M.E. pentru (1).

Una dintre consecinţele importante ale teoremei 1 este că $S(b^*, a^*)$ dă de asemenea o soluţie a unei probleme mai realiste de verificare

$$(8) \qquad H_0 : \psi(\theta_x, \theta_y) \leqslant -\psi_0 \text{ faţă de } H_1 : \psi(\theta_x, \theta_y) \geqslant \psi_0, \ \psi_0 > 0,$$

cu riscurile minime (α, β). Proprietatea de monotonie a $Q(\theta_x, \theta_y)$ asigură că (5) cu

$$b = b^* = \ln [\beta/(1 - \alpha)] \quad \text{şi} \quad a = a^* = \ln [(1 - \beta)/\alpha]$$

verifică (8) cu intensitatea minimă (α, β). Ipoteza (8) este mai realistă decît aceea din (1) deoarece în multe cazuri practice statisticianul este preocupat cu discriminarea între $\theta_x \leqslant \theta_y$ şi $\theta_x > \theta_y$. Frecvent, în astfel de cazuri funcţia $\psi(\theta_x, \theta_y)$ dă o măsură rezonabilă a mărimii cu care θ_x şi θ_y diferă una faţă de cealaltă. Atunci se poate alege un ψ_0 pozitiv astfel ca domeniul

$$|\psi(\theta_x, \theta_y)| < \psi_0$$

în planul θ_x, θ_y să constituie o zonă de indiferenţă în luarea deciziei.

Exemplul 1. Considerăm două repartiţii Bernoulli independente cu parametrii p_x şi p_y. Avem

$$C(p_x) = 1 - p_x, \quad D(p_x) = \ln \frac{p_x}{1 - p_x}, \quad T_x(x) = x,$$

$$g_x(x) = 1,$$

Scanned with OKEN Scanner

unde

$$x : \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ p_x & 1 - p_x \end{pmatrix}, \quad 0 \leqslant p_x \leqslant 1.$$

Modelul $\{x_i, y_i\}$ poartă numele de dublă dichotomie deoarece fiecare individ în fiecare populaţie este categorizat fie ca un succes (defect) sau ca un insucces (corespunzător). În ipoteza (8) avem

$$\psi(p_x, p_y) = \ln \frac{p_x(1 - p_y)}{p_y(1 - p_x)}, \quad 0 \leqslant p_x \leqslant 1, \ 0 \leqslant p_y \leqslant 1.$$

O motivare a problemei prezente este dată de două procese manufacturiere Π_x şi Π_y ce concură.

Raportul $(1 - p_x)/p_x$ este un indicator eficient al procesului Π_x, crescînd de la 0 la ∞ cînd proporţia de piese defecte descreşte de la 1 la 0. În consecinţă, starea relativă a proceselor Π_x şi Π_y poate fi măsurată de raportul dintre $(1 - p_x)/p_x$ şi $(1 - p_y)/p_y$ sau echivalent de $\psi(p_x, p_y)$. Adică $\psi(p_x, p_y) = 0$ implică $p_x = p_y$, în timp ce $\psi(p_x, p_y) < 0$ indică superioritatea procesului Π_x şi invers. Deci cu o alegere convenabilă a lui $\psi_0 > 0$ acceptarea şi respingerea ipotezei H_0 va implica superioritatea respectiv inferioritatea procesului Π_x în producerca de piese corespunzătoare relativ la Π_y. Întorcîndu-ne acum la T.S.R.P. observăm că în acest caz variabilele independente şi identic repartizate $\{z_i\}$ pot lua numai $-\psi_0$, 0, ψ_0 cu probabilitatea pozitivă. Urmează că

$$P(Z_n = b \mid H_0 \text{ acceptată}, p_x, p_y) =$$

$$= P(Z_n = a \mid H_0 \text{ respinsă}, p_x, p_y) = 1$$

dacă şi numai dacă a/ψ_0 şi $-b/\psi_0$ sînt întregi pozitivi.

În consecinţă, (6) şi (7) au loc în aceste circumstanţe. În particular concluziile ii) şi iii) ale teoremei 1 au loc de asemenea dacă

$$\psi_0^{-1} \ln \{(1 - \beta)/\alpha\} \quad \text{şi} \quad \psi_0^{-1} \ln \{(1 - \alpha)/\beta\}$$

sînt întregi pozitivi pentru (α, β) specificaţi. Pe de altă parte,

$$\text{dacă } a/\psi_0 > 0 \text{ şi (sau) } - b/\psi_0 > 0$$

nu sînt întregi, Z_n va avea un exces faţă de a şi (sau) b.

Totuşi, observînd că în astfel de cazuri (5) este echivalent cu

$$- [-b/\psi_0] < n\bar{z}'_n < [a/\psi_0],$$

unde $z'_i = z_i/\psi_0$ şi $[s]$ reprezintă cel mai mare întreg $\geqslant s$, se pot obţine funcţiile C.O. şi V.M.V.S. ale testului $S(b, a)$ în acelaşi mod ca în teorema 1 înlocuind

$$z_i, \ b \text{ şi } a \text{ cu } z'_i, \ - [-b/\psi_0] \text{ şi respectiv } [a/\psi_0].$$

Scanned with OKEN Scanner

Pentru toţi $b < 0 < a$, rezultatele sînt

$$Q(p_x, p_y) = \begin{cases} \dfrac{\delta^{-[a/\psi_0]} - 1}{\delta^{-[a/\psi_0]} - \delta^{[-b/\psi_0]}}, & p_x \neq p_y \\ \dfrac{[a/\psi_0]}{[a/\psi_0] + [-b/\psi_0]}, & p_x = p_y, \end{cases}$$

(9)

$$M(n\,; p_x, p_y) = \begin{cases} \dfrac{[a/\psi_0] - ([a/\psi_0] + [-b/\psi_0])Q(p_x, p_y)}{p_x - p_y}, & p_x \neq p_y \\ \dfrac{[a/\psi_0][-b/\psi_0]}{2p_x(1 - p_x)}, & p_x = p_y, \end{cases}$$

unde $\delta = p_x(1 - p_y)/p_y(1 - p_x)$.

Dacă

$$\psi_0^{-1} \ln \{(1 - \beta)/\alpha\} \text{ şi (sau) } \psi_0^{-1} \ln \{(1 - \alpha)/\beta\}$$

nu sînt întregi, marginile de stopare ale T.S.R.P. U.C.M.E. $S(b^*, a^*)$ sînt determinate de cel mai mare număr real $b < 0$ şi cel mai mic număr real $a > 0$ care satisfac

$$[-b/\psi_0] \geqslant \psi_0^{-1} \ln \frac{1 - \alpha}{\beta}, \quad [a/\psi_0] \geqslant \psi_0^{-1} \ln \frac{1 - \beta}{\alpha}.$$

T.S.R.P. rezultat va avea probabilităţile erorilor maxime cel mult egale cu (α, β) şi concluzia iii) a teoremei 1 este acum modificată în sensul că $S(b^*, a^*)$ minimizează V.M.V.S printre toate testele ale căror probabilităţi ale erorilor sînt cel mult egale cu ale testului $S(b^*, a^*)$.

Testul U.C.M.P.N. (nealeatorizat) pentru

$$H_0 : \psi(p_x, p_y) \leqslant -\psi_0$$

la pragul de semnificaţie α bazat pe o selecţie (x_i, y_i) $(i = 1, \ldots, n)$ de volum fixat, acceptă (respinge) H_0 dacă

$$n\bar{x}_n \leqslant k_d(\alpha) \text{ (în rest)},$$

unde

$$d = \sum_1^n x_i + \sum_1^n y_i.$$

Dată (n, α, d), $k_d(\alpha)$ este cel mai mic întreg pozitiv care satisface $Q_d(-\psi_0) \geqslant 1 - \alpha$, unde

$$Q_d(\psi(p_x, p_y)) = \left\{ \sum_{x=0}^{k_d(\alpha)} C_n^x C_n^{d-x} e^{x\psi(p_x, p_y)} \Big/ \sum_{x=0}^{d} C_n^x C_n^{d-x} e^{x\psi(p_x, p_y)} \right\}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Funcţia C.O. a acestui test

$$Q(p_x,\ p_y) = \sum_{d=0}^{2n} Q_d(\psi(p_x,\ p_y))P\left(\sum_1^n (x_i + y_i) = d \mid p_x,\ p_y\right) =$$

$$= (1 - p_x)^n(1 - p_y)^n \sum_{d=0}^{2n} \left(\frac{p_y}{1 - p_y}\right)^d \sum_{x=0}^{k_d(\alpha)} C_n^x\, C_n^{d-x}\, e^{x\psi(p_x, p_y)} \tag{10}$$

depinde de $\psi(p_x,\ p_y)$ şi p_y. În consecinţă, determinarea $n(\alpha,\ \beta)$ pentru a satisface

$$Q(-\psi_0) \geqslant 1 - \alpha \quad \text{şi} \quad Q(p'',\ p') \leqslant \beta$$

pentru verificarea ipotezei H_0 faţă de alternativa particulară $p_x = p''$ şi $p_y = p'$ astfel încît $\psi(p'',\ p') = \psi_0$, va depinde de specificarea $(p'',\ p')$.

Dacă $\alpha + \beta < 1$, din (10) urmează că este imposibil pentru testul U.C.M.P.N. să satisfacă

$$Q(-\psi_0) \geqslant 1 - \alpha \quad \text{şi} \quad Q(p'',\ p') \leqslant \beta$$

pentru toate $(p'',\ p')$ pentru care $\psi(p'',\ p') = \psi_0$.

Aceste observaţii implică că testul U.C.M.P.U. nu poate fi folosit pentru obţinerea unui test valid, bazat pe o selecţie de volum fixat, pentru

$$H_0 \text{ faţă de } H_1 : \psi(p_x,\ p_y) \geqslant \psi_0.$$

Totuşi există teste, bazate pe selecţii de volum fixat, a căror funcţie C.O. depinde de $\psi(p_x,\ p_y)$.

1.2. Suficienţa în sensul lui Fraser

Teorema 1 nu poate fi folosită pentru a verifica

$$\psi(\theta_x,\ \theta_y) \leqslant \psi_0 \text{ faţă de } \psi(\theta_x,\ \theta_y) \geqslant \psi_1 \text{ dacă } \psi_0 + \psi_1 \neq 0$$

nici pentru a verifica ipoteze de tipul (8) cu unele funcţii arbitrare $\psi(\theta_x,\ \theta_y)$. Unele dintre aceste probleme pot fi abordate cu ajutorul noţiunii de suficienţă în sensul lui Fraser a unei statistici pentru o funcţie de $(\theta_x,\ \theta_y)$. În cele ce urmează vom expune acest concept într-o formă mai generală:

Fie $[F_n(\mathbf{x};\ \gamma,\ \delta);\ \gamma \in \Gamma,\ \delta \in \Delta]$ o familie cu mai mulţi parametrii în care γ şi δ sînt independenţi funcţional (adică $\theta = (\gamma,\ \delta)$ şi Θ este produsul cartezian $\Gamma \times \Delta$).

DEFINIŢIA 1. (Fraser (1956)) Statistica $T_n = T_n(\mathbf{x})$, pentru un n dat, este suficientă în sensul lui Fraser pentru γ dacă repartiţia lui T_n depinde numai de γ şi repartiţia lui $\mathbf{x}$ pentru $T_n = T$ dat conţine numai pe δ.

TEOREMA 2. *Dacă x este discret sau continuu, T_n este suficientă în sensul lui Fraser dacă şi numai dacă, pentru fiecare $\gamma \in \Gamma$ şi $\delta \in \Delta$,*

$$f_n(\mathbf{x};\ \gamma,\ \delta) = h_n(T_n;\ \gamma)\ \ g_n(\mathbf{x} \mid T,\ \delta), \quad T = T_n(\mathbf{x}) \tag{11}$$

aproape peste tot în Ω_n, unde $h_n(T;\ \gamma)$ este densitatea de repartiţie a statisticii T_n.

Scanned with OKEN Scanner

Observații : 1) Familia

$$f_n(\mathbf{x};\ \theta_1, \ldots, \theta_s) = C_n(\theta_1, \ldots, \theta_s) \exp\left[\theta_1 T_n(\mathbf{x}) + \sum_{j=2}^{s} \theta_j T_{jn}(\mathbf{x})\right] g_n(\mathbf{x})$$

nu satisface necesar (11)

a) În absența lui δ, (11) se reduce la (VIII.4.).

DEFINIȚIA 2. Dacă (11) are loc pentru fiecare n, vom spune că $\{T_n\}$ este un șir suficient în sensul lui Fraser pentru γ.

În cele ce urmează vom arăta cum pot fi folosite rezultatele din capitolele XXI și XXII pentru verificarea ipotezelor privind γ dacă δ este necunoscut sau privind δ dacă γ este necunoscut, cu condiția (XXI.18).

Considerăm mai întîi ipotezele compuse

$$H_0 : \gamma = \gamma_0 \text{ față de } H_1 : \gamma = \gamma_1;\ \gamma_0 \neq \gamma_1. \tag{12}$$

În (XXI.18) avem

$$\omega_a \equiv (\gamma = \gamma_0,\ \delta \in \Delta), \quad \omega_r \equiv (\gamma = \gamma_1,\ \delta \in \Delta)$$

Dacă pentru γ există un șir suficient în sensul lui Fraser, din (11) urmează că

$$Z_n = \ln \frac{f_n(\mathbf{x};\ \gamma_1,\ \delta)}{f_n(\mathbf{x};\ \gamma_0,\ \delta)} = \ln \frac{h_n(T_n;\ \gamma_1)}{h_n(T_n;\ \gamma_0)}$$

este independentă de δ pentru fiecare $n \geqslant 1$. În continuare, repartiția lui Z_n, pentru fiecare n, și prin urmare a lui

$$z_n = Z_n - Z_{n-1} = \ln \frac{h_n(T_n;\ \gamma_1) h_{n-1}(T_{n-1};\ \gamma_0)}{h_n(T_n;\ \gamma_0) h_{n-1}(T_{n-1};\ \gamma_1)}, \quad Z_0 = 0 \tag{13}$$

depinde numai de γ. În consecință, au loc toate rezultatele din capitolele XXI și XXII. În demonstrațiile anterioare se înlocuiește $(\mathbf{x}, \theta)$ prin (T_n, γ). Aceasta arată că ipotezele compuse inițiale (12) privind

$$[F_n(\mathbf{x};\ \gamma;\ \delta),\quad \gamma \in \Gamma,\quad \delta \in \Delta]$$

au fost reduse, în baza suficienței în sensul lui Fraser, la ipotezele simple (12) privind

$$[H_n(T_n;\ \gamma);\ \gamma \in \Gamma] \quad \text{unde} \quad H_n(T;\ \gamma) = P(T_n < T \mid \gamma).$$

În particular, T.S.R.P. pentru (13) observă succesiv $\{T_i\}$, acceptă sau respinge H_0 după cum inegalitatea inferioară sau superioară în

$$b < \sum_{1}^{n} z_i = \ln \frac{h_n(T_n,\ \gamma_1)}{h_n(T_n,\ \gamma_0)} < a \tag{14}$$

este mai întîi nesatisfăcută. Funcția C.O. $Q(\gamma)$ și funcția V.M.V.S. $M(d;\ \gamma)$ ale testului $S(b,\ a)$ nu depind de δ. Dacă $\{z_i\}$ definite în (13) sînt independente și identic repartizate, se aplică aproximațiile lui Wald (XXII.66)—

Scanned with OKEN Scanner

(XXII.70) și după teorema XXII.3, T.S.R.P.U.C.M.E. $S(b^*, a^*)$ minimizează $M_S(n\,;\,\gamma_0,\,\delta)$ și $M_S(n\,;\,\gamma_1,\,\delta)$ uniform în δ printre toate testele S care au aceleași probabilități ale erorilor sau mai mici.

Dacă $\{x_i\}$ sînt independente și identic repartizate și

$$f(x_i\,;\,\gamma,\,\delta) = h(u_i\,;\,\gamma)\,g(x_i \mid u_i\,;\,\delta), \quad u_i = u(x_i) \tag{15}$$

deoarece atunci are loc (12) cu $T_n(\mathbf{x}) = T_n(u_1, \ldots, u_n)$ și

$$z_i = \ln \frac{h(u_i\,;\,\gamma_1)}{h(u_i\,;\,\gamma_0)}$$

sînt independente și identic repartizate. Dacă $\{z_i\}$ nu sînt independente și identic repartizate, proprietatea de terminare a testului $S(b, a)$ poate fi stabilită prin aceeași metodă ca în XXII.3.2. pentru toți $\gamma \in \Gamma$.

Dacă γ este un parametru real și dacă pentru fiecare n, familia $[H_n(T_n\,;\,\gamma),\ \gamma \in \Gamma]$ posedă un raport de verosimilități monoton, $S(b^*, a^*)$ pentru (13) cu $\gamma_0 < \gamma_1$ poate fi extins la verificarea ipotezei $\gamma \leqslant \gamma_0$ față de $\gamma \geqslant \gamma_1$ cu condiția (XXI.18).

Existența statisticii suficiente în sensul lui Fraser pentru γ, asigură de asemenea, în concordanță cu lema Neyman-Pearson, existența testului U.C.M.P. (în raport cu δ) pentru selecții de volum fixat la pragul de semnificație α pentru (12). Acest test și prin urmare testul optim bazat pe o selecție de volum fix pentru (12) poate fi construit.

Exemplul 2. Considerăm ipotezele din (XXII.60). Dacă notăm prin $x_{i_1}, \ldots, x_{i_m}$ cele $m = \Sigma\, y_j$ observații care sînt $\leqslant x_0$ la pasul n și prin $x_{j_1}, \ldots, x_{j_{n-m}}$ care sînt $\geqslant x_0$, se poate scrie

$$f_n(\mathbf{x}\,;\,\theta) = [p(\theta)]^m[1 - p(\theta)]^{n-m} \prod_{k=1}^{m} f^-(x_{i_k}) \prod_{r=1}^{n-m} f^+(x_{j_r}),$$

unde $p(\theta) = P(x_i \leqslant x_0 \mid \theta)$ și $f^-(x)$ și $f^+(x)$ sînt repartițiile probabilistice corespunzătoare la funcțiile de repartiții condiționate

$$F^-(x) = P(x_i \leqslant x \mid x_i \leqslant x_0), \quad F^+(x) = P(x_i \leqslant x \mid x_i > x_0).$$

$p(\theta)$ nu depinde de F^- sau F^+, în timp ce ultimele sînt independente de valorile lui $p(\theta)$. Deci θ poate fi privit ca vectorul (γ, δ) în care $\gamma = p(\theta)$ este real și $\delta = F^-$ sau F^+, $\Gamma = [0, 1]$ de pe dreapta reală și Δ este mulțimea tuturor funcțiilor de repartiție definite pe $(-\infty, x_0]$ și pe (x_0, ∞). Deoarece, pentru fiecare n, $m = \Sigma\, y_i$ este suficientă în sensul lui Fraser pentru $p(\theta)$, urmează că testul din exemplul XXII.6. este optim nu numai printre testele care sînt bazate pe $\{y_i\}$ însă de asemenea printre toate testele valide bazate pe $\{x_i\}$.

Suficiența în sensul lui Fraser și teorema XIII.10 implică de asemenea că testul U.C.M.P. pentru H_0, la pragul de semnificație α, este același ca pentru proporția binomială.

1.3. Teste condiționate

Considerăm ipotezele compuse

$$H_0 : \delta = \delta_0 \text{ față de } H_1 : \delta = \delta_1,\ \delta_0 \neq \delta_1 \tag{16}$$

în familia din subparagraful anterior.

Scanned with OKEN Scanner

În (XXII.23) avem

$$\omega_a \equiv (\gamma \in \Gamma,\ \delta = \delta_0), \quad \omega_r \equiv (\gamma \in \Gamma,\ \delta = \delta_1).$$

Dacă pentru γ există un șir suficient în sensul lui Fraser, din (11) urmează că, pentru fiecare n,

$$Z_n = \ln \frac{f_n(\mathbf{x};\ \gamma,\ \delta_1)}{f_n(\mathbf{x};\ \gamma,\ \delta_0)} = \ln \frac{g_n(\mathbf{x}|\ T_n;\ \delta_1)}{g_n(\mathbf{x}|\ T_n;\ \delta_0)}$$

este independentă de γ. În consecință, se pot aplica teste statistice observînd Z_n pentru $n = 1, 2, \ldots$, adică teste bazate pe $\{z_i\}$ unde

$$(17) \quad z_i = Z_i - Z_{i-1} = \ln \frac{g_i(\mathbf{x}|\ T_i;\ \delta_1)\, g_{i-1}(\mathbf{x}|\ T_{i-1};\ \delta_0)}{g_i(\mathbf{x}|\ T_i;\ \delta_0)\, g_{i-1}(\mathbf{x}|\ T_{i-1};\ \delta_1)}, \quad Z_0 = 0.$$

Aceste teste pot fi numite condiționate în sensul că, la fiecare pas, datele brute sînt condiționate de observarea lui T_n. În particular, T.S.R.P. $S(b, a)$ observă $\{x_i\}$ succesiv, acceptă sau respinge H_0 după cum inegalitatea inferioară sau superioară în

$$(18) \quad b < \sum_1^n z_i = \ln \frac{g_n(\mathbf{x}|\ T_n;\ \delta_1)}{g_n(\mathbf{x}|\ T_n;\ \delta_0)} < a$$

este mai întîi nesatisfăcută. Acum, deoarece repartițiile lui $\{z_i\}$, indiferent dacă z_i sînt sau nu independente și identic repartizate vor depinde atît de δ cît și de γ, C.O. $Q(\gamma, \delta)$ și particular $(\alpha(\gamma, \delta_0), \beta(\gamma, \delta_1))$ ale testului $S(b, a)$ vor depinde de parametrul necunoscut γ. Aceasta nu se întîmplă întotdeauna și chiar în acest caz, problema determinării (b, a) pentru a satisface (XXI.18) pentru toți $\gamma \in \Gamma$ poate fi realizată fără nici o dificultate. Din teorema XXII.2 urmează că, pentru fiecare $\gamma \in \Gamma$, probabilitățile erorilor testului $S(b, a)$ cu $b < 0 < a$ satisfac

$$\frac{\beta(\gamma, \delta_1)}{1 - \alpha(\gamma, \delta_0)} \leqslant e^b, \quad \frac{1 - \beta(\gamma, \delta_1)}{\alpha(\gamma, \delta_0)} \geqslant e^a,$$

și amîndouă inegalitățile au loc strict dacă și numai dacă $S(b, a)$ este închis și Z_n nu are exces față de b sau a.

Observații: i) Dacă $S(b, a)$ este închis și Z_n nu are nici un exces, probabilitățile erorilor adevărate sînt independente de γ și dat $0 < \alpha < 1 - \beta < 1$, T.S.R.P.U.C.M.E.

$$S(\ln [\beta/(1 - \alpha)],\ \ln [(1 - \beta)/\alpha])$$

atinge (α, β) pentru toți $\gamma \in \Gamma$. În astfel de cazuri spunem că $S(b, a)$ este similar în raport cu H_0 și H_1.

ii) Dacă Z_n are exces față de b sau a, atunci probabilitățile erorilor adevărate pot depinde de γ. Însă dacă aceste excese și în special (α, β) sînt mici, probabilitățile erorilor testului

$$S(\ln [\beta/(1 - \alpha)],\ \ln [(1 - \beta)/\alpha])$$

Scanned with OKEN Scanner

satisfac

$\alpha(\gamma, \delta_0) \simeq \alpha$, $\beta(\gamma, \delta_1) \simeq \beta$ şi $\alpha(\gamma, \delta_0) + \beta(\gamma, \delta_1) \leqslant \alpha + \beta$ pentru toţi $\gamma \in \Gamma$.

iii) Dacă δ este un parametru real şi familia

$$[G_n(\mathbf{x} \mid T_n ; \delta),\ \delta \in \Delta]$$

posedă un raport de verosimilităţi monoton într-o vecinătate a lui $\mathbf{x}$, pentru fiecare n, atunci teorema XXII.4 se aplică la testul $S(b^*, a^*)$ pentru a verifica

$$\delta \leqslant \delta_0 \text{ faţă de } \delta \geqslant \delta_1 \ (\delta_0 < \delta_1)$$

cu condiţia (XXI. 18).

iv) Numai existenţa unei statistici suficiente în sensul lui Fraser pentru γ nu implică necesar existenţa C.M.P. test sau a testului U.C.M.P. nedeplasat (în raport cu γ) bazat pe o selecţie de volum fix la pragul de semnificaţie α pentru (16).

Dacă $\{x_i\}$ sînt independente şi identic repartizate avînd densitatea (15), atunci

$$z_i = \ln \frac{g(x_i \mid u_i ;\ \delta_1)}{g(x_i \mid u_i ;\ \delta_0)}$$

sînt independente şi identic repartizate şi se aplică teorema XXII.6 cu $\theta = (\gamma, \delta)$. Mai departe, pentru fiecare $\gamma \in \Gamma$ fixat se poate demonstra teorema XXII.3 Aceasta implică că $S(b^*, a^*)$ minimizează

$M_S(n ; \gamma, \delta_0)$ şi $M_S(n ; \gamma, \delta_1)$ uniform în γ; printre toate testele S cu probabilităţile erorilor cel mult (α, β). Pentru $Q(\gamma, \delta)$ şi $M(n ; \gamma, \delta)$ ale testului $S(b, a)$, $b < 0 < a$ au loc aproximaţiile lui Wald (XXII. 66) — (XXII. 70). Totuşi aproximaţiile lui Wald implică δ. Pentru a arăta aceasta fie $h(\theta) \equiv h(\gamma, \delta)$ în (XXII. 66) unica soluţie nenulă a ecuaţiei $G(h ; \gamma, \delta) = 1$, unde

$$G(h ; \gamma, \delta) = M(e^{hz} ; \gamma, \delta) = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{f(x ; \gamma, \delta_1)}{f(x ; \gamma, \delta_0)} \right]^h dF(x ; \gamma, \delta).$$

Aplicînd lema XXII.2 la variabila z condiţionată de faptul că $\mu = u$, obţinem că

$$M(e^{hz} \mid u ;\ \delta) = 1 \tag{19}$$

are de asemenea o soluţie unică $h(\delta) \neq 0$ care este independentă de γ. Deoarece ecuaţia (19) este echivalentă cu

$$M(e^{hz} ;\ \gamma,\ \delta) = \int dH(u ;\ \gamma) = 1$$

urmează că $h(\delta)$ nu conţine pe u. Deoarece, dat $\delta \in \Delta$, $h(\delta)$ satisface:

$$G(h ;\ \gamma,\ \delta) = \int_{-\infty}^{+\infty} M(e^{h(\delta)z} \mid u ;\ \delta)\, dH(u ;\ \gamma) = 1,$$

urmează că $h(\gamma, \delta) \equiv h(\delta)$ pentru toţi $\gamma \in \Gamma$ şi prin urmare membrul drept al relaţiei (XXII.66) este independent de γ.

Scanned with OKEN Scanner

Dacă Z_n nu are nici un exces, atunci $Q(\gamma, \delta)$ adevărată este de asemenea independentă de γ, însă $M(n; \gamma, \delta)$ poate să conţină pe γ împreună cu $M(z; \gamma, \delta)$.

1.4. Aplicarea suficienţei în sensul lui Fraser la problema celor două selecţii

Date două populaţii Π_x şi Π_y cu densităţile $f_x(x; \theta_x)$ şi $f_y(y; \theta_y)$, $(\theta_x, \theta_y) \in \Theta$, adeseori este posibil să se facă o transformare biunivocă de la θ_x şi θ_y la

$$\gamma = \gamma(\theta_x, \theta_y) \quad \text{şi} \quad \delta = \delta(\theta_x, \theta_y)$$

astfel încît domeniile valorilor posibile, ale lui γ şi δ să nu depindă unul de celălalt. Notînd prin (x_i, y_i) perechea de observaţii obţinute la pasul i al selecţiei putem să scriem

$$f(x_i, y_i; \gamma, \delta) \equiv f_x(x_i, \theta_x) f_y(y_i; \theta_y).$$

Dacă $f(x_i, y_i; \gamma, \delta)$ se poate exprima sub forma (15), atunci se pot aplica tehnicile din subparagrafele anterioare pentru verificarea ipotezelor compuse privind γ sau δ. În practică se examinează semnificaţia fizică a relaţiilor (12) şi (16), sau ipotezele unilaterale privind funcţiile rezultate γ şi δ. Observaţiile anterioare sînt valabile şi în cazul în care x_i şi y_i sînt vectori.

Pentru cazul particular cînd $f_x(x, \theta_x)$ şi $f_y(y; \theta_y)$ sînt de forma Darmois-Koopman, metodele din subparagrafele anterioare nu se aplică în mod necesar. Cu alte cuvinte, $f(x_i, y_i; \theta_x; \theta_y)$ pot sau nu pot fi exprimate în forma (15), cu excepţia transformărilor banale

$$\gamma = D(\theta_x) \quad \text{şi} \quad \delta = D(\theta_y)$$

Cînd acest lucru este posibil (exemplele 3 şi 4), T.S.R.P. din (14) şi (18), cu $\gamma = D(\theta_x) - D(\theta_y)$ sau $\delta = D(\theta_x) - D(\theta_y)$ sînt generalizări ale (14) în discriminarea dintre

$$H_0 : \psi(\theta_x, \theta_y) \leqslant \psi_0 \quad \text{şi} \quad H_1 : \psi(\theta_x, \theta_y) \geqslant \psi_1, \quad \psi_0 < \psi_1;$$

fără restricţia $\psi_0 + \psi_1 = 0$.

Exemplul 3. Presupunem că Π_x este $N(\mu_x, \sigma_x)$ şi Π_y este $N(\mu_y, \sigma_y)$, σ_x şi σ_y fiind cunoscute. Atunci densitatea de repartiţie comună a variabilelor independente şi identic repartizate $\{x_i, y_i\}$ poate fi scrisă în forma

$$f(x, y; \gamma, \delta) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} e^{-(u-\gamma)^2/4} \frac{1}{\sigma_x \sigma_y \sqrt{\pi}} e^{-\left(\frac{x}{\sigma_x} + \frac{y}{\sigma_y} - \delta\right)^2/4},$$

unde

$$\gamma = \frac{\mu_x}{\sigma_x} - \frac{\mu_y}{\sigma_y}, \quad \delta = \frac{\mu_x}{\sigma_x} + \frac{\mu_y}{\sigma_y}, \quad u = \frac{x}{\sigma_x} - \frac{y}{\sigma_y}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Deoarece, pentru fiecare n, $T_n(x) = \sum \frac{x_i}{\sigma_x} - \sum \frac{y_i}{\sigma_y}$ este suficientă în sensul lui Fraser pentru γ și familia

$$[H_n(T_n\,;\ \gamma),\quad -\infty < \gamma < \infty]$$

posedă un raport de verosimilități în T_n, T.S.R.P. (14) se aplică pentru verificarea ipotezei

$$H_0 : \mu_x/\sigma_x - \mu_y/\sigma_y \leqslant \gamma_0$$

față de

$$H_1 : \mu_x/\sigma_x - \mu_y/\sigma_y \geqslant \gamma_1,\quad \gamma_0 < \gamma_1,$$

unde

$$z_i = \frac{1}{2}(\gamma_1 - \gamma_0)\left(\frac{x_i}{\sigma_x} - \frac{y_i}{\sigma_y}\right) - \frac{1}{4}(\gamma_1^2 - \gamma_2^2) \text{ pentru } i \geqslant 1.$$

Proprietățile acestui test sînt aceleași cu acelea ale testului $S(b, a)$ pentru media normală (exemplul XXII. 3.) cu μ, μ_0, μ_1 și σ înlocuiți prin γ, γ_0, γ_1 și respectiv $\sqrt{2}$.

Testul prezentat $S(b^*, a^*)$ minimizează $M_S(n\,;\ \gamma_0, \delta)$ și $M_S(n\,;\ \gamma_1, \delta)$ uniform în $-\infty < \delta < \infty$ printre toate testele S cu probabilitățile erorilor egale sau mai mici decît (α, β) cu $\alpha + \beta < 1$.

Folosind (18) se poate dezvolta T.S.R.P. pentru $\mu_x/\sigma_x + \mu_y/\sigma_y \leqslant \delta_0$, față de $\mu_x/\sigma_x + \mu_y/\sigma_y \geqslant \delta_1$, însă o astfel de problemă nu apare în practică.

Exemplul 4. Considerăm două repartiții Poisson cu mediile λ_x și λ_y. În acest caz repartiția comună a variabilelor $\{x_i, y_i\}$ independente și identic repartizate poate fi scrisă în forma

$$f(x\,;\ y\,;\ \gamma,\ \delta) = \frac{e^{-\gamma}\gamma^u}{u!}\,C_u^x\left(\frac{1}{1+\delta}\right)^x\left(\frac{\delta}{1+\delta}\right)^{u-x},\quad x,\ y = 0,1,\ldots$$

unde

$$\gamma = \lambda_x + \lambda_y,\quad \delta = \frac{\lambda_y}{\lambda_x},\quad u = x + y.$$

Deoarece, pentru fiecare n, $T_n(x) = \Sigma\,(x_i + y_i)$ este suficientă, în sensul lui Fraser, pentru γ și familia

$$[G_n(x|\ T_n\,;\ \delta),\quad 0 < \delta < \infty]$$

posedă un raport de verosimilități monoton în $\Sigma\, x_i$, T.S.R.P. (18) se aplică pentru verificarea ipotezei

$$H_0 : \lambda_y/\lambda_x \leqslant \delta_0 \text{ față de } H_1 : \lambda_y/\lambda_x \geqslant \delta_1,\quad 0 < \delta_0 < \delta_1$$

unde

$$z_i = x_i \ln\frac{1+\delta_0}{1+\delta_1} + y_i \ln\frac{\delta_1(1+\delta_0)}{\delta_0(1+\delta_1)},\quad i \geqslant 1.$$

Scanned with OKEN Scanner

C.O. $\bar{Q}(\delta)$ și V.M.V.S. $\tilde{\tilde{M}}(\gamma, \delta)$ a testului $S(b, a)$, $b < 0 < a$, sînt date de (XXII. 66) — (XXII. 70), unde $h(\delta) \neq 0$ este o soluție a ecuației (XXII. 43) cu $p = (1 + \delta)^{-1}$ și

$$\delta' = \frac{\ln [(1 + \delta_1)/(1 + \delta_0)]}{\ln [\delta_1(1 + \delta_0)/\delta_0(1 + \delta_1)]},$$

$$M(z^2; \gamma, \delta') = \gamma \left[\ln \frac{1 + \delta_1}{1 + \delta_0}\right]\left[\ln \frac{\delta_1(1 + \delta_0)}{\delta_0(1 + \delta_1)}\right],$$

$$M(z; \gamma, \delta) = \frac{\gamma}{1 + \delta}\left[\delta \ln \frac{\delta_1(1 + \delta_0)}{\delta_0(1 + \delta_1)} - \ln \frac{1 + \delta_1}{1 + \delta_0}\right].$$

Testul $S(b^*, a^*)$ prezent minimizează $M_S(n; \gamma, \delta_0)$ și $M_S(n; \gamma, \delta_1)$ uniform în $0 < \gamma < \infty$ printre toate testele S cu probabilitățile erorilor egale sau mai mici decît (α, β). Pentru cazul particular cînd $\gamma_1 = 1/\delta_0 > 0$ se ajunge la aceleași concluzii ca în teorema 1.

În legătură cu faptul că repartiția Poisson este o formă limită a repartiției binominale, raportul λ_y/λ_x este o măsură rezonabilă a mărimii cu care diferă cele două repartiții.

Folosind (14) se poate dezvolta formal T.S.R.P. pentru

$$\lambda_x + \lambda_y \leqslant \gamma_0 \text{ față de } \lambda_x + \lambda_y \geqslant \gamma_1,$$

însă o astfel de problemă se întîlnește rareori în practică.

Exemplul 5. Considerăm două repartiții Bernoulliene. Repartiția comună a variabilelor independente și identic repartizate $\{x_i, y_i\}$ are funcția de frecvențe

$$f(x, y; p_x, p_y) = p_x^x p_y^y (1 - p_x)^{1-x}(1 - p_y)^{1-y}, \quad x = 0, 1; \; y = 0, 1$$

unde p_x și p_y pot fi interpretate ca propoziția pieselor defecte în procesul Π_x respectiv Π_y. Cu excepția transformării banale

$$\gamma = p_x \quad \text{și} \quad \delta = p_y$$

funcția de frecvențe comună a variabilelor $\{x_i, y_i\}$ nu poate fi exprimată în forma (15). În particular nu pot fi aplicate metodele din subparagrafele 1.2. și 1.3. pentru verificarea ipotezei

$$\psi(p_x, p_y) = \psi_0 \text{ față de } \psi(p_x, p_y) = \psi_1,$$

unde $\psi(p_x, p_y)$ este definită în exemplul 1. Totuși, se aplică aceste metode dacă se modifică, pentru fiecare n, datele originale

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (x_1, y_1, \ldots, x_n, y_n)$$

la $(\mathbf{x}', \mathbf{y}')$ care nu disting între observațiile $x_i = y_i = 0$ și $x_i = y_i = 1$ pentru toți i. Adică $(\mathbf{x}', \mathbf{y}')$ constă din s_n succese, f_n eșecuri și $n - s_n - f_n$ egalități, unde

un succes este definit de $(x_i = 1, \; y_i = 0)$

un eșec este definit de $(x_i = 0, \; y_i = 1)$ și

o egalitate de $x_i = y_i$.

Scanned with OKEN Scanner

Atunci probabilitatea de a observa $(\mathbf{x}', \mathbf{y}')$ este

$$[p_x(1-p_y)]^{s_n}[(1-p_x)p_x]^{f_n}[p_xp_y+(1-p_x)(1-p_y)]^{n-s_n-f_n},$$

sau echivalent

$$f_n((\mathbf{x}', \mathbf{y}'); \gamma, \delta) = C_n^{T_n}\gamma^{T_n}(1-\gamma)^{n-T_n}\frac{1}{C_n^{T_n}}\left(\frac{\delta}{1+\delta}\right)^{s_n}\left(\frac{1}{1+\delta}\right)^{T_n-s_n},$$

unde

$$\gamma = p_x(1-p_y)+p_y(1-p_x), \quad \delta = \frac{p_x(1-p_y)}{p_y(1-p_x)}, \quad T_n = s_n + f_n,$$

care de obicei este de forma (11). Deoarece $[G((\mathbf{x}', \mathbf{y}')|\, T_n; \delta), 0<\delta<\infty]$ posedă un raport de verosimilităţi monoton în s_n, se aplică T.S.R.P. (18) pentru verificarea ipotezei

$$H_0: \delta \leqslant \delta_0 \text{ faţă de } H_1: \delta \geqslant \delta_1 (0<\delta_0<\delta_1),$$

unde pentru $i \geqslant 1$

$$z_i = (s_i - s_{i-1})\ln\frac{\delta_1}{\delta_0} - (T_i - T_{i-1})\ln\frac{1+\delta_1}{1+\delta_0}, \quad s_0 = T_0 = 0.$$

$\{z_i\}$ sînt independente şi identic repartizate cu

$$P\left(z_i = -\ln\frac{1+\delta_1}{1+\delta_0}\,\middle|\,\gamma, \delta\right) = \frac{\gamma}{1+\delta},$$

$$P\left(z_i = \ln\frac{\delta_1(1+\delta_0)}{\delta_0(1+\delta_1)}\,\middle|\,\gamma, \delta\right) = \frac{\gamma\delta}{1+\delta}.$$

Ipotezele anterioare sînt echivalente cu

$$H_0: \psi(p_x, p_y) \leqslant \ln\delta_0 \quad \text{şi} \quad H_1: \psi(p_x, p_y) \geqslant \ln\delta_1.$$

Testul $S(b^*, a^*)$ prezent minimizează $M_S(n; \gamma, \delta_0)$ şi $M_S(n; \gamma, \delta_1)$ uniform în $0<\gamma<1$ printre testele valide care nu disting între $x_i = y_i = 0$ şi $x_i = y_i = 1$. Pentru cazul special $\delta_1 = 1/\delta_0 > 1$ această proprietate optimă a testului $S(b^*, a^*)$ se extinde chiar la teste care nu fac o astfel de distincţie şi aceasta deoarece atunci $S(b^*, a^*)$ se reduce la testul din exemplul 1 cu $\psi_0 = \ln\delta_1$.

Reducerea folosită se aplică de asemenea la obţinerea testului bazat pe o selecţie de volum fix pentru

$$H_0: \delta \leqslant \delta_0 \text{ faţă de } H_1: \delta \geqslant \delta_1$$

cu condiţia (XXI. 18). Testul observă $\{x_i, y_i\}$ pînă se obţin $T_n = T_n(\alpha, \beta)$ succese şi insuccese, se acceptă H_0 dacă $s_n \leqslant c$ şi respinge în rest, unde

Scanned with OKEN Scanner

$c = c(\alpha, \beta)$ şi cel mai mic întreg positiv T_n sînt determinaţi de

$$\sum_{x=0}^{c} C_{T_n}^{x} \left(\frac{\delta_0}{1+\delta_0}\right)^x \left(\frac{1}{1+\delta_0}\right)^{T_n - x} \geqslant 1 - \alpha,$$

$$\sum_{x=0}^{c} C_{T_n}^{x} \left(\frac{\delta_1}{1+\delta_1}\right)^x \left(\frac{1}{1+\delta_1}\right)^{T_n - x} \leqslant \beta.$$

Numărul total de perechi cerut de acest test este dat de $n(\alpha, \beta, \gamma) = T_n(\alpha, \beta)/\gamma$.

§2. Discriminare dintre $k > 2$ ipoteze

2.1. Punerea problemei

Pînă acum am prezentat teoria testelor care discriminează între două ipoteze. Sînt, însă, situaţii practice în care experimentatorul poate fi interesat în cel puţin trei ipoteze distincte. Astfel în exemplul XXI.1. producătorul poate avea în minte o a treia valoare critică $p_2 (> p_1)$ astfel că doreşte să accepte dintr-o dată lotul dacă $p = p_0$, să respingă dintr-o dată lotul dacă $p = p_2$, în timp ce pentru $p = p_1$, va negocia cu vînzătorul reducerea preţului pe unitate. În cele ce urmează vom prezenta unele metode pentru rezolvarea *problemei de decizie multiplă.*

Considerăm familia $[F_n(\mathbf{x}; \theta), \theta \in \Theta]$ de modele şi $k > 2$ ipoteze

$$H_j : \theta \in \omega_j, \qquad j = 0, 1, \ldots, k-1 \tag{20}$$

unde $\{\omega_j\}$ sînt submulţimi disjuncte nevide din Θ.

Un test statistic S_k pentru (20) este definit de o mulţime de reguli, bazate pe $(x_1, \ldots, x_n)$, $n = 1, 2, \ldots$ de acceptare a uneia şi numai uneia dintre cele k ipoteze. Acum, pentru fiecare n spaţiul de selecţie Ω_n este împărţit în k regiuni de acceptare şi într-o regiune de continuare.

DEFINIŢIA 3. Funcţiile

$Q_j(\theta) = P(S_k \text{ acceptă } H_j | \theta)$ pentru orice $\theta \in \Theta$ poartă numele de funcţiile C.O. ale testului S_k şi $1 - Q_j(\theta)$ riscul adevărat dacă $\theta \in \omega_j$.

DEFINIŢIA 4. V.D.S. n al testului S_k este variabila aleatoare ce corespunde la numărul de observaţii cerut de test pentru a lua decizia finală şi atunci (XXI. 14) este funcţia V.M.V.S. a testului S_k.

DEFINIŢIA 5. Testul este închis dacă şi numai dacă are loc (XXI.13), ceea ce este echivalent cu

$$\sum_{j=0}^{k-1} Q_j(\theta) = 1 \text{ pentru fiecare } \theta \in \Theta.$$

Pentru a da un criteriu rezonabil pentru alegerea unui test pentru (20), observăm că S_k poate implica cel puţin k tipuri distincte de erori de decizie, de a respinge H_0 chiar $\theta \in \omega_j$ pentru $j = 0, 1, \ldots, k-1$.

În situaţia unui parametru real se poate considera acceptarea unei ipoteze H_j ca o eroare gravă cînd θ aparţine la o anumită submulţime $\Theta - \omega_0 - \ldots - \omega_{k-1}$, posibilităţi pe care le vom ignora pentru moment.

Scanned with OKEN Scanner

DEFINIȚIA 6. Clasa $\mathcal{C}_k$ a tuturor testelor închise ce satisfac

(21) $1 - Q_\theta(\theta) \leqslant \gamma_j$ pentru fiecare $\theta \in \omega_j$ și pentru $j = 0, 1, \ldots, k-1$

poartă numele de clasă validă (unde $\{0 \leqslant \gamma_j \leqslant 1\}$ sînt riscurile prestabilite).

Restrîngîndu-ne atenția la $\mathcal{C}_k$ ne propunem să găsim testul U.C.M.E. S_k^* în sensul (XXI. 21). Totuși nu este cunoscut dacă un astfel de test există, chiar cînd $\{H_j\}$ sînt toate ipoteze simple.

În cele ce urmează vom descrie un test bun în $\mathcal{C}_k$ dat de Sobel, Wald (1949), pentru cazul particular $k = 3$ și pentru o familie de modele probabilistice generală. Testul este bun, în sensul că este mai eficient, pentru toți θ, decît testul optim bazat pe o selecție de volum fix.

Pentru anumite valori ale lui θ, V.M.V.S. a acestui test se compară favorabil cu unele margini inferioare generale date de Simons (1967) pentru orice test al ipotezei (20).

2.2. Testul Sobel-Wald

Ne restrîngem atenția la variabilele independente și identic repartizate $\{x_i\}$ avînd repartiția comună de forma Darmois–Koopman (XXII. 39). Considerăm problema discriminării între trei ipoteze simple :

$$H_0 : \theta = \theta_0, \quad H_1 : \theta = \theta_1, \quad H_2 : \theta = \theta_2$$

(22)

$$\underline{\theta} < \theta_0 < \theta_1 < \theta_2 < \bar{\theta}$$

supusă la $k = 3$ cereri în (21). Soluția optimă (nealeatorizată) bazată pe o selecție de volum fixat a acestei probleme este definită de

$$\begin{aligned} &\text{accept } H_0 \text{ dacă } T_n \leqslant \underline{t} \\ (23) \qquad &\text{accept } H_1 \text{ dacă } \underline{t} < T_n \leqslant \bar{t}, \\ &\text{accept } H_2 \text{ dacă } T_n > \bar{t}, \end{aligned}$$

unde

$$T_n = \Sigma\, T(x_i), \quad \underline{t} \equiv \underline{t}(\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2) < \bar{t} \equiv \bar{t}(\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2)$$

și cel mai mic întreg pozitiv $n = n(\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2)$ este determinat de

$$\begin{aligned} &F_n(\underline{t} : \theta_0) \geqslant 1 - \gamma_0, \\ &F_n(\bar{t}\,; \theta_1) - F_n(\underline{t}\,; \theta_1) \geqslant 1 - \gamma_1, \\ (24) \qquad &F_n(\bar{t}\,; \theta_2) \leqslant \gamma_2, \\ &F_n(t : \theta) = P(T_n \leqslant t \mid \theta) \end{aligned}$$

Scanned with OKEN Scanner

Pentru a descrie testul Sobel — Wald pentru (22) trebuie să dăm unele rezultate preliminarii.

Pentru $j = 1, 2$, fie $S(b_j, a_j)$ T.S.R.P. pentru H_{j-1} faţă de H_j cu $b_j < a_j$ şi fie

$$z_i(j) = \ln \frac{f(x_i\,;\,\theta_j)}{f(x_i\,;\,\theta_{j-1})} = \psi_j + \Delta_j T(x_j)\,;\quad Z_n(j) = \sum_{i=1}^{n} z_i(j), \tag{25}$$

unde

$$\psi_j = \ln \frac{C(\theta_j)}{C(\theta_{j-1})}, \qquad \Delta_j = D(\theta_j) - D(\theta_{j-1}) > 0.$$

Atunci inegalitatea critică a testului $S(b_j, a_j)$ la pasul $n \geqslant 1$ este

$$b_j < Z_n(j) < a_j$$

sau echivalent

$$c_n(j) < T_n < d_n(j), \tag{26}$$

unde

$$T_n = \sum_{i=1}^{n} T(x_i), \qquad c_n(j) = \frac{b_j - n\psi_j}{\Delta_j} < d_n(j) = \frac{a_j - n\psi_j}{\Delta_j}.$$

Dacă

$c_n(1) \leqslant c_n(2)$ şi $d_n(1) \leqslant d_n(2)$ pentru fiecare $n \geqslant 1$,

este imposibil pentru $S(b_1, a_1)$ să accepte H_0 cînd $S(b_2, a_2)$ conduce la acceptarea ipotezei H_2.

Totuşi, inegalitatea

$$c_n(1) \leqslant c_n(2) \quad \text{şi} \quad d_n(1) \leqslant d_n(2)$$

pot să nu fie necesare pentru a asigura că atît H_0 cît şi H_1 nu sînt acceptate.

LEMA 1. *Condiţia necesară şi suficientă pentru ca amîndouă inegalităţile*

$$c_n(1) \leqslant c_n(2) \quad \text{şi} \quad d_n(1) \leqslant d_n(2)$$

să aibe loc pentru fiecare $n \geqslant 1$ *este ca*

$$\psi_1\Delta_2 - \psi_2\Delta_1 \geqslant \max\,[b_1\Delta_2 - b_2\Delta_1,\ a_1\Delta_2 - a_2\Delta_1]. \tag{27}$$

Condiţia necesară şi suficientă pentru ca

$$d_n(1) \leqslant c_n(2)$$

să aibe loc pentru fiecare $n \geqslant 1$ *este ca*

$$\psi_1\Delta_2 - \psi_2\Delta_1 \geqslant a_1\Delta_2 - b_2\Delta_1.$$

De asemenea

$$d_n(1) < c_n(2)$$

pentru toţi n.

Scanned with OKEN Scanner

Demonstrație. Deoarece $D = D(\theta)$ este presupusă strict crescătoare în θ, putem exprima $C(\theta)$ ca $C^*(D)$ și (XXII. 39) este de forma alternativă

$$\mathrm{d}F(x : \theta) = p(x : D)\mathrm{d}G(x),$$

unde

$$p(x : D) = c^*(D)\, \mathrm{e}^{DT(x)}, \quad D(\underline{\theta}) < D < D(\overline{\theta})$$

și $D_1 = D(\theta_1)$ poate fi scris ca $\lambda D_0 + (1 - \lambda)D_1$ pentru un $0 < \lambda < 1$, unde $D_0 = D(\theta_0)$, $D_2 = D(\theta_2)$.

Din inegalitatea lui Hölder

$$[C^*(D_1)]^{-1} = \int \mathrm{e}^{[\lambda D_0 + (1-\lambda)D_2]T(x)}\, \mathrm{d}G(x) <$$

$$< \left[\int \mathrm{e}^{D_0 T(x)}\, \mathrm{d}G(x)\right]^{\lambda} \left[\int \mathrm{e}^{D_1 T(x)}\, \mathrm{d}G(x)\right]^{1-\lambda} = [C^*(D_0)]^{-\lambda}[C^*(D_2)]^{\lambda-1},$$

care implică $\psi_1\Delta_2 > \psi_2\Delta_1$, ori de cîte ori $\underline{\theta} < \theta_0 < \theta_1 < \theta_2 < \overline{\theta}$. Din expresiile din (26) urmează că, dacă are loc (27), atunci

$$c_1(1) \leqslant c_1(2) \quad \text{și} \quad d_1(1) \leqslant d_1(2),$$

în timp ce

$$c_n(1) < c_n(2) \text{ și } d_n(1) < d_n(2) \text{ pentru fiecare } n > 1.$$

Reciproc, dacă

$$c_1(1) \leqslant c_1(2) \quad \text{și} \quad d_1(1) \leqslant d_1(2),$$

atunci are loc (27).

A doua concluzie a lemei este imediată și dacă $b_1 \leqslant a_1$ și $b_2 \leqslant a_2$, ea implică (27).

În final, punînd

$$N = (a_1\Delta_2 - b_2\Delta_1)/(\psi_1\Delta_2 - \psi_2\Delta_1), \tag{28}$$

urmează că $d_n(1) \geqslant c_n(2)$ pentru fiecare $n \leqslant N$ și $d_n(1) \leqslant c_n(2)$ pentru fiecare $n > N$.

Testul Sobel-Wald $S(b_1, b_2, a_1, a_2)$ pentru (22) poate fi definit după cum urmează :

Alegem $b_1 < a_1$ și $b_2 < a_2$ pentru a satisface (27) și aplicăm simultan $S(b_1, a_1)$ și $S(b_2, a_2)$ observînd succesiv $\{x_i\}$. La fiecare pas $n \geqslant 1$ luăm una dintre deciziile :

(29)
i) acceptăm H_0 dacă $S(b_1, a_1)$ acceptă H_0.
ii) acceptăm H_1 dacă atît $S(b_1, a_1)$ cît și $S_2(b_2, a_2)$ acceptă H_1,
iii) acceptăm H_2 dacă $S(b_2, a_2)$ acceptă H_2,
iv) în rest se continuă experimentul observînd x_{n+1}.

Observăm că restricția (27) exclude posibilitatea ca $S(b_1, a_1)$ să accepte H_0 și $S(b_2, a_2)$ să accepte H_2 și absența acestei eventualități, ușurează mult evaluarea proprietăților testului.

Scanned with OKEN Scanner

Cercetăm proprietăţile de bază ale testului $S(b_1, b_2, a_1, a_2)$.

Fie $Q^{(j)}(\theta)$ şi $M^{(j)}(n_j; \theta)$ funcţiile C.O. şi V.M.V.S. ale testului $S(b_1, b_2, a_1, a_2)$. Atunci V.D.S. al testului $S(b_1, b_2, a_1, a_2)$ este $n = \max[n_1, n_2]$, şi prin urmare, pentru fiecare $n \geqslant 1$ şi $\underline{\theta} < \theta < \overline{\theta}$,

$$P(n > n \mid \theta) = P(n_1 \geqslant n \mid \theta) + P(n_2 > n \mid \theta) - P(n_1 > n, n_2 > n \mid \theta).$$

Din teorema XXII.6 urmează că $S(b_1, b_2, a_1, a_2)$ este închis şi toate momentele lui n finite

TEOREMA 3. *Pentru fiecare* $\underline{\theta} < \theta < \overline{\theta}$, *funcţiile* C.O. *ale testului* $S(b_1, b_2, a_1, a_2)$ *satisfac identităţile*

$$Q_0(\theta) \equiv Q^{(1)}(\theta), \quad Q_1(\theta) \equiv Q^{(2)}(\theta) - Q^{(1)}(\theta),$$
$$Q_2(\theta) \equiv 1 - Q^{(2)}(\theta) \tag{30}$$

şi $Q_0(\theta_0) + Q_1(\theta_1) + Q_2(\theta_2) > 1$. *Pentru fiecare* $\underline{\theta} < \theta < \overline{\theta}$, *funcţia* V.M.V.S. a $S(b_1, b_2, a_1, a_2)$ *satisface inegalităţile*

$$\max [M^{(1)}(n_1; \theta), \quad M^{(2)}(n_2; \theta)] \leqslant M(n; \theta) \leqslant$$
$$\leqslant \min [M_{b_1}(n'; \theta), \quad M_{a_2}(n''; \theta)] \tag{31}$$

unde n' *este* V.D.S. *al testului* $S(b_1, \infty)$ *pentru verificarea* H_0 *faţă de* H_1 *şi* n'' *este* V.D.S. *al testului* $S(-\infty, a_2)$ *pentru* H_1 *faţă de* H_2.

Demonstraţie. $S(b_1, b_2, a_1, a_2)$ acceptă H_0 dacă şi numai dacă $S(b_1, a_1)$ acceptă H_0 şi prin urmare $Q_0(\theta) \equiv Q^{(1)}(\theta)$ pentru toţi θ. Similar, $S(b_1, b_2, a_1, a_2)$ acceptă H_2 dacă şi numai dacă $S(b_2, a_2)$ acceptă H_2, implicînd $Q_2(\theta) \equiv 1 - Q^{(2)}(\theta)$ pentru toţi θ. Deaorece $S(b_1, b_2, a_1, a_2)$ este închis, $Q_1(\theta) = 1 - Q_0(\theta) - Q_2(\theta)$ conduce la a doua identitate din (30). Aplicînd ultima inegalitate din (XXII. 16) succesiv la $S(b_1, a_1)$ şi $S(b_2, a_2)$ se obţine

$$Q^{(1)}(\theta_1) - Q^{(1)}(\theta_0) < 0, \quad Q^{(2)}(\theta_2) - Q^{(2)}(\theta_1) < 0,$$

care împreună cu (30) conduce la

$$Q_0(\theta_0) + Q_1(\theta_1) + Q_2(\theta_2) < 1.$$

În continuare, deoarece pentru fiecare $n \geqslant 1$ şi $\underline{\theta} < 0 < \overline{\theta}$,

$$P(n \geqslant n \mid \theta) = P(n_1 \geqslant n \mid \theta) + P(n_1 < n, \ n_2 \geqslant n \mid \theta) =$$
$$= P(n_2 \geqslant n \mid \theta) + P(n_1 \geqslant n, \ n_2 < n \mid \theta),$$

rezultă inegalitatea stîngă din (31). Pentru cazul particular cînd

$$\psi_1 \Delta_2 - \psi_2 \Delta_1 \geqslant a_1 \Delta_2 - b_2 \Delta_1$$

Scanned with OKEN Scanner

după lema 1 trebuie să avem fie

$$P(n_1 = 1 \mid \theta) = 1 \text{ sau } P(n_2 = 1 \mid \theta) = 1 \text{ pentru toți } \theta, \text{ și}$$

și

$$P(n = 1 \mid \theta) = 1 - P\left(\frac{b_1 - \psi_1}{\Delta_1} < T(x) < \frac{a_1 - \psi}{\Delta_1} \,\middle|\, \theta\right) -$$

$$- P\left(\frac{b_2 - \psi_2}{\Delta_2} < T(x) < \frac{a_2 - \psi_2}{\Delta_2} \,\middle|\, \theta\right),$$

$$P(n = n \mid \theta) = \max\,[P(n_1 = n \mid \theta), \quad P(n_2 = n \mid \theta)], \quad n \geqslant 1,$$

astfel ca în (31) în stînga avem egalitate strictă. În final, deoarece terminarea testelor $S(b_1, \infty)$ sau $S(-\infty, a_2)$ la orice pas $n \geqslant 1$ implică acceptarea sub $S(b_1, b_2, a_1, a_2)$ la pasul n sau înainte, urmează inegalitatea din dreapta din (31).

Deoarece, pentru $j = 1$ sau 2, $\{z_i(j)\}$ sînt independente și identic repartizate, $Q^{(j)}(\theta)$ și marginile în (31) pot fi determinate pentru orice θ prin metode aproximative sau exacte. Totuși, observăm că marginea superioară în (31) este ∞ dacă

$$-\psi_1/\Delta_1 \leqslant \zeta_\theta \leqslant -\psi_2/\Delta_2,$$

unde $\zeta_\theta = M(T(x);\ \theta)$. În particular, dacă $b_j < 0 < a_j$ și excesele lui $Z_n(j)$ față de b_j și a_j sînt mici, aproximațiile lui Wald dau

$$Q_0(\theta) \simeq \begin{cases} [e^{a_1 h_1(\theta)} - 1][e^{a_1 h_1(\theta)} - e^{b_1 h_1(\theta)}]^{-1} & , \quad \zeta_\theta \neq -\psi_1/\Delta_1 \\ a_1(a_1 - b_1)^{-1} & , \quad \zeta_\theta = -\psi_1/\Delta_1 \end{cases}$$

(32)
$$Q_2(\theta) \simeq \begin{cases} [1 - e^{b_2 h_2(\theta)}][e^{a_2 h_2(\theta)} - e^{b_2 h_2(\theta)}]^{-1} & , \quad \zeta_\theta \neq -\psi_2/\Delta_2 \\ -\,b_2(a_2 - b_2)^{-1} & , \quad \zeta_\theta = -\psi_2/\Delta_2 \end{cases}$$

$$Q_1(\theta) = 1 - Q_0(\theta) - Q_2(\theta),$$

unde $h_j(\theta) \neq 0$ este determinat de

$$M(e^{\Delta_j h_j(\theta) T(x)};\ \theta) = e^{-\psi_j h_j(\theta)},$$

și

$$M_1(n_1;\ \theta) = \begin{cases} [a_1 - (a_1 - b_1)\, Q_0(\theta)]\,(\psi_1 + \Delta_1 \zeta_\theta)^{-1}, & \zeta_\theta \neq -\psi_1/\Delta_1 \\ \dfrac{-\,a_1 b_1}{\Delta_1^2 D^2(T(x);\ \theta)} & , \quad \zeta_\theta = -\psi_1/\Delta_1 \end{cases}$$

(33)
$$M_2(n_2;\ \theta) = \begin{cases} [(a_2 - b_2)\, Q_2(\theta) + b_2]\,(\psi_2 + \Delta_2 \zeta_\theta)^{-1}, & \zeta_\theta \neq -\psi_2/\Delta_2 \\ \dfrac{-\,a_2 b_2}{\Delta_2^2 D^2(T(x);\ \theta)} & , \quad \zeta_\theta = -\psi_2/\Delta_2 \end{cases}$$

$$M_{b_1}(n';\ \theta) \simeq b_1(\psi_1 + \Delta_1 \zeta_\theta)^{-1} \quad , \quad \zeta_\theta < -\psi_1/\Delta_1,$$

$$M_{a_2}(n'';\ \theta) \simeq a_2(\psi_2 + \Delta_2 \zeta_\theta)^{-1} \quad , \quad \zeta_\theta > -\psi_2/\Delta_2.$$

Scanned with OKEN Scanner

Aproximaţiile din (32) şi (33) vor fi corespunzătoare dacă $|\psi_2 + \Delta_j\zeta_0|$ şi $\Delta_j^2 D^2(T(x); 0)$ sînt rezonabil de mici în comparaţie cu a_j şi $-b_j$.

Considerăm acum problema determinării constantelor procedurii Sobel-Wald astfel încît testul să satisfacă (21). Deoarece suma celor trei riscuri ale $S(b_1, b_2, a_1, a_2)$ trebuie să fie mai mică decît 2 (teorema 3) este logic să presupunem că $\gamma_0 + \gamma_1 + \gamma_2 < 2$.

Dat $(\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2)$, putem egala membrii din dreapta ai egalităţilor (32) în $\theta = \theta_0, \theta_2, \theta_1$, cu $1 - \gamma_0$, $1 - \gamma_2$, respectiv $1 - \gamma_1$ şi atunci rezolvăm pentru $b_1 < 0$, $b_2 < 0$, $a_1 > 0$ şi $a_2 > 0$. Observînd că

$$h_1(\theta_0) = h_2(\theta_1) = 1 \quad \text{şi} \quad h_1(\theta_1) = h_2(\theta_2) = -1$$

soluţiile sînt

$$b_1(\xi) = \ln \frac{\gamma_1 - \xi}{1 - \gamma_0}$$

$$b_2(\xi) = \ln \frac{\gamma_2}{1 - \xi}$$

(34)

$$a_1(\xi) = \ln \frac{1 + \xi - \gamma_1}{\gamma_0}$$

$$a_2(\xi) = \ln \frac{1 - \gamma_0}{\xi},$$

unde ξ este orice număr real ce satisface

$$\max [0, \gamma_0 + \gamma_1 - 1] < \xi < \min [\gamma_1, 1 - \gamma_2].$$

Dacă pentru $j = 1, 2$ excesele lui $Z_n(j)$ faţă de $b_j(\xi)$ şi $a_j(\xi)$ sînt mici, testul

$$S(b_1(\xi), \quad b_2(\xi), \quad a_1(\xi), \quad a_2(\xi))$$

va satisface egalităţile în (21) aproximativ, cu condiţia ca cele patru constante să satisfacă de asemenea (27). Există o mare flexibilitate în alegerea testului Sobel-Wald pentru (22) supusă (21) şi aceasta este un avantaj.

De asemenea adeseori se urmăreşte controlul funcţiei $Q_0(\theta_1)$ care este riscul care nu este încorporat în (21) în $\gamma_3 > 0$ mic prestabilit şi această cerere adiţională dă $\xi = \gamma_1 - \gamma_3$ unic. Un astfel de control nu este posibil să fie atins de testul (23), bazat pe selecţie de volum fixat. Se poate decide ce valoare a lui ξ minimizează $\sup_\theta M(n; \theta)$. O astfel de alegere prezintă dificultate analitică. Pe de altă parte, dacă nu se impune nici o restricţie funcţiilor C.O. şi V.M.V.S. ale

$$S(b_1(\xi), \quad b_2(\xi), \quad a_1(\xi), \quad a_2(\xi))$$

Scanned with OKEN Scanner

atunci cele trei inegalităţi

$$Q_0(\theta_0) \geqslant 1 - \frac{\gamma_0}{1 + \xi - \gamma_1},$$

$$Q_1(\theta_1) \geqslant 1 - \frac{\gamma_1 - \xi}{1 - \gamma_0} - \frac{\xi}{1 - \gamma_2},$$

$$Q_2(\theta_2) \geqslant 1 - \frac{\gamma_2}{1 - \xi}$$

care urmează din relaţiile (XXII.16), sugerează că cea mai rezonabilă alegere pentru ξ este punctul central dintre max $[0, \gamma_0 + \gamma_1 - 1]$ şi min $[\gamma_1, 1 - \gamma_2]$. Astfel se poate lua $\xi = \gamma_0/2$ dacă $0 < \gamma_0 = \gamma_1 = \gamma_2 < \frac{2}{3}$ şi $\xi = \gamma_0$ dacă $0 < \gamma_0 = \gamma_1/2 = \gamma_2 < \frac{1}{2}$.

Exceptînd cazul banal cînd

$$\psi_1\Delta_2 - \psi_2\Delta_1 \geqslant a_1\Delta_2 - b_2\Delta_1$$

este dificil să se obţină orice formulă aproximativă pentru funcţia V.M.V.S. a testului Sobel-Wald. Marginile în (31) împreună cu (33) sînt adeseori de folos pentru acest scop. Dacă $Q_0(\theta_0)$ este mare, pentru $\theta \leqslant \theta_0$, atît $M^{(1)}(n_1; \theta)$ cît şi $M_{b_1}(n'; \theta)$ vor fi apropiate de $M(n; \theta)$. Atunci după teorema XXII.4 $Q_0(\theta)$ este mare ori de cîte ori $\theta < \theta_0$ şi prin urmare decizia sub $S(b_1, b_2, a_1, a_2)$ sînt dominate puternic de $S(b_1, a_1)$ sau $S(b_1, \infty)$. Similar, dacă $Q_2(\theta_2)$ este mare, atît $M^{(2)}(n_2; \theta)$ cît şi $M_{a_2}(n''; \theta)$ vor fi apropiate de $M(n; \theta)$ pentru $\theta > \theta_2$. Pe de altă parte, marginea superioară în (31) este nefolositoare pentru θ satisfăcînd

$$-\psi_1/\Delta_1 \leqslant \zeta_0 \leqslant -\psi_2/\Delta_2.$$

Pentru a obţine margini superioare alternative în astfel de cazuri fie N cel mai mic întreg $\geqslant \dfrac{a_1\Delta_2 - b_2\Delta_1}{\psi_1\Delta_2 - \psi_2\Delta_1}$.

Considerăm două procedee, W_1 şi W_2 fiecare pornind cu extragerea a N observaţii şi fie $T_N = T(x_1) + \ldots + T(x_N)$.

Procedeul W_1. i) acceptă H_0 dacă $T_N \leqslant c_N(1)$

ii) observînd x_{N+1} se aplică T.S.R.P. condiţionat

$$S(b_1 - N\psi_1 - \Delta_1 T_{N_1},\quad a_1 - N\psi_1 - \Delta_1 T_N)$$

a lui H_0 faţă de H_1 dacă $c_N(1) < T_N < d_N(1)$,

iii) se acceptă H_1 dacă $d_N(1) \leqslant T_N \leqslant c_N(2)$ şi

iv) se aplică T.S.R.P. condiţionat

$$S(b_2 - N\psi_2 - \Delta_2 T_N,\ \infty)$$

pentru H_1 faţă de H_2 dacă $T_N > c_N(2)$

Scanned with OKEN Scanner

Procedeul W_2. i) acceptă H_2 dacă $T_N \geqslant d_N(2)$.
ii) se aplică T.S.R.P. condiţionat

$$S(b_2 - N\psi_2 - \Delta_2 T_N, \quad a_2 - N\psi_2 - \Delta_2 T_N)$$

a lui H_1 faţă de H_2 dacă $c_N(2) < T_N < d_N(2)$,
iii) acceptăm H_1 dacă $d_N(1) \leqslant T_N \leqslant c_N(2)$ şi
iv) se aplică T.S.R.P. condiţionat

$$S(-\infty, \; a_1 - N\psi_1 - \Delta_1 T_N)$$

a lui H_0 faţă de H_1 dacă $T_N < d_N(1)$. Avem :

(35) $\quad M(n\,;\,\theta) \leqslant \min\,[M_{w_1}(n_{w_1}\,;\,\theta),\; M_{w_2}(n_{w_2}\,;\,\theta)]$ pentru fiecare θ.

Aproximaţiile lui Wald pentru funcţiile V.M.V.S. a diferite T.S.R.P. condiţionate dau

(36)

$$M_{w_1}(n_{w_1}\,;\;\theta) \cong N - \frac{\Delta_2}{\psi_2 + \Delta_2\zeta_\theta} \int\limits_{y > c_N(2)} [y - c_N(2)]\,\mathrm{d}H_N(y\,;\;\theta) + K_1(\theta), \quad \zeta_\theta < -\psi_2/\Delta_2$$

$$M_{w_2}(n_{w_2}\,;\,\theta) \simeq N + \frac{\Delta_1}{\psi_1 + \Delta_1\zeta_\theta} \int\limits_{y < d_N(1)} [d_N(1) - y]\,\mathrm{d}H_N(y\,;\;\theta) + K_2(\theta), \quad \zeta_\theta > -\psi_1/\Delta_1$$

unde $H_N(y\,;\,\theta) = P(T_N \leqslant y \mid \theta)$ şi pentru $j = 1, 2$,

$$K_j(\theta) = \begin{cases} \dfrac{\Delta_j}{\psi_j + \Delta_j\zeta_\theta} \displaystyle\int\limits_{c_N(j) < y < d_N(j)} \left[d_N(j) - y - \frac{a_j - b_j}{\Delta_j} Q_j(y,\,\theta)\right] \mathrm{d}H_N(y\,;\,\theta), \\ \qquad\qquad \zeta_\theta \neq -\psi_j/\Delta_j \\ \dfrac{1}{D^2(T(x)\,;\,\theta)} \displaystyle\int\limits_{c_N(j) < y < d_N(j)} [d_N(j) - y][y - c_N(j)]\,\mathrm{d}H_N(y\,;\;\theta), \\ \qquad\qquad \zeta_\theta = -\psi_j/\Delta_j \end{cases}$$

$$Q_j(y\,;\,\theta) = [\mathrm{e}^{d_N(j)\Delta_j h_j(\theta)} - \mathrm{e}^{y\Delta_j h_j(\theta)}][\mathrm{e}^{d_N(j)\Delta_j h_j(\theta)} - \mathrm{e}^{c_N(j)\Delta_j h_j(\theta)}]^{-1},$$

şi h_j este definit în (32).
Pentru θ apropiat de θ_1, care implică

$$-\psi_1/\Delta_1 < \zeta_\theta < -\psi_2/\Delta_2,$$

$M_{w_1}(n_{w_1}\,;\,\theta)$ şi $M_{w_2}(n_{w_2}\,;\,\theta)$ vor fi apropiate una de cealaltă.

Scanned with OKEN Scanner

V.M.V.S. a procedurii Sobel-Wald atinge un minim local cînd θ este apropiat de θ_1 şi un maxim local în fiecare din intervalele (θ_0, θ_1) şi (θ_1, θ_2). În ansamblu comportarea poate fi studiată bine din marginile lui (31) şi (35) împreună cu (33) şi (36). Deoarece V.D.S. al testului depinde de V.D.S. ale testelor $S(b_1, a_1)$ şi $S(b_2, a_2)$, regulile de decizie în (29) nu depind complet de şirul suficient $\{T_n\}$. Atunci va părea că $S(b_1(\xi), b_2(\xi), a_1(\xi), a_2(\xi))$ nu va fi cel mai eficient test pentru (22) chiar în $\theta = \theta_0, \theta_1, \theta_2$. Totuşi, dacă $Q_0(\theta_0)$ (sau $Q_2(\theta_2)$) este foarte mare, rolul dominant al testului $S(b_1(\xi), a_1(\xi))$ (sau $S(b_2(\xi), a_2(\xi))$ va implica că $M(n; \theta_0)$ (sau $M(n; \theta_2)$) şi $M(n; \theta_1)$ vor fi minimizate de testul Sobel-Wald, cu o alegere convenabilă a lui ξ, printre toate testele valide. În particular, dacă probabilităţile erorilor nu sînt mici ($\geqslant 0{,}01$), V.M.V.S. a testului Sobel-Wald tinde să fie mai mic decît volumul selecţiei optime pentru toţi θ.

Exemplul 6. Presupunem că $\{x_i\}$ sînt independente şi repartizate $N(\mu, \sigma^2)$, σ^2 cunoscută. Considerăm ipotezele.

$$H_0 : \mu = \mu_0, \quad H_1 : \mu = \mu_1, \quad H_2 : \mu = \mu_2, \quad -\infty < \mu_0 < \mu_1 < \mu_2 < \infty.$$

Avem de-a face cu un caz particular al familiei (XXII. 39) cu

$$C(\mu) = e^{-\mu^2/2\sigma^2}, \quad D(\mu) = \frac{\mu}{\sigma^2}, \quad T(x) = x, \quad g(x) = (\sigma\sqrt{2\pi})^{-1} e^{-x^2/2\sigma^2}.$$

În testul Sobel-Wald avem

$$\psi_j = \frac{-\delta_j(\mu_j + \mu_{j-1})}{2\sigma}, \quad \Delta_j = \frac{\delta_j}{\sigma} > 0, \text{ unde } \delta_j = \frac{\mu_j - \mu_{j-1}}{\sigma}, \quad j = 1,2.$$

Condiţia (27) poate fi rescrisă ca

$$\delta_1\delta_2(\delta_1 + \delta_2) \geqslant 2 \max [b_1\delta_2 - b_2\delta_1, \; a_1\delta_2 - a_2\delta_1],$$

şi se verifică că această condiţie este de asemenea necesară ca nici una dintre ipotezele H_0 şi H_2 să fie acceptată cînd se aplică simultan două T.S.R.P. În (32) şi (33) avem

$$h_j(\mu) = \frac{\mu_j + \mu_{j-1} - 2\mu}{\delta_j \sigma}, \quad \zeta_\mu = \mu, \quad D^2(T(x) : \mu) = \sigma^2.$$

Membrii din dreapta ai relaţiilor (37) se reduc la

$$M_{w_1}(n_{w_1} : \mu) \simeq N + \frac{2\sigma\sqrt{N}}{\mu_2 + \mu_1 - 2\mu} [\varphi(s_2) - s_2\Phi(-s_2)] + K_1(\mu), \quad \mu < (\mu_2 + \mu_1)/2$$

$$M_{w_2}(n_{w_2}; \mu) \simeq N + \frac{2\sigma\sqrt{N}}{2\mu - \mu_1 - \mu_0} [\varphi(t_1) + t_1\Phi(t_1)] + K_2(\mu), \quad \mu > (\mu_1 + \mu_0)/2,$$

Scanned with OKEN Scanner

unde N este cel mai mic întreg $\geqslant \dfrac{2(a_1\delta_2 - b_2\delta_1)}{\delta_1\delta_2(\delta_1 + \delta_2)}$

și

$$K_j(\mu) = \frac{2\sigma\sqrt{N}}{2\mu - \mu_j - \mu_{j-1}} [\Phi(t_j) - \Phi(s_j)] \times$$

$$\times \left[t_j - \frac{(a_j - b_j) \exp [k_j h_j(\mu)]}{\delta_j \sqrt{N} (\exp [k_j h_j(\mu)] - \exp [k'_j h_j(\mu)])} \right] +$$

$$+ \frac{2(a_j - b_j)\sigma \exp [N\mu\delta_j h_j(\mu)/\sigma + N\delta_j^2 h_j^2(\mu)/2]}{\delta_j(2\mu - \mu_j - \mu_{j-1}) (\exp [k_j h_j(\mu)] - \exp [k'_j h_j(\mu)])} \times$$

$$\times [\Phi(t_j - \delta_j h_j(\mu)\sqrt{N}) - \Phi(s_j - \delta_j h_j(\mu)\sqrt{N})] +$$

$$+ \frac{2\sigma\sqrt{N}}{2\mu - \mu_j - \mu_{j-1}} [\varphi(t_j) - \varphi(s_j)], \quad \mu \neq (\mu_j + \mu_{j-1})/2$$

$$K_j(\mu) = N[t_j\varphi(s_j) - s_j\varphi(t_j) + (s_j t_j + 1)\{\Phi(t_j) - \Phi(s_j)\}], \quad \mu = (\mu_j + \mu_{j-1})/2,$$

$$s_j = \frac{b_j}{\delta_j\sqrt{N}} + \frac{(\mu_j + \mu_{j-1} - 2\mu)\sqrt{N}}{2\sigma}, \quad t_j = \frac{a_j}{\delta_j\sqrt{N}} + \frac{(\mu_j + \mu_{j-1} - 2\mu)\sqrt{N}}{2\sigma},$$

$$k_j = a_j + \frac{(\mu_j + \mu_{j-1})N\delta_j}{2\sigma}, \quad k'_j = b_j + \frac{(\mu_j + \mu_{j-1})N\delta_j}{2\sigma}.$$

Pentru testul optim bazat pe o selecție de volum fix asupra densității

$$f_{t,x}(x, \theta_x) = C_t(\theta_x)\, e^{D(\theta_x)T_{t,x}(x)}\, g_{t,x}(x), \text{ avem}$$

$$\underline{t} = n\mu_0 + \sigma\sqrt{n}\, u_{1-\gamma_0}, \quad \bar{t} = n\mu_2 + \sigma\sqrt{n}\, u_{\gamma_2}$$

și $n = n(\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2)$ este determinat de ecuația

$$\Phi(\delta_1\sqrt{n} - u_{1-\gamma_0}) + \Phi(\delta_2\sqrt{n} + u_{\gamma_2}) = 2 - \gamma_1.$$

Exemplul 7. Presupunem că $\{x_i\}$ sînt independente și repartizate identic $Bi(\cdot, p)$ și că cele trei ipoteze sînt :

$$H_0 : p = p_0, \quad H_1 : p = p_1, \quad H_2 : p = p_2, \quad 0 < p_0 < p_1 < p_2 < 1.$$

Sîntem într-un caz particular al familiei (XXII. 79) cu

$$C(p) = 1 - p, \quad D(p) = \ln \frac{p}{1-p}, \quad T(x) = x, \quad g(x) = 1.$$

Scanned with OKEN Scanner

În testul Sobel-Wald avem :

$$\psi_j = -\ln\frac{1-p_{j-1}}{1-p_j} < 0, \quad \Delta_j = \ln\frac{p_j}{p_{j-1}} - \psi_j > 0.$$

Condiția (27) este suficientă însă nu necesară pentru ca atît H_0 cît și H_2 să fie acceptate cînd $S(b_1, a_1)$ și $S(b_2, a_2)$ sînt aplicate simultan. Astfel dacă luăm

$$\psi_1 < b_1 < 0, \quad b_2 = \psi_2, \quad a_1 = \Delta_1 + \psi_1, \quad 0 < a_2 < \Delta_2 + \psi_2,$$

atunci (27) nu are loc, însă în primul pas $S(b_1, a_1)$ acceptă H_0 și $S(b_2, a_2)$ acceptă H_1 dacă $x_1 = 0$, în timp ce $S(b_1, a_1)$ acceptă H_1 și $S_2(b_2, a_2)$ acceptă H_2 dacă $x_1 = 1$. Acum în (32) și (33) avem $\zeta_p = p$, $D^2(T(x); p) = p(1-p)$ și $h_j(p) \neq 0$ este determinată din

$$p\left(\frac{p_j}{p_{j-1}}\right)^{h_j(p)} + (1-p)\left(\frac{1-p_j}{1-p_{j-1}}\right)^{h_j(p)} = 1.$$

Pentru a exprima (36) fie t_j cel mai mic întreg $\geqslant (a_j - N\psi_j)/\Delta_j$ și s_j cel mai mare întreg $\leqslant (b_j - N\psi_j)/\Delta_j$, unde N este definit în (36). Atunci

$$M_{w_1}(n_{w_1}; p) \cong N - \frac{1}{\psi_2 + p\Delta_2}[Np\Delta_2\{1 - H_{N-1}(s_2 - 1; p)\} -$$
$$- (b_2 - N\psi_2)\{1 - H_N(s_2; p)\}] + K_1(p), \quad p < -\psi_2/\Delta_2$$

$$M_{w_2}(n_{w_2}; p) \cong N + \frac{1}{\psi_1 + p\Delta_1}[(a_1 - N\psi_1) H_N(t_1 - 1; p) -$$
$$- Np\Delta_1 H_{N-1}(t_1 - 2; p) + K_2(p)], \qquad p > -\psi_1/\Delta_1,$$

unde $K_j(p) = 0$ dacă $t_j - s_j = 1$ și în rest

$$K_j(p) = \begin{cases} \dfrac{1}{\psi_j + p\Delta_j}[(a_j - N\psi_j)\{H_N(t_j - 1; p) - H_N(s_j; p)\} - \\ \qquad - Np\Delta_j\{H_{N-1}(t_j - 2; p) - H_{N-1}(s_{j-1}; p)\}] - \\ \qquad - \dfrac{a_j - b_j}{\psi_j + p\Delta_j}\displaystyle\sum_{y=s_j+1}^{t_j-1} Q_j(y, p) C_N^y p^y (1-p)^{N-y}, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad p \neq -\psi_j/\Delta_j, \\ \dfrac{1}{p(1-p)\Delta_j^2}[Np\Delta_j(a_j + b_j - 2N\psi_j - \Delta_j) \times \\ \qquad \times \{H_{N-1}(t_j - 2; p) - H_{N-1}(s_j - 1; p)\} - \\ \qquad - (a_j - N\psi_j)(b_j - N\psi_j)\{H_N(t_j - 1; p) - H_N(s_j; p)\} - \\ \qquad - N(N-1)p^2\Delta_j^2\{H_{N-2}(t_j - 3; p) - H_{N-2}(s_j - 2; p)\}], \\ \qquad\qquad\qquad\qquad p = -\psi_j/\Delta_j \end{cases}$$

$$H_N(T; p) = \sum_{y=0}^{T} C_N^y p^y (1-p)^{N-y},$$

$$Q_j(y; p) = \frac{\exp[(a_j - N\psi_j)h_j(p)] - \exp[y\Delta_j h_j(p)]}{\exp[(a_j - N\psi_j)h_j(p)] - \exp[(b_j - N\psi_j)h_j(p)]}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Termenul care conține sumarea după $Q_j(y, p)$ fiind dificil de calculat, se poate înlocui prin cantitatea mai mare

$$-\frac{a_j - b_j}{\psi_j + p\Delta_j} \cdot \frac{\exp[(a_j - N\psi_j)h_j(p)] - \exp[(s_j + 1)\Delta_j h_j(p)]}{\exp[(a_j - N\psi_j)h_j(p)] - \exp[(b_j - N\psi_j)h_j(p)]} \times$$

$$\times [H_N(t_j - 1; p) - H_N(s_j; p)]$$

pentru a obține o margine superioară mai mică pentru $M(n; p)$ cînd $-\psi_1/\Delta_1 < p < -\psi_2/\Delta_2$. În final testul optim bazat pe o selecție de volum fix poate fi calculat din (24) unde $H_n(T; p)$ este definită mai înainte. Dacă n este suficient de mare, atunci T_n este aproximativ $N(np, \sqrt{np(1-p)})$ și se poate obține $n = n(\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2)$ din

$$\Phi\left(\frac{p_2 - p_1}{\sqrt{p_1(1-p_1)}}\sqrt{n} + u_{\gamma_2}\sqrt{\frac{p_2(1-p_2)}{p_1(1-p_1)}}\right) +$$

$$+ \Phi\left(\frac{p_1 - p_0}{\sqrt{p_1(1-p_1)}} - u_{1-\gamma_0}\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{p_1(1-p_1)}}\right) = 2 - \gamma_1.$$

2.3. Problema celor k ipoteze

Presupunem că toate ipotezele din (20) sînt simple, $\omega_j \equiv (\theta_j)$ și că $k > 3$. Dacă familia este de forma (XXII. 39), se poate obține, fără dificultate, un test optim bazat pe o selecție de volum fix care satisface (21). Pe de altă parte, dacă $\{x_i\}$ sînt independente și identic repartizate în forma Darmois — Koopman, orice extensie, prin operarea a $k - 1$ T.S.R.P., a procedeului Sobel-Wald nu pare să posede proprietăți simple. *Armitage (1950)* și, pentru anumite probleme speciale, *Paulson (1962, 1963)* și *Simons (1967 c)*, dezvoltă procedee secvențiale pentru rezolvarea problemei discriminării între k ipoteze. În cele ce urmează vom descrie procedeul lui *Armitage (1950)* care este destul de general deoarece nu se face nici o presupunere privind forma repartiției sau independența variabilelor $\{x_i\}$.

2.3.1. Procedeul lui Armitage

Fie $I_{jl}(n)$ inegalitățile

$$-a_{jl} < Z_n(j, l) = \ln\frac{f_n(\mathbf{x}; \theta_l)}{f_n(\mathbf{x}; \theta_j)} < a_{lj}$$

pentru $j \neq l = 0, 1, \ldots, k-1$ și $n \geqslant 1$, unde $\{a_{jl}\}$ sînt $k(k-1)$ constante pozitive. Pentru fiecare $n \geqslant 1$,

$$I_{jl}(n) \equiv I_{lj}(n).$$

I_{jl} este de asemenea inegalitatea critică a T.S.R.P. $S(-a_{jl}, a_{lj})$ pentru verificarea ipotezei

$$H_j : \theta = \theta_j \text{ față de } H_l : \theta = \theta_l.$$

Scanned with OKEN Scanner

Procedeul lui Armitage $S_k(\{a_{jl}\})$, $k \geqslant 2$ este definit după cum urmează:
Se observă succesiv $\{x_i\}$ și la pasul $n \geqslant 1$:

i) se acceptă H_j, pentru orice $j \neq l$, dacă toate cele $k-1$ inegalități inferioare din $I_{j0}, \ldots, I_{jj-1}, I_{jj+1}, \ldots, I_{jk-1}$ nu sînt satisfăcute.

(37) ii) se acceptă H_l dacă toate cele $k-1$ inegalități superioare din $I_{0l}, \ldots, I_{l-1l}, I_{l+1l}, \ldots, I_{k-1l}$ nu sînt satisfăcute

iii) în rest se continuă observînd x_{n+1}.

Observație. $S_2(\{a_{jl}\})$ este identic cu T.S.R.P. $S(-a_{01}, a_{10})$ pentru H_0 față de H_1, însă $S_3(\{a_{jl}\})$ nu este în general același cu procedeul Sobel-Wald.

Regulile din (37) sînt echivalente cu a spune că $\frac{1}{2}k(k-1)$ T.S.R.P. $\{S(-a_{jl}, a_{lj})\}$ $j < l = 1, \ldots, k-1$ sînt aplicate simultan și H_j este acceptată la pasul n dacă și numai dacă $k-1$ T.S.R.P. acceptă H_j la pasul n.

Acum, dacă $S_k(\{a_{jl}\})$ nu dă o decizie terminală la pasul $n \leqslant N$, cel puțin una dintre cele $\frac{1}{2}k(k-1)$ inegalități $\{I_{jl}(n)\}$ $j < l = 1, \ldots, k-1$ trebuie să aibe loc pentru fiecare $1 \leqslant n \leqslant N$. În consecință

$$P(n > N \mid \theta) \leqslant P \text{ (cel puțin una dintre } I_{01}(N), \ldots, I_{k-2k-1}(N) \text{ au loc} \mid \theta) \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{j<l} P(-a_{jl} < Z_N(j, l) < a_{lj} \mid \theta).$$

Deci $S_k(\{a_{jl}\})$ se va termina cu siguranță dacă T.S.R.P. sînt închise. În particular, dacă $\{x_i\}$ sînt independente și identic repartizate, atunci după teorema XXII. 6, $S_k(\{a_{jl}\})$ este închis. În continuare folosind raționamentul din teorema XXII.2, considerînd toate valorile $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$, $n \geqslant 1$ care conduc la acceptarea ipotezei H_j, obținem

$$Q_j(\theta_l) \leqslant Q_j(\theta_j)\, e^{-a_{jl}} \leqslant e^{-a_{jl}}, \text{ pentru orice } j \neq l,$$

indiferent dacă $S_k(\{a_{jl}\})$ este închis sau deschis, Mai departe, dacă $S_k(\{a_{jl}\})$ este închis, atunci

$$Q_0(\theta) + \ldots + Q_{k-1}(\theta) = 1 \text{ pentru orice } \theta$$

și prin urmare

$$Q_j(\theta_j) \geqslant 1 - \sum_{l \neq j} e^{-a_{lj}} \text{ pentru } j = 0,1, \ldots, k-1. \tag{38}$$

Inegalitățile din (38) permit să se aleagă constantele procedeului $S_k(\{a_{jl}\})$ astfel încît, pentru toți j, cererile $Q_j(\theta_j) \geqslant 1 - \gamma_j$ sînt garantate pentru $\{\gamma_j\}$ specificate. De exemplu, dacă $\gamma_j = \gamma > 0$ pentru toți j, atunci alegerea particulară $a_{jl} = ln\,[(k-1)/\gamma]$ pentru toți $j \neq l$ va asigura că $Q_j(\theta_l) \leqslant \gamma/(k-1)$ pentru fiecare $j \neq l$.

Din nefericire (38) nu poate fi aproape de egalitate în care caz o astfel de alegere a $\{a_{jl}\}$ va implica o V.M.V.S. mare. Pentru $k > 3$ nu cunoaștem funcția V.M.V.S. a procedeului $S_k(\{a_{jl}\})$. *Simons (1967 b)* cercetează cazul particular $k = 3$ și $\{x_i\}$ independente și repartizate identic $N(\mu, \sigma^2)$ cu σ^2 cunoscută. Rezultatele sale indică că, pentru $k > 3$ și $\{x_i\}$ nu repartizate normal, $S_k(\{a_{jl}\})$ poate să posede unele proprietăți optime.

Scanned with OKEN Scanner

2.3.2. Procedeul lui Paulson privind media necunoscută a populației normale

Presupunem că populația este $N(\theta, \sigma^2)$, θ necunoscută și σ^2 dată. Fie $\{I_j\}$ $j = 1, 2, \ldots, k$, k intervale care nu se acoperă a căror reuniune $\bigcup_{j=1}^{k} I_j$ este dreapta reală. Prezintă interes practic să se decidă, pe baza variabilelor $\{x_i\}$ independente și identic repartizate, la care dintre cele k intervale aparține media necunoscută θ. Soluția secvențială a acestei probleme a fost dată de *Sobel, Wald* (1949) pentru cazul special $k = 3$ și σ cunoscută. Paulson (1963).

Cazul I (σ cunoscută). Fie $\lambda_1 < \lambda_2 < \ldots < \lambda_{k-1}$ și fie

$$I_1 = (-\infty, \lambda_1], \quad I_s = (\lambda_{s-1}, \lambda_s], \quad 2 \leqslant s \leqslant k-1, \quad I_k = (\lambda_{k-1}, \infty).$$

Fie δ_j $(j = 1, \ldots, k)$ decizia că θ este un element al intervalului I_j. Se poate presupune (Sobel, Wald (1949)) pe baza considerațiilor practice că se poate specifica o zonă de indiferență (β_{1j}, β_{2j}) în jurul fiecărui punct λ_j, în care este un lucru de indiferență dacă se ia decizia δ_j sau δ_{j+1}. De asemenea, fie $r(\delta_j; \theta)$ o funcție care ia valorile 0 sau 1 care reprezintă erorile făcute în alegerea lui δ_j când θ este valoarea adevărată a parametrului. De asemenea, presupunem că $r(\delta_j; \theta)$ satisface

$$r(\delta_1; 0) = \begin{cases} 0, & -\infty < \theta < \beta_{2j} \\ 1, & \text{în rest} \end{cases}$$

Pentru $s = 2, 3 \ldots, k-1$

$$r(\delta_s; \theta) = \begin{cases} 0, & \beta_{1,s-1} < \theta < \beta_{2,s} \\ 1, & \text{în rest} \end{cases}$$

și

$$r(\delta_k; 0) = \begin{cases} 0, & \beta_{1,k-1} < \theta < \infty \\ 1, & \text{în rest} \end{cases}$$

În cele ce urmează găsim un procedeu secvențial pentru a alege una dintre cele k decizii $\delta_1, \ldots, \delta_k$ astfel ca probabilitatea de a face o eroare nu depășește o valoare α prestabilită pentru toate valorile lui θ.

În cele ce urmează folosim lema

LEMA 2. *Fie* $Y_1, Y_2, \ldots$ *o selecție asupra unei variabile* Y *cu* $M(Y) < 0$. *Atunci, dacă* $A > 0$ *și* $j = 1, 2, \ldots$

$$(39) \qquad P\left(\sum_{i=1}^{j} Y_i > 0 \text{ pentru cel puțin o valoare } j\right) \leqslant \exp(-t_0 A)$$

unde $t_0 \neq 0$ *satisface relația* $M[\exp(t_0 Y)] = 1$.

Aplicînd lema 2 la $Y_i = (X_i - \theta - d)/\sigma^2$ unde $d > 0$ (deoarece $t_0 = 2d$) găsim

$$(40) \qquad P\left(\sum_{i=1}^{j} [(X_i - \theta - d)/\sigma^2] > A \text{ pentru cel puțin o valoare a lui } j\right) \leqslant e^{-2dA},$$

Scanned with OKEN Scanner

care este echivalentă cu

(41) $P(\bar{X}_j - d - A\sigma^2/j > 0$ pentru cel puţin o valoare a lui $j) \leqslant e^{-2dA}$.

Aplicînd din nou (39) cu $Y_i = (-X_i + 0 - d)/\sigma^2$, găsim

(42) $P(\bar{X}_j + d + a\sigma^2/j < 0$ pentru cel puţin o valoare a lui $j) \leqslant e^{-2dA}$.

Luînd $e^{-2dA} = \alpha/2$ şi aplicînd inegalitatea

$$P(E_1 \cap E_2) \geqslant 1 - P(CE_1) - P(CE_2)$$

relaţiilor (41) şi (42) găsim că

(43) $P(\bar{X}_j - d - \sigma^2 \ln(2/\alpha)\, 2jd \leqslant 0 \leqslant \bar{X}_j + d + \sigma^2 \ln(2/\alpha)\, 2jd,$

pentru fiecare j, $j = 1, 2, \ldots) \geqslant 1 - \alpha$.

Pentru a aplica (43) este preferabil să alegem d ca să minimizeze valoarea lui j cu condiţia

$$2[d + \sigma^2 \ln(2/\alpha)\, 2jd] = \Delta.$$

Dacă scriem această condiţie ca

$$2jd(\Delta/2 - d) = \sigma^2 \ln(2/\alpha)$$

şi luăm derivata în raport cu d pe care o egalăm cu zero, găsim soluţia $d = \Delta/4$.

Fie $\Delta_j = \beta_{2j} - \beta_{1j}$ lungimea zonei de indiferenţă

$$\Delta = \min(\Delta_1, \ldots, \Delta_{k-1})$$

$$u_r = \max_{1 \leqslant i \leqslant r} [\bar{X}_i - \Delta/4 - 2\sigma^2 \ln(2/\alpha)/i\Delta],$$

$$v_r = \min_{1 \leqslant i \leqslant r} [\bar{X}_i + \Delta/4 + 2\sigma^2 \ln(2/\alpha)/i\Delta].$$

Acum descriem procedeul secvenţial după cum urmează.

La pasul r ($r = 1, 2, \ldots$) al experimentului obţinem X_r şi atunci, pe baza valorilor observate ale variabilelor $X_1, X_2, \ldots, X_r$, calculăm u_r şi v_r. Experimentul este terminat la pasul r dacă $u_r > v_r$ sau dacă $u_r \leqslant v_r$ şi intervalul (u_r, v_r) cade în întregime într-unul dintre intervale

$$I'_1 = (-\infty, \beta_{21}), \quad I'_2 = (\beta_{11}, \beta_{22}), \quad I'_3 = (\beta_{12}, \beta_{23}), \ldots$$

$$I'_{k-1} = (\beta_{1,k-2}, \beta_{2,k-1}), \quad I'_k = (\beta_{1,k-1}, \infty).$$

Dacă experimentul se termină la pasul r cu $u_r > v_r$ (probabilitatea acestui eveniment este mică), luăm decizia ce corespunde la intervalul $\{I_j\}$ la care aparţine $\bar{X}_r$.

Scanned with OKEN Scanner

Dacă experimentul se termină la pasul r cu $u_r \leqslant v_r$, luăm decizia ce corespunde la intervalul $\{I'_j\}$ în care variază (u_r, v_r) astfel că dacă (u_r, v_r) cade în I'_i (de exemplu), alegem δ_i, în timp ce dacă (u_r, v_r) cade în două intervale I'_i și I'_{i+1} (de exemplu) putem alege între δ_i și δ_{i+1} aruncînd un zar. Dacă la pasul r nu este luată nici o decizie, trecem la pasul $(r+1)$ observînd X_{r+1} și repetînd procedeul de mai înainte.

Fie N variabila de stopare pentru procedeul secvențial. Experimentul trebuie să se termine la pasul j sau înainte de pasul j dacă

$$2[\Delta/4 + 2\sigma^2 \ln (2/\alpha)/j\Delta] < \Delta,$$

astfel că trebuie să avem:

$$N < 1 + 8\sigma^2 \ln (2/\alpha)/\Delta^2.$$

În consecință procedeul secvențial este închis. Din definiția lui $r(\delta_j;\ \theta)$ și din specificarea procedeului secvențial, urmează că atunci cînd θ este conținut real în (u_N, v_N) nu poate fi comisă nici o eroare. Deoarece din (43) umează că

$$P(u_N \leqslant \theta \leqslant v_N) \geqslant 1 - \alpha,$$

putem trage concluzia ca probabilitatea procedeului secvențial va conduce la o eroare care, pentru toți θ, nu depășește α.

Paulson (*1963*) arată că pentru $k = 3$ procedeul său poate fi mai puțin eficient decît procedeul Sobel-Wald. Totuși, există o compensație și anume cînd procedeul secvențial se termină, odată cu luarea deciziei privind intervalul în care variază θ, putem presupune deasemenea că

$$u_n \leqslant \theta \leqslant v_n \text{ cu probabilitatea } \geqslant 1 - \alpha.$$

Această remarcă sugerează de asemenea o modificare a problemei originale care poate fi de interes prin ea însăși și care poate fi formulată după cum urmează:

Dorim un procedeu secvențial care simultan să aleagă una dintre deciziile $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_k$ cu probabilitatea unei erori $\leqslant \alpha$, și de asemenea să obținem un interval de încredere pentru θ de lungime $\leqslant l$ (l o constantă care este $> \Delta$) cu coeficientul de încredere $\geqslant 1 - \alpha$.

Pentru a rezolva această problemă, folosim procedeul secvențial descris mai înainte cu modificare că continuăm experimentul pînă cînd nu numai (u_r, v_r) cade într-unul din intervalele $\{I'_j\}$ însă în plus $v_r - u_r \leqslant l$ (complicația datorită faptului că este posibil să avem $u_r > v_r$ poate fi înlăturată luînd ca limite de încredere pentru θ, $\bar{X}_r \pm l/2$, cînd acest eveniment se realizează). Cu această modificare probabilitatea de a lua o decizie incorectă va fi $\leqslant \alpha$ și probabilitatea ca $u_n \leqslant \theta \leqslant v_n$ și ca $0 \leqslant v_n - u_n \leqslant l$ este $\geqslant 1 - \alpha$.

Cazul 2 (σ^2 este necunoscută). Pornim experimentul prin luarea unei selecții preliminarii de n_0 măsurători $X_1, \ldots, X_{n_0}$. Fie $m = n_0 - 1$ și $s^2 = \sum_1^{n_0} (X_i - \bar{X}_{n_0})/m$. De asemenea, fie $\{Z_i\}$ un șir de variabile aleatoare independente și repartizate identic $N(-d^2/\sigma^2,\ 1/\sigma^2)$ și independent de

şirul $\{X_i\}$. Deoarece $\bar{X}_{n_0}$ este independentă de s^2 (teorema III.5), obţinem

$$P\Big[\sum_{i=1}^{r}\{(X_i-\theta-d)/s^2\}>a \text{ pentru cel puţin un } r,$$

$$r=n_0,\ n_0+1,\ \ldots\,|s^2\Big]=$$

$$=P\Big[\sum_{i=1}^{r}Z_i\geqslant a(s^2/\sigma^2) \text{ pentru cel puţin un } r,\ r=n_0,n_0+1,\ldots|s^2\Big]<$$

$$<P\Big[\sum_{i=1}^{r}Z_i\geqslant a(s^2/\sigma^2) \text{ pentru cel puţin un } r,\ r=1,2,\ldots|s^2\Big]\leqslant$$

$$\leqslant \exp(-2ads^2/\sigma^2). \tag{44}$$

În consecinţă

$$P\Big(\sum_{i=1}^{r}[(X_i-\theta-d)/s^2]>a \text{ pentru cel puţin un } r,\ r=n_0,n_0+1,\ldots\Big)<$$

$$<M[\exp(-2ads^2/\sigma^2)]=(1+4ad/m)^{-m/2}.$$

Dacă luăm $d=\Delta/4$ şi $\bar{a}=(m/\Delta)[(2/\alpha)^{2/m}-1]$ reprezintă valoarea lui a pentru care

$$[1+4ad/m]^{-m/2}=\alpha/2,$$

din (45) obţinem:

$$P(\bar{X}_r-\Delta/4-\bar{a}s^2/r>\theta \text{ pentru cel puţin un } r,$$

$$r=n_0,\ n_0+1,\ldots)\leqslant\alpha/2. \tag{46}$$

Similar, pornind cu $(-X_i+\theta-d)/s^2$ găsim că

$$P(\bar{X}_r-\Delta/4+\bar{a}s^2/r<\theta \text{ pentru cel puţin un } r,$$

$$r=n_0,\ n_0+1,\ldots)\leqslant\alpha/2 \tag{47}$$

Din (46) şi (47) obţinem

$$P(\bar{X}_r-\Delta/4-\bar{a}s^2/r\leqslant\theta\leqslant\bar{X}_r+\Delta/4+\bar{a}s^2/r, \tag{48}$$

pentru toate valorile lui r, $r=n_0,\ n_0+1,\ldots)>1-\alpha$.

Fie

$$u'_r=\max_{n_0<j<r}(\bar{X}_j-\Delta/4-\bar{a}s^2/j)$$

şi

$$v'_r=\min_{n_0<j<r}(\bar{X}_j+\Delta/4+\bar{a}s^2/j).$$

Acum putem specifica procedeul secvenţial cînd σ^2 este necunoscută. Pornim cu luarea a n_0 observaţii, calculăm s^2 şi pentru $r = n_0, n_0 + 1, \ldots$ folosim procedeul descris anterior cu u_r şi v_r înlocuiţi cu u'_r respectiv v'_r. Din (48) urmează că probabilitatea de a face o eroare este $< \alpha$ pentru toţi θ. Valoarea practică a procesului descris în cazul 2 este limitată datorită lipsei unei reguli eficiente pentru alegerea lui n_0. Aceasta pare o problemă ce nu se poate rezolva.

Compararea mediilor a k categorii. Fie Π_0 o categorie standard (sau de control), $\Pi_1, \Pi_2, \ldots, \Pi_k$ k categorii experimentale şi X_{jr} observaţia r din Π_j. Presupunem că pentru fiecare r, $X_{jr} \sim N(\theta_j, \sigma_j^2)$ şi că pentru toţi r şi j ($j = 0,1, \ldots k$ şi $r = 1, 2, \ldots$) toate observaţiile sînt independente. De asemenea, Π_ν este superioară la Π_0 dacă $\theta_\nu > \theta_0$ ($\nu = 1, 2, \ldots, k$). Mai întîi considerăm problema găsirii unui procedeu secvenţial închis pentru a clasifica fiecare dintre cele k categorii experimentale ca superioară sau inferioară care va satisface cererea ca probabilitatea ca toate categoriile experimentale cu mediile $\leqslant \theta_0$ sau $\geqslant \theta_0 + \Delta$ să fie clasificate corect este cel puţin $1 - \alpha$. Mai întîi fie

$$Z_{jr} = X_{jr} - X_{or},$$

$$\bar{Z}_{jn} = \sum_{r=1}^{n} Z_{jr}/n,$$

$$\tilde{\sigma}_j^2 = \sigma_j^2 + \sigma_0^2,$$

$$u_j(d, n, \bar{Z}_{jn}, \alpha) = \bar{Z}_{jn} + d + [\tilde{\sigma}_j^2 \ln (1/\alpha)]/2dn,$$

$$v_j(d, n, \bar{Z}_{jn}, \alpha) = \bar{Z}_{jn} - d - [\tilde{\sigma}_j^2 \ln (1/\alpha)]/2dn.$$

Cînd dispersiile sînt cunoscute procedeul secvenţial închis dorit poate fi obţinut după cum urmează:

La primul pas al experimentului se porneşte cu o observaţie din toate cele $k + 1$ categorii.

La pasul $r (r = 2, 3, \ldots)$ se ia o observaţie din categoria standard şi o observaţie din fiecare categorie experimentală care nu a fost clasificată.

Clasificăm categoria Π_j ca inferioară atîta timp cît

$$u_j(d, n, \bar{Z}_{jn}, \alpha/k) < \Delta$$

şi clasificăm Π_j ca superioară atîta timp cît $v_j(d, n, \bar{Z}_{jn}, \alpha/k) > 0$. Experimentul este terminat cînd toate categoriile sînt clasificate.

Paulson (1964 b) pentru a minimiza numărul de observaţii cerut pentru clasificarea tuturor categoriilor recomandă să se folosească $d = 3\Delta/8$.

În continuare considerăm o decizie mixtă şi o problemă de estimare. În plus la clasificarea tuturor celor k categorii experimentale supusă la cererea ca toate categoriile Π_j cu θ_j, fie $\leqslant \theta_0$ sau $> \theta_0 + \Delta$ sînt clasificate corect ca probabilitatea $\geqslant 1 - \alpha$, dorim de asemenea să avem intervale de încredere simultane pentru $\{\theta_j - \theta_0\}$ ($j = 1, 2, \ldots, k$) cînd

Scanned with OKEN Scanner

experimentul este terminat cu coeficientul de încredere comun $1 - \gamma$ astfel ca lungimea intervalului de încredere pentru fiecare categorie clasificată ca superioară nu va depăşi $L (L > \Delta)$. Aceasta poate fi abordată după cum urmează :

Se opreşte luarea observaţiilor din orice categorie cînd este clasificată ca inferioară, însă continuă luînd observaţii din orice categorie Π_j după ce ea a fost clasificată ca superioară pînă cînd

$$u_{jn}(d, \gamma/2k) - v_{jn}(d, \gamma/2k) \leqslant L.$$

Dacă n_j este numărul de observaţii luate cu categoria Π_j cînd experimentul este terminat, pentru fiecare j, $j = 1, 2, \ldots, k$

$$P[v_{j,n_j}(d, \gamma/2k) \leqslant \theta_j - \theta_0 \leqslant u_{j,n_j}(d, \gamma/2k)] \geqslant 1 - \gamma,$$

şi pentru fiecare categorie clasificată ca superioară lungimea intervalului nu poate depăşi L.

Cînd $k + 1$ categorii au o dispersie comună necunoscută, se porneşte luînd n_0 măsurători din fiecare din cele $k + 1$ categorii. Fie

$$s^2 = \sum_{j=0}^{k} \sum_{r=1}^{n_0} (X_{jr} - \bar{X}_{j,n_0})^2/(k + 1)(n_0 - 1),$$

$\nu = (k + 1)(n_0 - 1)$ şi se iau observaţii, se foloseşte procedeul descris cu $\tilde{\sigma}_j^2$ înlocuit prin $2\sigma^2$, $\ln (1/\alpha)$ prin $a(\alpha) = [(1/\alpha)^{2/\nu} - 1](\nu/2)$, şi $u_{jn}(d, \alpha)$ şi $v_{jn}(d, \alpha)$ definite ca minimum şi maximum pe $n_0 \leqslant r \leqslant n$ în loc de $1 \leqslant r \leqslant n$. Cu toate că nu este posibilă o alegere optimă a lui n_0, *Paulson* (*1964 b*) recomandă să se aleagă n_0 astfel încît

$$a(\alpha) \leqslant 1,1 \ln (1/\alpha).$$

Scanned with OKEN Scanner

Capitolul XXIV

TESTE SECVENȚIALE PENTRU IPOTEZE COMPUSE

§1. Metoda funcțiilor de pondere a lui Wald (1947)

Fie $f(x, \theta)$ densitatea de repartiție a variabilului X, θ necunoscut putînd fi și un vector. Ne propunem să verificăm ipoteza $H_0 : \theta \in \omega_0$ față de ipoteza alternativă compusă $H_1 : \theta \in \omega_1$.

Fie S_1 frontiera mulțimii ω_1. Wald (1947), pentru a construi un T.S.R.P. optim propune metoda funcțiilor de pondere. Presupunem că este posibil să construim două funcții de pondere $g_0(\theta)$ și $g_1(\theta)$ de θ astfel ca

$$\int_{\omega_0} g_0(\theta)\, d\theta = 1, \quad \int_{S_1} g_1(\theta)\, dS_1 = 1. \tag{1}$$

Atunci T.S.R.P. este bazat pe raportul

$$\frac{f_{1,n}}{f_{0,n}} = \int_{S_1} g_1(\theta) \prod_{i=1}^{n} f(x_i ; \theta)\, dS_1 \Big/ \int_{\omega_0} g_0(\theta) \prod_{i=1}^{n} f(x_i ; \theta)\, d\theta \tag{2}$$

și satisface condițiile

i) probabilitatea erorii de ordinul I, $\alpha(\theta)$ este constantă pe ω_0;

ii) probabilitatea erorii de ordinul II, $\beta(\theta)$ este constantă pe S_1; și

iii) pentru orice punct θ din interiorul mulțimii ω_1 valoarea $\beta(\theta)$ nu depășește valoarea sa constantă pe S_1.

Wald (1947) demonstrează că funcțiile de pondere $g_i(\theta)$ $(i = 0,1)$ sînt optime în sensul că pentru orice alte funcții de pondere $h_0(\theta)$ și $h_1(\theta)$, probabilitățile erorilor $\alpha^*(\theta)$, $\beta^*(\theta)$ asociate ce satisfac (cu o bună aproximație)

$$\int_{\omega_0} \alpha^*(\theta) h_0(\theta)\, d\theta = (1 - B)/(A - B),$$

$$\int_{\omega_1} \beta^*(\theta) h_1(\theta)\, d\theta = B(A - 1)/(A - B) \tag{3}$$

sînt astfel încît

$$\max_{\theta \in \omega_0} \alpha^*(\theta) \geqslant (1 - B)/(A - B) = \max_{\theta \in \omega_0} \alpha(\theta), \tag{4}$$

Scanned with OKEN Scanner

şi

$$\max_{\theta\in\omega_1} \beta^*(\theta) \geqslant B(A-1)/(A-B) = \max_{\theta\in\omega_1} \beta(\theta). \tag{5}$$

Exemple. 1) *Testul secvenţial binomial.* Presupune că:

$$X : \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \theta & 1-\theta \end{pmatrix}.$$

Dorim să verificăm ipoteza

$$H_0 : \theta = \frac{1}{2} \text{ faţă de alternativa bilaterală } H_1 : \left|\theta - \frac{1}{2}\right| \geqslant \delta > 0.$$

Astfel, fie

$$g_0\left(\frac{1}{2}\right) = 1 \text{ şi } g_0(\theta) \text{ pentru } \theta \neq \frac{1}{2}$$

şi

$$g_1(\theta_1) = g_1(1-\theta_1) = \frac{1}{2} \text{ şi } g_1(\theta) = 0 \text{ în rest, unde } \theta_1 = \frac{1}{2} + \delta.$$

Atunci, dacă m reprezintă numărul observaţiilor pozitive în selecţia totală de volum n, regiunea de continuare a T.S.R.P. este dată de

$$B < 2^{n-1}\{\theta_1^m(1-\theta_1)^{n-m} + \theta_1^{n-m}(1-\theta_1)^m\} < A. \tag{6}$$

2) *Testul χ^2 secvenţial.* Fie X_i variabile aleatoare independente identic repartizate $N(\theta, \sigma^2)$, θ necunoscută. Dorim să verificăm ipoteza

$$H_0 : \sigma = \sigma_0 \text{ faţă de } H_1 : \sigma = \sigma_1 > \sigma_0.$$

Aici alegem $g(\theta) = 1/2c$, $-c \leqslant \theta \leqslant c$ şi zero în rest. Limita raportului de verosimilităţi modificat sub H_1 şi H_0 tinde la

$$\left(\frac{\sigma_0}{\sigma_1}\right)^{n-1} \exp\{(n-1)\, s^2 (\sigma_0^{-2} - \sigma_1^{-2})/2\}. \tag{7}$$

Raportul (7) indică că problema verificării ipotezei H_0 faţă de H_1 cu θ ca parametru nedorit este echivalentă cu problema verificării ipotezei simple asupra lui σ faţă de ipoteza alternativă simplă cu media zero (deci cunoscută) dintr-o selecţie de volum $n-1$. Aceasta poate fi stabilită cu ajutorul transformării lui Helmert:

$$Y_1 = (X_1 + \ldots + X_n)/\sqrt{n}$$

$$Y_j = [X_1 + \ldots + X_{j-1} - (j-1)X_j]/[j(j-1)]^{1/2}, \; j = 2, \ldots, n \tag{8}$$

Scanned with OKEN Scanner

Deci $s^2 = \sum_2^n Y_j^2/(n-1)$. Astfel proprietăţile T.S.R.P. bazat pe raportul (7) pot fi stabilite din proprietăţile T.S.R.P. al lui Wald.

§ 2. Testul secvenţial t.

Fie $X \sim N(\theta, \sigma^2)$, σ^2 necunoscută. Dorim să verificăm ipoteza

$$H_0 : \theta = \theta_0 \text{ faţă de } H_1 : |\theta - \theta_0| \geqslant \delta\sigma, \text{ unde } \delta > 0.$$

Atunci marginea S_1 constă din toate punctele (θ, σ) pentru care $|\theta - \theta_0| = \delta\sigma$. Adică S_1 constă din două puncte. Fie:

$$g_0(\theta, \sigma) = \begin{cases} 1/c, & 0 \leqslant \sigma \leqslant c, \ \theta = \theta_0 \\ 0, & \text{în rest} \end{cases}$$

$$g_1(\theta, \sigma) = \begin{cases} 1/2c, & 0 \leqslant \sigma \leqslant c, \ \theta = \theta_0 \pm \delta\sigma \\ 0, & \text{în rest.} \end{cases}$$

Atunci Wald (1947) a arătat că $f_{1,n}/f_{0,n}$ este o funcţie strict crescătoare de $|\bar{X} - \theta_0|/s_n$. Wald (1947) a arătat că $\alpha(\theta, \sigma)$ este constantă pe ω_0 şi $\beta(\theta, \sigma)$ este o funcţie de $|\theta - \theta_0|/\sigma$ şi Wald (1947) afirmă că $\beta(0, \sigma)$ este monoton descrescătoare în $|\theta - \theta_0|/\sigma$. Totuşi, Wald nu demonstrează satisfăcător această afirmaţie.

Astfel procedeul secvenţial poate fi bazat pe t_n unde $t_n = \sqrt{n}(\bar{X}_n - \theta_0)/s_n$. Cu alte cuvinte, testul secvenţial t pentru

$$H_0 : \theta = \theta_0 \text{ faţă de } H_1 : \theta - \theta_0 \geqslant \delta\sigma \ [\,|\theta - \theta_0| \geqslant \delta\sigma]$$

poate fi descris după cum urmează:

Dacă experimentul a mers pînă la pasul n, regiunea de continuare este dată de

$$B_n < t_n < A_n \quad (B_n < |t_n| < A_n), \quad n = 2, 3, \ldots \tag{9}$$

unde constantele B_n şi A_n sînt alese astfel încît procedeul se termină după un număr finit de paşi. Totuşi cînd constantele A_n şi B_n sînt obţinute prin egalarea raportului repartiţiilor t necentrată şi centrată cu constantele A şi B date, David şi Kruskal (1956) au arătat că acest test secvenţial se termină cu probabilitatea unu.

Rushton (1950) a considerat aproximaţii asimptotice pentru logaritmul raportului de verosimilităţi ce apare în testul secvenţial t. Fie

$$u_n = \sum_1^n (X_i - \theta_0) \Big/ \left[\sum_1^n (X_i - \theta_0)^2\right]^{1/2} =$$

$$= \sqrt{n}\, t(n - 1 - t^2)^{1/2}. \tag{10}$$

Scanned with OKEN Scanner

Dacă regiunea de continuare pentru testul secvențial t este de forma

$$\ln [\beta/(1-\alpha)] < S_n < \ln [(1-\beta)/\alpha] \tag{11}$$

atunci, pentru valori mari ale lui n, Rushton (1950) a obținut

$$S_n \simeq \frac{1}{4}\delta^2 u_n^2 + \sqrt{n}\,\delta u_n\,[1 - 1/(4n) + \delta^2 u_n^2/(24n)]. \tag{12}$$

Din studii numerice, Rushton (1950) ajunge la concluzia că se poate folosi aproximația (12) cu încredere.

Testul secvențial t are următoarele proprietăți:

Proprietatea I. Testul secvențial t unilateral se termină după un număr finit de pași cu probabilitatea unu.

Fie $\beta_T(\theta, \sigma)$ probabilitatea erorii de ordinul unu cînd valorile adevărate ale parametrilor sînt θ și σ. Dacă $\beta_T(\theta, \sigma)$ depinde numai de o singură funcție $\psi(\theta, \sigma)$ de parametrii, atunci îl vom scrie ca $\beta_T(\psi)$. De asemenea vom folosi notația $\alpha_T(\theta, \sigma)$.

Proprietatea II. Pentru orice test t, T pentru H_0 față de ipoteza alternativă H_1 unilaterală, $\beta_T(\delta)$ este o funcție descrescătoare de $\delta = (\theta - \theta_0)/\sigma > 0$.

Demonstrație. Deoarece repartiția comună a statisticilor $t_1, t_2, \ldots$ ... depinde numai de δ, fără a pierde din generalitate, putem presupune că X_i au media comună δ și dispersia 1. Consider pentru δ două valori δ' și δ'' unde $\delta'' = \delta' + \eta$, $\eta > 0$. Fie $Y_i = X_i + \eta$, $i = 1, 2, \ldots$ și statisticile $t_2', t_3', \ldots$ cu aceleași funcții de Y_i ca și $t_2, t_3, \ldots$ de X. Atunci

$$t_n' = t_n + \eta\sqrt{n}/s_n > t_n \text{ pentru toți } n \geqslant 2. \tag{13}$$

Fie W_n regiunea din spațiul n-dimensional astfel ca $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ variază în W_n dacă H_0 este acceptată la pasul n cînd se folosește T. Fie W_n' regiunea analoagă cînd $t_2', t_3', \ldots t_n'$ sînt folosite în locul statisticilor $t_2, t_3, \ldots, t_n$. Afirmăm că $W_n \supset W_n'$. Pentru a stabili această afirmație, presupunem că mulțimea $\{t_2', t_3', \ldots, t_m'\}$ conduce la acceptarea ipotezei H_0 la pasul m. Deoarece nici una dintre statisticile $t_2', \ldots, t_m'$ nu intersectează marginile superioare, aceiași afirmație este valabilă și pentru $t_2, \ldots, t_m$. Avem $t_m \leqslant t_m' \leqslant B_m$. Deci mulțimea $(t_1, \ldots, t_m)$ conduce la acceptarea ipotezei H_0 în m pași. Astfel

$$(X_1, \ldots, X_n) \in W_n' \text{ implică } (X_1, \ldots, X_n) \in W_n.$$

În consecință

$$P_{\delta'}[(X_1, \ldots, X_n) \in W_n] > P_{\delta'}[(X_1, \ldots, X_n) \in W_n'] =$$

$$= P_{\delta'}[(Y_1, \ldots, Y_n) \in W_n] = P_{\delta''}[(X_1, \ldots, X_n) \in W_n], \tag{14}$$

ultima parte din egalitatea (14) rezultînd din faptul că Y-cii au aceiași repartiție (cînd $\delta = \delta'$) pe care o au X-șii (cînd $\delta = \delta''$). Proprietatea II este demonstrată.

Scanned with OKEN Scanner

Fie $C_{\alpha,\beta}$ clasa testelor cu media erorii de ordinul I egală cu α şi cu media erorii de ordinul II egală cu β, media fiind luată în raport cu două funcţii de pondere (densităţi apriorice) definite pe regiunile $\theta = \theta_0$ şi respectiv $\theta - \theta_0 \geqslant \delta\sigma$. Fie $C'_{\alpha,\beta}$ clasa testelor rapoartelor de probabilităţi ponderate ce aparţin clasei $C_{\alpha,\beta}$. Fie $C_{A,B}$ clasa testelor rapoartelor de probabilităţi ponderată cu marginile A şi B. Astfel avem următoarea teoremă privind proprietatea de optim a testului secvenţial t.

TEOREMA 1. (J. K. Ghosh (1960 a)). *Fie T orice test secvenţial T pentru verificarea ipotezei*

$$H_0 : \theta = \theta_0 \text{ faţă de } H_1 : (\theta - \theta_0) \geqslant \delta\sigma > 0$$

cu probabilităţile erorilor $\alpha_T(\theta_0) = \alpha$ şi respectiv β în raport cu $\theta - \theta_0 = \delta\sigma$. Atunci T se bucură de proprietatea că pentru $T' \in C_{\alpha,\beta}$

$$15) \qquad \sup_{\theta=\theta_0} \alpha_T(\theta, \sigma) \leqslant \sup_{\theta=\theta_0} \alpha_{T'}(\theta, \sigma)$$

$$(16) \qquad \sup_{(\theta-\theta_0)/\sigma \geqslant \delta} \beta_T(\theta, \sigma) < \sup_{(\theta-\theta_0)/\sigma \geqslant \delta} \beta_{T'}(\theta, \sigma).$$

Demonstraţie. $\alpha_T(\theta, \sigma) = \alpha$ cînd $\theta = \theta_0$ şi deoarece $T' \in C_{\alpha,\beta}$. $\sup_{\theta=\theta_0} \alpha_{T'}(\theta, \sigma) \geqslant$ media $\alpha_{T'}(\theta, \sigma)$ (în raport cu o funcţie de pondere definită pe regiunea $\theta - \theta_0) = \alpha$.

Din proprietatea II, cînd $(\theta - \theta_0)/\sigma > \delta$, $\beta_T(\theta, \sigma)$ depăşeşte $\beta_T(\theta, \sigma)$ evaluat în $(\theta - \theta_0)/\sigma = \delta$. Deci

$$\sup_{(\theta-\theta_0)/\sigma \geqslant \delta} \beta_T(\theta, \sigma) = \beta.$$

De asemenea

$\sup_{(\theta-\theta)/\sigma \geqslant \delta} \beta_{T'}(\theta, \sigma) \geqslant$ media $\beta_T(\theta, \sigma)$ (în raport cu o funcţie de pondere definită pe $(\theta - \theta_0)/\sigma \leqslant \delta) = \beta$.

Teorema este demonstrată.

COROLARUL 1. *Dacă aproximaţiile lui Wald ale marginilor raportului de probabilităţi în termeni de probabilităţile erorilor sînt admise, atunci T are în clasa $C_{A,B}$, unde $A = (1 - \beta)/\alpha$ şi $B = \beta/(1-\alpha)$, o dublă proprietate minimax.*

§3. Testul secvenţial t^2 (sau t pentru alternative bilaterale)

LEMA 1 (J. K. Ghosh (1960)). *Integralele*

$$\int_0^c \sigma^{-m} \exp\left[-\sum_1^m (X_i - \theta_0)^2/2\sigma^2\right] d\sigma$$

şi

$$\frac{1}{2}\int_0^c \sigma^{-m}\left\{\exp\left[-\sum_1^m (X_i - \theta_0 - \delta\sigma)^2/2\sigma^2\right] + \right.$$

$$\left. + \exp\left[-\sum_1^m (X_i - \theta_0 + \delta\sigma)^2/2\sigma^2\right]\right\} d\sigma$$

Scanned with OKEN Scanner

sînt uniform convergente în X (*cînd* $c \to \infty$ *pentru* $m \geqslant 2$).

Demonstrație. Dacă c și c' sînt suficient de mari, atunci pentru $m \geqslant 2$

$$\int_{c'}^{c} \sigma^{-m} \exp\left[-\sum_{1}^{m} (X_i - \theta_0)^2/2\sigma^2\right] d\sigma \leqslant \int_{c'}^{c} \sigma^{-m}\, d\sigma < \varepsilon.$$

Proprietatea I. Testul secvențial t^2 se termină după un număr finit de pași cu probabilitatea unu.

Proprietatea II. (Ghosh (1960 a)). Testul secvențial t^2 pentru verificarea ipotezei

$$H_0 : \theta = \theta_0 \text{ față de } H_1 : |\theta - \theta_0| = \delta\sigma$$

are probabilitățile erorilor α și β, unde

$$A \leqslant (1 - \beta)/\alpha \text{ și } B \geqslant \beta/(1 - \alpha)$$

constante.

Dacă se folosesc aproximațiile lui Wald

$$\alpha \sim (1 - B)/(A - B) \text{ și } \beta \sim B(A - 1)/(A - B).$$

Teorema 2. (J. K. Ghosh (1960 a)). *Testul secvențial* t^2 *pentru verificarea ipotezei*

$$H_0 : \theta = \theta_0 \textit{ față de } H_1 : |\theta - \theta_0| = \delta\sigma$$

are o dublă proprietate minimax (*care este obținută înlocuind* T *prin* T^2, T' *prin* T'^2 *și* $(\theta - \theta_0) \geqslant \delta\sigma$ *prin* $|\theta - \theta_0| = \delta\sigma$ *în* (15) *și* (16)) *în* $C_{\alpha,\beta}$, *dacă* A *și* B *sînt astfel alese încît* T^2 *are probabilitățile erorilor* α *și* β. *Dacă* $A \simeq (1 - \beta)/\alpha$ *și* $B \sim \beta/(1 - \alpha)$, *atunci* T^2 *este dublu minimax în* $C_{A,B}$.

Demonstrația este analogă cu aceea a teoremei 1 și se folosește proprietatea II.

Teorema 3. (J. K. Ghosh (1960)). *Dacă* $\beta_{T^2}(\delta)$ *este o funcție descrescătoare de* $\delta = |\theta - \theta_0|/\sigma$, *atunci testul secvențial* t^2 *pentru verificarea ipotezei*

$$H_0 : \theta = \theta_0 \textit{ față de } H_1 : (\theta - \theta_0) \geqslant \delta\sigma$$

are o dublă proprietate minimax.

Demonstrația este analogă aceleia a teoremei.

Observație. Wald (1947) afirmă însă nu demonstrează complet monotonicitatea funcției $\beta_{T^2}(\delta)$. Hoel (1954) critică aserțiunea lui Wald

Scanned with OKEN Scanner

(teoremele 2 şi 3) comparînd testul secvenţial t^2 cu testul secvenţial t al lui Arnold. Totuşi critica lui Hoel (1954) nu se aplică la teorema 2.

Sacks (1965) a propus un test secvenţial t pentru o alternativă unilaterală cu extensii posibile la alternative bilaterale. Procedeul său este următorul. Fie

$$H_0 : \theta = 0, \ \sigma > 0, \ H_1 : \theta = \sigma, \ \sigma > 0$$

Fie

$$f_\sigma(X_1, \ldots, X_n) = \sigma^{-n} \exp\left[- \sum_1^n (X_i - \sigma)^2 / 2\sigma^2 \right],$$

şi

$$g_\sigma(X_1, \ldots, X_n) = \sigma^{-n} \exp\left[- \sum_1^n X_i^2 / 2\sigma^2 \right].$$

Atunci luăm $a(n+1)$ — a observaţie dacă

$$\int_0^\infty f_\sigma(X_1, \ldots, X_n)(d\sigma/\sigma) < A \int_0^\infty g_\sigma(X_1, \ldots, X_n)(d\sigma/\sigma) \tag{17}$$

şi

$$\int_0^\infty f_\sigma(X_1, \ldots, X_n)(d\sigma/\sigma) > A^{-1} \int_0^\infty g_\sigma(X_1, \ldots, X_n)(d\sigma/\sigma). \tag{18}$$

Stopăm şi acceptăm H_0 dacă (18) nu este satisfăcută şi stopăm şi acceptăm H_1 dacă (17) nu este satisfăcută.

Acest procedeu este simetric cu marginile A şi A^{-1} simetric (adică $\alpha = \beta$). Sacks (1965) a obţinut următorul rezultat

TEOREMA 4. (Sacks (1965)). *Pentru procedeul anterior, fie N timpul de stopare. Atunci*

$$M(N \mid \mu = \sigma = 1) \simeq \ln A / \ln 2^{1/2} \text{ cînd } A \to \infty. \tag{19}$$

Observaţie. Idei similare se aplică dacă

$$H_1 : \theta = \delta\sigma \text{ sau } |\theta| = \delta\sigma.$$

Deoarece repartiţia lui N depinde numai de μ/σ, (19) este adevărată pentru orice θ şi σ cu $\theta = \sigma$ (adică pentru orice punct din H_1). Sacks (1965) afirmă că funcţia generatoare de momente a lui N este finită pentru t într-o vecinătate a lui zero. Testul secvenţial t are asimptotic o proprietate rea cînd $\mu = \sigma/2$. Cînd $\mu/\sigma = 0$ sau 1 autorul afirmă că probabilitatea erorii este $0(\ln A/A)$.

Scanned with OKEN Scanner

Demonstrație. Arătăm mai întîi că există $\varepsilon > 0$ și $0 < a < 1$ astfel ca

$$(20)\quad C_n = \frac{\int_0^a g_\sigma(x_1, \ldots, x_n)\,(\mathrm{d}\sigma/\sigma) + \int_{1/a}^{\infty} g_\sigma(x_1, \ldots, x_n)\,(\mathrm{d}\sigma/\sigma)}{\int_a^{1/a} g_\sigma(x_1, \ldots, x_n)(\mathrm{d}\sigma/\sigma)} \leqslant 1,$$

$2 - \varepsilon \leqslant \sum_1^n x_i^2/n \leqslant 2 + \varepsilon$, și astfel ca

$$(21)\quad D_n = \frac{\int_0^a f_\sigma(x_1, \ldots, x_n)(\mathrm{d}\sigma/\sigma) + \int_{1/a}^{\infty} f_\sigma(x_1, \ldots, x_n)(\mathrm{d}\sigma/\sigma)}{\int_a^{1/a} f_\sigma(x_1, \ldots, x_n)(\mathrm{d}\sigma/\sigma)} \leqslant 1,$$

$$2 - \varepsilon \leqslant \sum_1^n x_i^2/n \leqslant 2 + \varepsilon \text{ și } 1 - \varepsilon \leqslant \sum_1^n x_i/n \leqslant 1 + \varepsilon.$$

Pentru a arăta (20), punem $V_n = \sum_1^n x_i^2/n$ și notăm că

$$\int_0^a g_\sigma(x_1, \ldots, x_n)(\mathrm{d}\sigma/\sigma) \leqslant \max_{0<\sigma\leqslant a} (1/\sigma^{n+1}) \exp\left[-(1/2\sigma^2)\,V_n\right] \int_0^a \mathrm{d}\sigma =$$

$$= (1/a^n) \exp\left[-(1/2a^2)V_n\right] = K_n(\text{notație}).$$

$a \leqslant V_n/(n+1)$;

$$\int_{1/a}^{\infty} g_\sigma(x_1, \ldots, x_n)(\mathrm{d}\sigma/\sigma) \leqslant \max_{\sigma\geqslant 1/a} (1/\sigma^{n-1}) \exp\left[-(1/2\sigma^2)V_n\right] \int_{1/a}^{\infty} (\mathrm{d}\sigma/\sigma^2) =$$

$$= a^n \exp\left(-\frac{1}{2}\,a^2 V_n\right) = L_n(\text{notație}).$$

$1/a \geqslant V_n/(n-1)$;

$$\int_b^c g_\sigma(x_1, \ldots, x_n)(\mathrm{d}\sigma/\sigma) \geqslant$$

$$\geqslant \min\left\{(1/b^n) \exp\left[-(1/2b^2)V_n\right], (1/c^n) \exp\left[-(1/2c^2)V_n\right]\right\} \ln(c/b),$$

$b \leqslant V/n \leqslant c$. Alegînd $b = 2 - \varepsilon$, $c = 2 + \varepsilon$ și a suficient de aproape de 0, (20) este satisfăcută.

Scanned with OKEN Scanner

Fie N_1 primul moment la care nu este satisfăcută (17). Atunci $N \leqslant N_1$. Fie ν_a primul n astfel ca

$$\int_a^{1/a} f_\sigma\,(\mathrm{d}\sigma/\sigma) > A\int_0^{\infty} g_\sigma(\mathrm{d}\sigma/\sigma) = A\int_a^{1/a} g_\sigma(\mathrm{d}\sigma/\sigma)\{1+C_n\}.$$

Atunci $N_1 \leqslant \nu_a$. Fie E_a primul n astfel ca

$$\int_a^{1/a} f_\sigma(\mathrm{d}\sigma/\sigma) > 2A\int_a^{1/a} g_\sigma(\mathrm{d}\sigma/\sigma)$$

și fie T ultimul timp pentru care

$$\sum_1^n X_i^2/n > 2+\varepsilon \text{ sau } \sum_1^n X_i^2/n < 2-\varepsilon.$$

Dacă a și ε sînt alese astfel încît are loc (20) atunci din

$$P\{\nu_a \geqslant k\} \leqslant P\{T \geqslant k\} + P\{T < k,\ \nu_a \geqslant k\} \leqslant$$

$$\leqslant P\{T \geqslant k\} + P\{T < k,\ E_a \geqslant k\} \leqslant$$

$$\leqslant P\{T \geqslant k\} + P\{E_a \geqslant k\}$$

urmează că

$$MN \leqslant M\nu_a \leqslant MT + ME_a. \tag{22}$$

Cînd $\mu = 1$, $\sigma = 1$ astfel ca $MX_1^2 = 2$, $MT < \infty$ (Kiefer, Sacks (1965)) și nu depinde de A. Pentru a obține o margine superioară pentru E_a folosim lema 2 (Kiefer, Sacks (1963)) care dă:

$$ME_a \leqslant [1+0(1)]\ln 2A/\inf_{\sigma>0} M_{\mu=1,\,\sigma=1}\ln[f_1(X_1)/g_\sigma(X_1)] =$$

$$= [1+0(1)]\ln 2A/\frac{1}{2}\ln 2 \tag{23}$$

unde $0(1)$ tinde la 0 ca $A \to \infty$. (22) și (23) dau

$$\limsup_{A\to\infty}(MN/\ln A) \leqslant 2/\ln 2. \tag{24}$$

Pentru a obține o margine în altă direcție fie ν_a' primul n astfel ca

$$A^{-1}\int_a^{1/a} g_\sigma(\mathrm{d}\sigma/\sigma)\{1+C_n\} < \int_a^{1/a} f_\sigma(\mathrm{d}\sigma/\sigma)\{1+D_n\} < A\int_a^{1/a} g_\sigma(\mathrm{d}\sigma/\sigma)$$

Scanned with OKEN Scanner

nu este satisfăcută ; şi fie T' cel mai mic întreg m astfel ca

$$2-\varepsilon<\sum_1^n X_i^2/n<2+\varepsilon \text{ şi } 1-\varepsilon<\sum_1^n X_i^2/n<1+\varepsilon$$

pentru toţi $n \geqslant m$.

Atunci, din (20) şi (21)

$$E'_a \leqslant \max(\nu'_a,\ T')$$

astfel ca

$$MN \geqslant M\nu'_a \geqslant ME'_a - MT'.$$

MT' este finită şi independentă de A astfel că folosind corolarul teoremei 1 (Kiefer, Sacks (1969)) obţinem

$$\liminf_{A\to\infty} (MN/\ln A) \geqslant 2/\ln 2. \tag{25}$$

Atunci (24) şi (25) dau

$$\lim_{A\to\infty} (MN/\ln A) = 2/\ln 2$$

pentru toţi μ, σ în H_1. Are loc acelaşi rezultat cînd $\mu = 0$.

Sacks (1965) a folosit următoarea clasă de funcţii de pondere

$$g_0(\theta,\ \sigma) = \begin{cases} 1/(2\sigma \ln C), & \theta = \delta_0\sigma \text{ şi } C^{-1} < \sigma < C \\ 0, & \text{în rest în } \omega_0, \end{cases} \tag{26}$$

$$g_1(\theta,\ \sigma) = \begin{cases} 1/(2\sigma \ln C), & \theta = \delta_1\sigma \text{ şi } C^{-1} < \sigma < C \\ 0, & \text{în rest în } \omega_1. \end{cases} \tag{27}$$

§ 4. Analogul secvenţial al testului cu două etape al lui Stein

Hall (1962) a prezentat mai multe procedee analoage testului lui Stein pentru ipoteze asupra repartiţiei normale cu dispersia necunoscută şi cu margini specificate pentru probabilităţile erorilor. Aceste procedee sînt modificări ale procedeului dat de Baker (1950). Performanţele acestor teste nu depind de presupunerea privind dispersia. Mai mult, aceste procedee nu cer ca ipoteza alternativă să fie exprimată în abateri standardizate.

Avem o selecţie asupra unei variabile aleatoare $X \sim N(\mu,\ \sigma^2)$, μ şi σ^2 necunoscute şi ne propunem să verificăm ipoteza compusă

$$H_0 : \mu \leqslant 0,\ \sigma > 0 \text{ faţă de } H_1 : \mu \geqslant \delta(>0),\ \sigma > 0$$

cu marginile α şi β ale probabilităţilor erorilor prestabilite. O soluţie este de a exprima H_1 în abateri standardizate (necunoscute) $\mu \geqslant \delta\sigma$ şi de a

Scanned with OKEN Scanner

folosi testul t (secvențial sau obișnuit) sau echivalent de a lua β ca funcție de σ. Acestea sînt cele două soluții cunoscute ale problemei puse. Una dintre soluții este dată de procedeul în două etape al lui Stein. În acest procedeu, volum celei de-a doua selecții depinde numai de dispersia de selecție a primei selecții, astfel că repartiția sa depinde numai de σ^2 și nu de μ. A doua soluție cunoscută este dată de Backer (1950). Metodele lui Hall (1962) sînt modificări ale metodei lui Backer. Primul pas identic cu acela din procedeul Stein constă în estimarea lui σ^2. În acest caz repartiția volumului selecției depinde de μ și σ^2.

Testul secvențial T

Fie $X_1, X_2, \ldots$ variabile aleatoare independente repartizate $N(\mu, \sigma^2)$, $-\infty < \mu < \infty$, $0 < \sigma < \infty$. Fie m un întreg specificat > 1. Considerăm T.S.R.P. pentru verificarea ipotezei $\mu = 0$ față de $\mu = \delta$ (σ cunoscută) bazată pe $\bar{X}_m, \bar{X}_{m+1}, \ldots$ cu marginile de terminare A_m și B_m și cu σ înlocuit prin s_m și

$$a_m = \ln A_m = \frac{1}{2} v(\alpha^{-2/v} - 1) = (-\ln \alpha)\,[1 + (-\ln \alpha)/v + 0(1/v)],$$

$$b_m = \ln B_m = -\frac{1}{2} v(\beta^{-2/v} - 1) = \tag{28}$$

$$= -(-\ln \beta)\,[1 + (-\ln \beta)/v + 0(1/v)],$$

unde $v = m - 1$ și $s_m^2 = \sum_1^m (X_i - \bar{X}_m)^2/(m-1)$.

Ne vom referi la testul anterior ca la testul T. Avem $A_m > A \equiv 1/\alpha$ și $B_m < B \equiv \beta$ ca egalități aproximative dacă m este mare și A și B sînt marginile conservative ale lui Wald (1947) care sînt corespunzătoare dacă σ era cunoscută. Fie

$$r_n(s_m) = \delta \sum_{i=1}^{n} (X_i - \delta/2)/s_m^2, \; (n \geqslant m). \tag{29}$$

Atunci procedeul T este:

Observăm $(X_1, \ldots, X_m)$ și atunci succesiv X_{m+1}, X_{m+2} și pentru fiecare $n \geqslant m$, după ce am observat X_n,

oprim experimentul și luăm decizia d_0 (acceptăm H_0) dacă $r_n(s_m) \leqslant b_m$;

oprim experimentul și luăm decizia d_1 (acceptăm H_1) dacă $r_n(s_m) \geqslant a_m$;

se continuă experimentul dacă $b_m < r_n(s_m) < a_m$.

Stringența testului T

Pentru (s_m, σ) dată, considerăm T.S.R.P. $T(s_m, \sigma)$ pentru verificarea ipotezei $\mu = 0$ față de $\mu = \delta$ bazat pe $\bar{X}_m, \bar{X}_{m+1}, \ldots$ cu marginile de terminare $\bar{A}_m$ și $\bar{B}_m$, unde

$$\bar{a}_m = \ln \bar{A}_m = a_m s_m^2/\sigma^2, \; \bar{b}_m = \ln \bar{B}_m = b_m s_m^2/\sigma^2. \tag{30}$$

Scanned with OKEN Scanner

Observînd că $\bar{X}_m, \bar{X}_{m+1}, \ldots$ sînt independente de s_m se găseşte că deciziile sînt luate în concordanţă cu

$$r_n(\sigma) \leqslant \bar{b}_m,\ r_n(\sigma) \geqslant \bar{a}_m \text{ sau } \bar{b}_m < r_n(\sigma) < \bar{a}_m.$$

Folosind marginile probabilităţilor erorilor ale T.S.R.P. avem

$$P[d_1 \text{ folosind } T(s_m,\sigma)\,|\,s_m,\sigma,\ \mu = 0] < 1/\bar{A}_m = \exp\,(-a_m s_m^2/\sigma^2),$$

(31)
$$P[d_0 \text{ folosind } T(s_m,\sigma)\,|\,s_m,\sigma,\ \mu = \delta] < \bar{B}_m = \exp\,(b_m s_m^2/\sigma^2).$$

Totuşi, $r_n(\sigma) = r_n(s_n)s_m^2/\sigma^2$ astfel că $T(s_m, \sigma)$ are aceiaşi regulă de decizie la fiecare pas ca T cu s_n calculată din $X_1, \ldots, X_m$.
Deci

$$M[P(d_i \text{ folosind } T(s_m,\ \sigma)\,|\,s_m,\ \sigma,\ \mu)] =$$

$$= M[P(d_i \text{ folosind } T\,|\,s_m,\ \sigma,\ \mu)] = P(d_i \text{ folosind } T\,|\,\sigma,\ \mu)$$

prin urmare, folosind (31) avem

(32)
$$P(d_1 \text{ folosind } T\,|\,\sigma, 0) < M[\exp\,(-a_m s_m^2/\sigma^2)] =$$

$$= (1 + 2a_m/v)^{-v/2}$$

pentru toţi σ deoarece $vs_m^2/\sigma^2 \sim \chi^2(v)$ şi $M[\exp(t\chi^2(v))] = (1 - 2t)^{-v/2}$.
Analog

(33)
$$P(d_0 \text{ folosind } T\,|\,\sigma, \delta) < M[\exp\,(b_m s_m^2/\sigma^2)] = (1 - 2b_m/v)^{-v/2}$$

pentru toţi σ. Deoarece testul condiţionat $T(s_m, \sigma)$ este un T.S.R.P., funcţia sa C.O. este monotonă în μ (proprietatea II), adică

$$P[d_i \text{ folosind } T(s_m,\ \sigma)\,|\,s_m,\ \sigma,\ \mu]$$

este monotonă în μ pentru fiecare s_m şi σ fixaţi. Aceasta împreună cu (32), (33) şi (34) implică

(34)
$$P(d_1 \text{ folosind } T\,|\,\mu, \sigma) < \alpha \text{ pentru toţi } \mu \leqslant 0,\ \sigma > 0$$

$$P(d_0 \text{ folosind } T\,|\,\mu,\ \sigma) < \beta \text{ pentru toţi } \mu \geqslant \delta,\ \sigma > 0$$

care implică că T are stringenţa (α, β). Deoarece pentru fiecare valoare a lui s_m, T.S.R.P. $T(s_m, \sigma)$ se termină cu siguranţă după un număr finit de paşi, testul T se termină de asemenea după un număr finit de paşi.

Funcţia C.O. a testului T

Pentru a obţine funcţia C.O. a testului T, Hall (1962) foloseşte aceeaşi metodă ca Baker (1950). Pentru testul condiţionat $T(s_m, \sigma)$, se aplică aproximaţia lui Wald pentru funcţia C.O.

(35)
$$P(d_0\,|\,s_m,\ \sigma, \mu) \simeq (\bar{A}_m^h - 1)/(\bar{A}_m^h - \bar{B}_m^h),\ (h \neq 0)$$

Scanned with OKEN Scanner

unde $h(\mu) = 1 - (2\mu/\delta)$ şi excesul peste margine este neglijat. Luînd mediile în raport cu (35), folosind (30) şi omiţînd indicii lui a_m, b_m şi s_m, avem, pentru $h > 0$,

$$P\{d_0 | \sigma, \mu\} = M\{[1 - \exp(-ahs^2/\sigma^2)]/\{1 - \exp[-(a-b)hs^2/\sigma^2]\}\} =$$

$$= M = \left\{[1 - \exp(-ahs^2/\sigma^2)] \sum_{i=0}^{\infty} \exp[-i(a-b)hs^2/\sigma^2]\right\}$$

care nu depinde de σ. Luînd media termen cu termen, membrul drept devine :

$$1 - [1 + 2ah/v]^{-v/2} + [1 + 2(a-b)h/v]^{-v/2} -$$

$$- [1 + 2(2a-b)h/v]^{-v/2} + [1 + 4(a-b)h/v]^{-v/2}$$

sau folosind (28)

$$1 - (1 - h + h\alpha^{-2/v})^{-v/2} + (1 - 2h + h\alpha^{-2/v} + h\beta^{-2/v})^{-v/2} -$$

$$- (1 - 3h + 2h\alpha^{-2/v} + h\beta^{-v/2})^{-v/2} + \tag{36}$$

$$+ (1 - 4h + 2h\alpha^{-2/v} + 2h\beta^{-2/v})^{-v/2} + \ldots$$

Expresiile anterioare sînt adevărate pentru $h > 0$, adică pentru $\mu < \delta/2$. Pentru $\mu > \delta/2$ $(h < 0)$ obţinem

$$P(d_0 | \sigma, \mu) \simeq 1 - M\{[1 - \exp(-bhs^2/\sigma^2)]/\{1 - \exp[-(b-a)hs^2/\sigma^2]\}\} =$$

$$= [1 + 2bh/v]^{-v/2} - [1 + 2(b-a)h/v]^{-v/2} +$$

$$+ [1 + 2(2b-a)h/v]^{-v/2} - [1 + 4(b-a)h/v]^{-v/2} + \ldots =$$

$$= (1 + h - h\beta^{-2/v})^{-v/2} - (1 + 2h - h\beta^{-2/v} - h\alpha^{-2/v})^{-v/2} + \tag{37}$$

$$+ (1 + 3h - 2h\beta^{-2/v} - h\alpha^{-2/v})^{-v/2} -$$

$$- (1 + 4h - 2h\beta^{-2/v} - 2h\alpha^{-2/v})^{-v/2} + \ldots$$

Pentru $\beta = \alpha$ şi luînd

$$j = \begin{cases} 0, \mu < \delta/2 \\ 1, \mu > \delta/2, \end{cases}$$

avem

$$P(d_j | \sigma, \mu) \simeq \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i [1 + i|h|(\alpha^{-2/v} - 1)]^{-v/2} \quad (\mu \neq \delta/2),$$

Scanned with OKEN Scanner

unde ca și în (36) și (37), sumele parțiale dau margini inferioare și superioare pentru funcția C.O. În $\mu = \delta/2 (h = 0)$, luînd limita în (35) cînd $h \to 0$ și folosind regula l'Hospital obținem că

$$P(d_0 | s, \sigma, \delta/2) \simeq a/(a-b)$$

indiferent de s astfel că

$$P(d_0 | \sigma, \delta/2) \simeq a/(a-b) = (\alpha^{-2/v} - 1)/(\alpha^{-2/v} + \beta^{-2/v} - 2) \tag{38}$$

care este egală cu $\frac{1}{2}$ dacă $\beta = \alpha$. Seriile (36) — (37) converg rapid cu excepția cazului $h = 0 (\mu = \delta/2)$.

Funcția V.M.V.S. a testului T

Pentru $\mu \neq \delta/2 (h \neq 0)$ și pentru toți σ, folosind (29), avem

$$\begin{aligned} M[r_N(\sigma)] &= \delta M \sum_{i=1}^{N} X_i - \delta/2)/\sigma^2 = \\ &= \delta(\mu - \delta/2)\,(M(N))/\sigma^2 = -h\delta^2 M(N)/2\sigma^2. \end{aligned} \tag{39}$$

De asemenea omițînd indicele m

$$M[r_N(\sigma)] = M\{M[r_N(\sigma) | s]\} = M\left[\sum_{i=0}^{i} M[r_N(\sigma) | s, d]\, P(d_i | s)\right]. \tag{40}$$

Ignorînd excesele

$$M[r_N(\sigma) | s, d_1] \simeq \bar{a} = as^2/\sigma^2, \quad M[r_N(\sigma) | s, d_0] \simeq \bar{b} = bs^2/\sigma^2.$$

Excesul nu va fi semnificativ dacă N este mare relativ la m. Astfel ecuația (40) conduce la

$$\begin{aligned} M[r_N(\sigma)] &= M[bs^2 P(d_0 | s) + as^2 P(d_1 | s)]/\sigma^2 = \\ &= a - (a-b)\, M[s^2 P(d_0 | s)]/\sigma^2. \end{aligned} \tag{41}$$

Folosind (35) și procedînd ca în cazul funcției C.O., pentru $h > 0$, obținem

$$M[r_N(\sigma)] \simeq a - (a-b) M\left\{(s^2/\sigma^2)\,[1 - \right.$$

$$\left. - \exp(-ahs^2/\sigma^2)] \sum_{i=0}^{\infty} \exp[-i(a-b)hs^2/\sigma^2]\right\}.$$

Observînd că,

$$M[\chi^2 \exp(-t^2\chi^2/v)] = (1 + 2t)^{-1-v/2},$$

Scanned with OKEN Scanner

după ce luăm mediile termen cu termen și egalînd cu (39), găsim că pentru $h > 0$

$$(\delta/\sigma)^2 M(N) \simeq \frac{-2b}{h} - \frac{2(a-b)}{h}\{[1+2ah/v]^{-1-v/2} - [1+2(a-b)h/v]^{-1-v/2} +$$

$$+ [1+2(a-b)h/v]^{-1-v/2} - [1+4(a-b)h/v]^{-1-v/2} + \ldots\} =$$

$$(42) \quad = (v/h)\{\beta^{-2/v} - 1 - (\alpha^{-2/v} + \beta^{-2/v} - 2)[(1-h+h\alpha^{-v/2})^{-1-v/2} -$$

$$- (1-2h+h\alpha^{-v/2}+h\beta^{-2/v})^{-1-v/2} +$$

$$+ (1-3h+2h\alpha^{-2/v}+h\beta^{-2/v})^{-1-v/2} -$$

$$- (1-4h+2h\alpha^{-2/v}+2h\beta^{-2/v})^{-1-v/2} + \ldots]\}.$$

Pentru $h < 0$, aceeași formulă are loc cu h înlocuit prin $-h$ și cu α și β interschimbabili. Pentru $\beta = \alpha$ și $h \neq 0$

$$(43) \quad (\delta/\sigma)^2 M(N) \simeq \frac{v}{|h|}(\alpha^{-2/v} - 1)\left\{1 + 2\sum_{i=1}^{\infty}(-1)^i[1+i|h|(\alpha^{-2/v}-1)]^{-1-v/2}\right\}.$$

În $\mu = 0$ și $\mu = \delta$ marginile lui Wald (31) pentru probabilitățile erorilor testului condiționat pot fi folosite în loc de (35). Astfel (41) împreună cu (39) conduc (aproximativ) la

$$(\delta/\sigma)^2 M(N \mid \mu = 0) > -2b - 2(a-b)M[s^2 \exp(-as^2/\sigma^2)/\sigma^2] =$$

$$= v[\beta^{-2/v} - 1 - \alpha(1 + \beta^{-2v}\,\alpha^{2/v} - 2\alpha^{2/v})]$$

și similar pentru $(\delta/\sigma)^2 M(N \mid \mu = \delta)$ cu α și β interschimbabili.

Dacă $\beta = \alpha$, aceste relații se reduc la

$$(44) \quad (\delta/\sigma)^2 M(N \mid \mu = 0 \text{ sau } \delta) > v[\alpha^{-2/v} - 1 - 2\alpha(1-\alpha^{2/v})].$$

Pentru $h = 0 (\mu = \delta/2)$ avem analoagele relațiilor (39) — (41).

$$(45) \quad M[r_N(\sigma)]^2 = (\delta/\sigma)^2 M(N \mid \mu = \delta/2)$$

și

$$(46) \quad M[r_N(\sigma)]^2 \simeq a^2 M(s^4/\sigma^4) - (a^2 - b^2)\,M[s^4 P(d_0|s)]/\sigma^2.$$

Din (45) și (46) și folosind (38) avem

$$(\delta/\sigma)^2 M(N \mid \mu = \delta/2) \simeq [a^2 - a(a+b)]\,M[\chi^4(v)/v^2] = -ab[1 + (2/v)] =$$

$$(47) \quad = \frac{1}{4} v^2[1 + (2/v)](\alpha^{-2/v} - 1)(\beta^{-2/v} - 1).$$

Scanned with OKEN Scanner

Comparația cu funcțiile C.O. și V.M.V.S. ale testului în două etape (Stein). Fie t'(și respectiv t'') numărul care este depășit de statistica t cu probabilitatea α (respectiv β) cu v grade de libertate. Volumul total al selecției N în procedeul unilateral al lui Stein cu volumul inițial al secției $m = v + 1$ și marginile erorilor (α, β) este dat de

$$N = \max \{[s_m^2(t' + t'')^2/\delta^2] + 1,\ m\}$$

unde $[\cdot]$ reprezintă cel mai mare întreg conținut în $(\cdot)$ și

$$(\delta/\sigma)^2 M(N) \simeq (t' + t'')^2 \tag{48}$$

aproximația (actual marginea inferioară) fiind adevărată dacă implică $M(N) > m$ (Stein (1954)). Regula de decizie terminală pentru testul lui Stein poate fi

$$\text{alegem } d_1(d_0) \text{ dacă } \bar{x}_n > (<)\ \delta t'(t' + t'')$$

sau echivalent

$$\text{alegem } d_1(d_0) \text{ dacă } r_n(s_n) > (<) \frac{1}{2}\delta^2 (n/s_m^2)(t' - t'')/(t' + t'').$$

Funcția C.O. este

$$P(d_0|\,\mu, \sigma) = P\left\{ \frac{\sum_1^N (X_i - \mu)}{N^{1/2} s_m} < \frac{N^{1/2}}{s_m(t' + t'')} [\delta t' - \mu(t' + t'')] \,|\mu, \sigma \right\}.$$

Aproximînd $N^{1/2}$ prin $s_m(t' + t'')/\delta$ din membrul drept, avem

$$P(d_0|\mu, \sigma) \simeq F_v(t' - (\mu/\delta)(t' + t'')), \tag{49}$$

care este independentă de σ, unde F_v este funcția de repartiție a statisticii t centrate cu v grade de libertate.

Hall (1962) a făcut comparație între funcțiile de putere și V.M.V.S. corespunzătoare :

— testului secvențial T și testului lui Stein în două etape

și

— T.S.R.P. al lui Wald și testul bazat pe o selecție de volum fix, cu σ cunoscută cunoscută pentru $\alpha = \beta = 0{,}05$ și $0{,}01$.

Un test secvențial T' alternativ

Pentru cazul simetric ($\alpha = \beta$) unilateral se folosește testul minim al raportului de probabilități (T.M.R.P.), test echivalent cu unul dintre testele lui Anderson (1960). Testul T' constă în următoarele :

Oprim experimentul în dată ce

$$\delta \left| \sum_{i=1}^n (X_i - \delta/2) \right| / s_m^2 \geqslant c_m - n\delta^2/4s_m^2 (n \geqslant m)$$

și alegem d_1 sau d_0 după cum

$$\Sigma(X_i - \delta/2) \text{ este} > \text{sau} < 0,$$

Scanned with OKEN Scanner

unde

(50) $c_m = v[(2\alpha)^{-2/v} - 1] = -2 \ln (2\alpha)\,[1 + (-2 \ln(2\alpha))/v + 0(1/v)]$.

După ce au fost luate observaţii şi s-a calculat s_m, $4c_m s_m^2/\delta^2$ este o margine superioară pentru volumul total al selecţiei. Dacă $\alpha \neq \beta$, testul poate fi folosit cu 2α în (50) înlocuit prin $\alpha + \beta$, însă atunci se poate presupune numai că suma probabilităţilor celor două erori $< \alpha + \beta$. În afară de marginile date anterior nu s-au obţinut alte aproximaţii pentru funcţiile C.O. şi V.M.V.S. În vecinătatea lui $\mu = \delta/2$, T' va avea o V.M.V.S. < decît a testului T.

§ 5. Testul secvenţial F

Hoel (1955) a aplicat metoda funcţiilor de pondere a lui Wald la problema verificării ipotezelor liniare generale. Fie $X_1, \ldots, X_s$ variabile aleatoare independente repartizate normal de medii

$$\theta_1, \ldots, \theta_s (\theta_i = 0,\ i = k+1, \ldots, s) \text{ şi dispersie comună } \sigma^2.$$

Ne propunem să verificăm ipoteza

$$H_0 : \theta_1 = \ldots = \theta_p = 0 \text{ pentru } p \leqslant k,\ \sigma > 0$$

faţă de

$$H_1 : \sum_1^p \theta_i^2/\sigma^2 \geqslant \delta_0, \text{ unde } \delta_0 \text{ este o constantă dată.}$$

$\theta_{p+1}, \ldots, \theta_k$ şi σ sînt parametrii nedoriţi şi deci H_0 este compusă. Fie S_1 frontiera regiunii $\omega_1 = \left\{(\theta_1, \ldots, \theta_s) : \sum_1^p \theta_i^2/\sigma^2 \geqslant \delta_0\right\}$.

Alegem ca funcţii de pondere

$$g_0(\theta, \sigma) = \begin{cases} a_1 \sigma^{b_1}(2c)^{p-k}, & 0 \leqslant \sigma \leqslant c,\ |\theta_i| \leqslant c,\ i = p+1, \ldots, k \\ 0, & \text{în rest} \end{cases}$$

$$g_1(\theta, \sigma) = \begin{cases} a_2 \sigma^{b_2}(2c)^{p-k}, & 0 \leqslant \sigma \leqslant c,\ |\theta_i| \leqslant c,\ i = p+1, \ldots, k \\ 0, & \text{în rest} \end{cases}$$

unde a_1, a_2, b_1 şi b_2 sînt constante care vor fi specificate în cele ce urmează. Alegem $b_2 = b + 1 - p$.

Fie

— $\omega_0(\omega_1)$ partea din spaţiul parametrilor în care are loc $H_0(H_1)$,

— $S_{1,c}$ şi $\omega_{0,c}$ acele părţi ale S_1 şi ω_0 unde $0 \leqslant \sigma \leqslant c$ şi $|\theta_i| \leqslant c$ pentru $i = p+1, \ldots, k$,

— $f_{1,n,c}(f_{0,n,c})$ densitatea obţinută integrînd densitatea de repartiţie a X-lor în raport cu densitatea apriorică $g_1(\theta, \sigma)[g_0(\theta, \sigma)]$ pe regiunea $S_{1,c}(\omega_{0,c})$.

— $c \to \infty$.

Hoel (1955) a obţinut (în ipoteza $b_1 \leqslant 0$)

$$(51)\quad f_{1,n}/f_{0,n} = \exp(-n\delta_0/2) M\left[\frac{1}{2}(ns + p - k - b_1 - 1), \frac{1}{2}p, \lambda^2/2\delta_0\right]$$

Scanned with OKEN Scanner

unde

$$\lambda^2 = n\delta_0^2 \sum_1^p \bar{X}_i^2 \Big/ \left(\sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^s X_{i,j}^2 - n \sum_{i=p+1}^k \bar{X}_i^2 \right) \text{ și}$$

$$M(a, b, u) = \sum_{r=0}^{\infty} [\Gamma(b)\,\Gamma(a+r)u^r / \Gamma(a)\,\Gamma(b+r)]; \tag{52}$$

este funcţia hipergeometrică confluentă. Dacă $b_1 = -1$ şi $s = k$, raportul (52) se reduce la unul obţinut de Johnson (1953) folosind metoda lui Cox (1952 a). Consideraţii de invarianţă conduc la criteriul $\lambda^2/2\delta_0$.

Ray (1957a) a arătat că procedeele lui Johnson (1953) şi Hoel (1955) sînt de forma:

Se continuă selecţia la pasul n dacă

$$\beta/(1-\alpha) < e^{-\lambda(n)/2} M(a(n), b, \frac{1}{2}\lambda(n)\,G^{(n)}/(1+G^{(n)})) < (1-\beta)/\alpha, \tag{53}$$

în rest se acceptă sau se respinge ipoteza nulă după cum membrul stîng sau membrul drept al inegalităţii nu este satisfăcut, unde

— $\lambda(n)$ caracterizează ipoteza alternativă,

— $a(n)$ este jumătate din suma gradelor de libertate a numărătorului şi numitorului testului $G^{(n)}$ şi

— b este 1/2 din gradele de libertate ale numitorului lui $G^{(n)}$.

α şi β sînt probabilităţile erorilor, $\lambda(n)$ şi $a(n)$ sînt funcţiile liniare în n iar b este o constantă pozitivă fixată [$a(n) > b > 0$]. Se opreşte experimentul dacă $G^{(n)} \leqslant \underline{G}^{(n)}$ sau $\geqslant \bar{G}^{(n)}$ unde $\underline{G}^{(n)}$ şi $\bar{G}^{(n)}$ sînt soluţiile ecuaţiilor:

$$h_n(G) = e^{-\lambda(n)/2} M\left(a(n),\ b,\ \frac{\frac{1}{2}\lambda(n)G}{(1+G)} \right) = A, \text{ respectiv } B \tag{54}$$

unde $A = (1-\beta)/\alpha$ şi $B = \beta/(1-\alpha)$.

Teorema 5. (Ray (1957 a)) *T.S.R.P. generalizat pentru H_0 faţă de H_1 se termină după un număr finit de paşi cu probabilitatea* 1.

Demonstraţie. Este suficient să arătăm că

$$\lim \bar{G}^{(n)} = \lim \underline{G}^{(n)} = G_0 \text{ cînd } n \to \infty.$$

Observăm că:

$$h_n'(G) = e^{-\lambda/2} \frac{a}{b} M\left(a+1,\ b+1,\ \frac{\frac{1}{2}\lambda G}{1+G} \right) \frac{\frac{1}{2}\lambda}{(1+G)^2}$$

unde am omis argumentul n al funcţiilor λ şi a. Din relaţia de recurenţă pentru funcţia hipergeometrică confluentă

$$b/a < M(a+1,\ b+1,\ a)/M(a,\ b,\ u) < 1 \quad (u > 0) \tag{55}$$

urmează că

$$\frac{\frac{1}{2}\lambda}{(1+G)^2} < \frac{h_n'(G)}{h_n(G)} < \frac{\frac{1}{2}\lambda a/b}{(1+G)^2} \text{ pentru toţi } G > 0. \tag{56}$$

Scanned with OKEN Scanner

Deoarece $\lambda \to \infty$ cînd $n \to \infty$, (56) indică că $h_n'(G)/h_n(G) \to \infty$ cînd $n \to \infty$. Deoarece $\ln h_n(G)$ este o funcţie continuă de G pozitivă strict crescătoare, urmează că poate există cel mult o valoare a lui G, să spunem G_0, cu care $\ln h_n(G)$ nu devine infinit cînd $n \to \infty$. În consecinţă:

$$\ln h_n(G) \to \begin{cases} -\infty, & G < G_0 \\ +\infty, & G > G_0. \end{cases}$$

Deci $G^{(n)} \to \underline{G}^{(n)} \to G_0$ şi experimentul trebuie să se oprească. Dacă nu există un G_0 pentru care $\ln h_n(G)$ nu devine infinit, atunci $\ln h_n(G)$ devine infinit pentru toţi $G > 0$. Astfel $h_n(G)$ devine fie infinită pentru toţi $G > 0$ sau se apropie de zero pentru toţi $G > 0$. În primul caz, pentru n suficient de mare, pentru toţi $G > 0$, $h_n(G) > A$ şi experimentul se termină; şi în ultimul caz experimentul se termină deoarece $h_n(G) < B$ pentru n suficient de mare, pentru toţi $G > 0$. Teorema 5 este demonstrată.

Deoarece nu există o metodă generală pentru alegerea funcţiilor de pondere nu este întotdeauna posibil să găsim funcţiile de pondere (propuse de Wald (1947)) corespunzătoare. Pentru a scăpa de parametrii nedoriţi se transformă observaţiile originale astfel ca variabilele transformate să nu depindă de parametrii nedoriţi. Cox (1952 a) a demonstrat o teoremă generală care poate fi folosită pentru verificarea secvenţială a ipotezelor compuse. Deoarece obişnuit variabilele transformate vor fi dependente, se vor spune puţine lucruri asupra probabilităţilor procedeului secvenţial rezultat. Metoda lui Wald (1947) este mai corespunzătoare cînd ipotezele compuse implică domeniul parametrilor ce prezintă interes, iar metoda lui Cox (1952 a) cînd există parametrii nedoriţi.

Prezentăm fără demonstraţie principalele rezultate ale lui Cox (1952 a).

TEOREMA 6 (Cox 1952 a). *Fie* $\{x_1, \ldots, x_n\} = \mathbf{x}$ *variabile aleatoare a căror densitate de repartiţie depinde de parametrii necunoscuţi* $\theta_1, \ldots \theta_p$. x_i *pot fi vectori aleatori. Presupunem că*

i) $t_1, \ldots, t_p$ *sînt o mulţime de estimatori suficienţi pentru* $\theta_1, \ldots, \theta_p$,

ii) *repartiţia statisticii* t_1 *conţine pe* θ_1 *însă nu pe* $\theta_2, \ldots, \theta_p$;

iii) $u_1, \ldots u_m$ *sînt funcţii de* x *independente funcţional* *) *de celelalte şi de* $t_1, t_2, \ldots, t_p$;

iv) *există o mulţime* S *de transformări ale lui* $\mathbf{x} = \{x_1, \ldots x_n\}$ *în* $x' = \{x_1', \ldots, x_n'\}$ *astfel încît*

a) $t_1, u_1, \ldots, u_m$ *sînt neschimbate la orice transformare din* S

b) *transformările lui* $t_2, \ldots, t_p$ *în* $t_2', \ldots t_p'$ *definită de fiecare transformare din* S *este* 1 :1

c) *dacă* $T_2, \ldots T_p$ *şi* $T_2', \ldots T_p'$ *sînt două mulţimi de valori ale lui* $t_2, \ldots, t_p$ *fiecare avînd o densitate nenulă sub cel puţin una din repartiţiile lui* x, *atunci există o transformare în* S *astfel ca dacă* $t_2 = T_2, \ldots, t_p = T_p$ *atunci* $t_2' = T_2', \ldots, t_p' = T_p'$.

Atunci densitatea de repartiţie comună a statisticilor $t_1, u_1, \ldots, u_m$ *se pune sub forma*

$$g(t_1 | \theta_1)\, l(u_1, \ldots, u_m, t_1)$$

---

*) În această teoremă cînd se afirmă că anumite funcţii de $x_1, \ldots, x_n$ notate prin $t_1, \ldots, t_p, u_1, \ldots, u_m$ sînt funcţional independente înseamnă că există o transformare de la $x_1, \ldots, x_n$ la o nouă mulţime de variabile incluzînd $t_1, \ldots, t_p, u_1, \ldots, u_m$ şi că Jacobianul acestei transformări este diferit de zero (cu excepţia unei mulţimi de valori de probabilitate zero).

Scanned with OKEN Scanner

unde g este densitatea statisticii t_1 şi l nu conţine pe θ_1.

Presupunem că dorim să alegem între

$$H_0 : \theta_1 = \theta_1^0 \text{ şi } H_1 : \theta_1 = \theta_1^1$$

cu probabilităţile erorilor α şi β prestabilite, testul fiind independent de parametrii nedoriţi. Restricţia de alegere între două ipoteze nu este serioasă deoarece Wald (1947) a arătat cum se aplică astfel de teste la problema generală de alegere între două decizii. Mai mult Armitage (1947) a arătat cum aplicînd mai multe astfel de teste simultan, este posibil să obţinem teste pentru alegerea între mai mult de două decizii.

Presupunem că pentru toţi n există o mulţime suficientă de estimatori pentru $\theta_1, \ldots, \theta_p$ după n paşi şi că una dintre mulţimi pe care o notăm prin t_n are o densitate cunoscută $g_n(t_n \mid \theta_1)$ care nu conţine pe $\theta_2, \ldots \theta_p$. Presupunem de asemenea că condiţia iv) a teoremei 6 este satisfăcută cu $u_1 = t_1, \ldots, u_{n-1} = t_{n-1}$. Fie

$$L_n = g_n(t_n \mid \theta_1^1)/g_n(t_n/\theta_1^0). \tag{57}$$

Atunci testul este definit după cum urmează

$$\text{(58)} \quad \begin{cases} \text{Se continuă experimentul} & \text{dacă} \quad \beta/(1-\alpha) < L_n < (1-\beta)/\alpha \\ \text{Se acceptă } H_1 & \text{dacă} \quad L_n \geqslant (1-\beta)/\alpha \\ \text{Se acceptă } H_0 & \text{dacă} \quad \beta/(1-\alpha) \geqslant L_n. \end{cases}$$

Dacă testul se termină cu probabilitatea unu, probabilităţile erorilor sînt aproximativ α şi β.

Condiţii suficiente pentru ca testul să se termine cu probabilitatea unu sînt date în

TEOREMA 7. Cox (1952 a). *Presupunem că*

i) *testul* (58) *poate fi scris în forma : se continuă selecţia numai dacă* $t_n^- < t_n < t_n^+$, *unde* t_n^- *şi* t_n^+ *sînt funcţii de* n, α, β, θ_1^0 *şi* θ_1^1;

ii) t *este o statistică repartizată, asimptotic,* $N(\bar{t}_n, \sigma_n^2)$;

iii) sau a) $(t_n^+ - t_n^-)/\sigma_n \to 0$,

b) $(t_n^- - \bar{t}_n)/\sigma_n \to \infty$,

c) $(t_n^+ - \bar{t}_n)/\sigma_n \to \infty$,

cînd $n \to \infty$.

Atunci testul (58) se termină cu probabilitatea unu.

§ 6. Procedee secvenţiale invariante

6.1. Principiul de invarianţă

Vom considera o funcţie de repartiţie indexată de un parametru vector şi ne propunem să verificăm ipoteze privind o funcţie de θ, $\lambda(\theta)$. Dacă pentru $\lambda(\theta)$ există o statistică suficientă în sensul lui Fraser, atunci,

Scanned with OKEN Scanner

folosind metoda secvenţială, putem verifica ipoteze privind $\lambda(\theta)$. Totuşi sînt multe familii cu mai mulţi parametrii pentru care această metodă nu este aplicabilă : considerăm repartiţia $N(\mu, \sigma^2)$. Atunci luăm $\theta = (|\mu|, \text{sign } \mu)$ şi $\lambda(\theta) = |\mu|$ sau luăm $\theta = (\mu, \sigma)$ şi $\mu(\theta) = \mu/\delta$. În astfel de cazuri, putem fi capabili să găsim un şir de funcţii $\{T_n\}$ pe spaţiul observaţiilor $X_1, \ldots, X_n$ astfel ca repartiţia lui T_n să depindă numai de λ. Totuşi pot exista mai multe astfel de şiruri T_n. Dar, dorim să restrîngem domeniul alegerilor posibile ale unor astfel de funcţii prin impunerea unui criteriu adiţional şi anume principiul invarianţei care alege un şir special de funcţii de observaţiile de selecţie. Fie G un grup de transformări biunivoce pe R_n pentru fiecare $n \geqslant 1$.

DEFINIŢIA 1. Familia de repartiţii $\{F_{(n)}(\mathbf{x}_n ; \theta)\}$ [unde $\mathbf{x}_n = (x_1, \ldots, x_n)'$] este invariantă sub G dacă

i) pentru orice $\theta \in \Theta$ şi orice $g \in G$ există $\theta' \in \Theta$ astfel încît

$$P(gX_i \leqslant x_i,\ i = 1, \ldots, n \mid \theta) = F_n(x_1, \ldots, x_n ;\ \theta') \tag{59}$$

pentru toţi $(x_1, \ldots, x_n) \in R_n$ şi

ii) pentru orice θ' există un $\theta \in \Theta$ astfel încît are loc (59).

Punctul $\theta' \in \Theta$ care satisface (i) şi (ii) este notat prin $\bar{g}\theta$ şi mulţimea unor astfel de $\bar{g}$ va fi arătată prin $\bar{G}$.

De asemenea vom spune că grupul G induce un grup de transformări (biunivoce) $\bar{G}$ de la Θ în el însuşi. (59) se poate exprima de asemenea ca

$$F^{(n)}(x_1, \ldots, x_n ;\ \theta) = F^{(n)}(gx_1, \ldots gx_n,\ \bar{g}\theta).$$

O problemă de verificat cu

$$H_0 : \theta \in \omega \text{ faţă de } H_1 : \theta \in \omega',\ \omega' \subset \Theta - \omega$$

este invariantă sub G dacă (i) şi (ii) au loc pentru toţi θ, $\theta' \in \omega$ sau ω'.

Orice punct $\mathbf{x}'_n$ din R_n este echivalent cu $\mathbf{x}_n$ sub G dacă $\mathbf{x}'_n = g\mathbf{x}_n$ pentru cel puţin un $g \in G$.

Astfel, G partiţionează R_n în clase sau *orbite* de echivalenţă, orbita $O(\mathbf{x}_n)$ a punctului $\mathbf{x}_n \in R_n$ fiind mulţimea tuturor punctelor din R_n care sînt echivalente cu $\mathbf{x}_n$ sub G.

Orice funcţie $T_n(\mathbf{x}_n)$ pe R_n este invarianta sub G dacă este constantă pe fiecare orbită, adică, dacă

$$T_n(g\mathbf{x}_n) = T_n(\mathbf{x}_n) \text{ pentru toţi } \mathbf{x}_n \in R_n \text{ şi } g \in G. \tag{60}$$

Remarcăm că T_n poate fi un vector.

O submulţime E a lui R_n este invariantă sub G dacă $\mathbf{x}_n \in E$ implică $g\mathbf{x}_n \in E$ pentru fiecare $g \in G$(adică $gE \equiv E$).

Astfel un test este invariant sub G dacă regiunea sa critică este invariantă sub G.

Toate testele invariante pentru H_0 pot fi caracterizate ca funcţie de un *invariant maximal*.

DEFINIŢIA 2. O funcţie $T_n(\mathbf{x}_n)$ pe R_n este invariant maximal sub G dacă ia valoare diferită pe fiecare orbită, adică, dacă este invariantă sub G şi dacă $T_n(\mathbf{x}_n) = T_n(\mathbf{x}'_n)$ implică $\mathbf{x}'_n = g\mathbf{x}_n$ pentru $g \in G$.

Scanned with OKEN Scanner

Sub un grup G există întotdeauna invarianți maximali și sînt echivalenți în sensul că iau valori constante pe fiecare orbită, însă reprezentarea lor funcțională poate să nu fie unică. Mai departe, $\bar{G}$ induce o partiție pe Θ în clase echivalente sau orbite. Vom nota funcția invariant maximal pe Θ sub G prin $\lambda(\theta)$. Atunci avem următoarea teoremă

TEOREMĂ 8. *Fie $U_n(\mathbf{x}_n)$ invariantul maximal pe R_n sub G și fie $\lambda(\theta)$ invariantul maximal pe Θ sub $\bar{G}$.*

i) *Dacă $T(\mathbf{x}_n)$ este orice funcție invariant pe R_n sub G, repartiția lui $T(\mathbf{x}_n)$ depinde de θ numai prin $\lambda(\theta)$ [unde $\mathbf{x}_n = (x_1, \ldots, x_n)'$].*

ii) *Orice funcție $T(\mathbf{x}_n)$ pe R_n este invariantă sub G dacă și numai dacă $T(\mathbf{x}_n)$ depinde de $\mathbf{x}_n$ numai prin $U_n(\mathbf{x})$.*

Demonstrație. Fie θ' și θ'' oricare două puncte în Θ astfel ca $\lambda(\theta') = \lambda(\theta'')$. Deoarece $\lambda(\theta)$ este un invariant maximal

$$\theta'' = \bar{g}\theta' \text{ pentru } \bar{g} \in \bar{G}.$$

Deci

$$P(T_n(\mathbf{x}_n) \leqslant t | \theta') = P(T_n(g\mathbf{x}_n) \leqslant t | \theta') =$$

$$= P(T_n(\mathbf{x}_n) \leqslant t | \bar{g}\theta') = P(T_n(\mathbf{x}_n) \leqslant t | \theta').$$

Adică, pentru orice t, repartiția lui $T_n(\mathbf{x}_n)$ sub θ rămîne neschimbată pentru toți $\theta' \in \Theta$ care aparțin la aceeași orbită ca θ. Pentru a demonstra ii) fie ψ o funcție astfel încît

$$\psi(U_n(\mathbf{x}_n)) = T_n(\mathbf{x}_n) \text{ pentru toți } \mathbf{x}_n \in R_n.$$

Atunci pentru fiecare $g \in G$,

$$T(g\mathbf{x}_n) = \psi(U_n(g(\mathbf{x}_n)) = \psi(U_n(\mathbf{x}_n)) = T_n(\mathbf{x}_n)$$

pentru toți $\mathbf{x}_n \in R_n$. Adică T_n este un invariant sub G. Reciproc, dacă T_n este invariant sub G, fie $\mathbf{x}_n'$ și $\mathbf{x}_n''$ orice două puncte în R_n astfel ca

$$U_n(\mathbf{x}_n') = U_n(\mathbf{x}_n'').$$

Deoarece $U_n(\mathbf{x}_n)$ este un invariant maximal pe R_n avem

$$\mathbf{x}_n'' = g\mathbf{x}_n' \text{ pentru } g \in G$$

și deci

$$T_n(\mathbf{x}_n') = T_n(g\mathbf{x}_n'') = T_n(\mathbf{x}_n'').$$

Adică T_n rămîne constant pentru toți $\mathbf{x}_n$ pentru care $U_n(\mathbf{x}_n)$ este constant. Deci T_n este o funcție numai de U_n. Cu aceasta teorema este demonstrată.

6.2. Suficiență invariantă

Fie $\Lambda = \Lambda(\theta)$ spațiul lui λ, invariantul maximal pe Θ. Mai departe, U_m considerată ca funcție de $\mathbf{x}_n = (\mathbf{x}_m, x_{m+1}, \ldots, x_n)$, pentru orice $m < n$ este invariant pe R_n sub G și prin urmare $U_m(\mathbf{x}_m)$ este ea însuși funcție de

Scanned with OKEN Scanner

$U_n(\mathbf{x}_n)$. Adică, pentru orice $n > 1$, dacă se dă valoarea observată a lui U_n, sînt posibile valorile observate ale statisticilor $U_1, \ldots, U_{n-1}$. Principiul de invarianţă sugerează că orice procedeu de decizie asupra lui λ va fi de asemenea invariant sub G. Adică, regula de decizie la pasul n va fi bazată numai pe U_n. Aceste reguli sînt numite *proceduri invariante* pentru λ, înlocuiesc datele originale în termeni de U_n şi familia originală de repartiţii cu $\{F_{U_n}(u, \lambda), \lambda \in \Lambda\}$. Astfel sînt eliminaţi parametri nedoriţi şi proprietăţile T.S.R.P. (exprimate prin funcţiile C.O. şi V.M.V.S.) pot fi evaluate în termen de λ.

Adeseori putem reduce datele limitîndu-le la o statistică suficientă invariantă care este definită în cele ce urmează.

DEFINIŢIA 3. O funcţie $V_n = V_n(\mathbf{x}_n)$ este suficient invariantă pentru $\{F^{(n)}(\mathbf{x}_n ; \theta), \theta \in \Theta\}$ sub G dacă

i) V_n este o funcţie invariantă pe R_n sub G şi

ii) $P(\mathbf{x}_n \in E | V_n = v)$ nu depinde de θ pentru orice mulţime invariantă E în R_n sub G şi pentru toţi v.

Partea i) a definiţiei 3 şi teorema 8 implică că dacă U_n este orice invariant maximal pe R_n sub G, V_n poate fi exprimat întotdeauna ca funcţie de T_n pe spaţiul de selecţie al statisticii U_n. Partea ii) a definiţiei este echivalent cu

$$f_{U_n}(u ; \lambda) = f_{V_n}(v ; \lambda)\, h_n(u), \tag{61}$$

unde pentru fiecare n, $f_{U_n}(u ; \lambda)[f_{V_n}(v ; \lambda)]$ reprezintă densitatea lui $U_n(V_n)$. Reducerea datelor $\mathbf{x}_n$ pentru orice n, la datele invariante u_n şi în consecinţă la datele suficient invariante v_n poate fi exprimată simbolic ca

$$[F^{(n)}(\mathbf{x}_n ; \theta), \theta \in \Theta] \xrightarrow{G} [F_{U_n}(u ; \lambda), \lambda \in \Lambda] \xrightarrow{\text{suf}} \tag{62}$$

$$\xrightarrow{\text{suf}} [F_{V_n}(v ; \lambda), \lambda \in \Lambda].$$

Observaţie: Şirul suficient invariant sub G dat, există întotdeauna pentru orice familie. Reciproc, totuşi, dată o familie parametrică $\psi(\theta)$ poate să nu existe G pe R_n astfel ca $\psi(\theta)$ să joace rolul de invariant maximal pe Θ sub G. Mai departe, fiecare procedeu invariant poate fi reprezentant printr-o regulă de decizie echivalentă care depinde, pentru fiecare n, numai de v_n, cu condiţia ca $\{V_n\}$ este de asemenea un şir *transitiv* pentru $\{F_{U_n}(u ; \lambda), \lambda \in \Lambda\}$. Adică, orice procedeu care foloseşte numai v_n la pasul n păstrează principiul de invarianţă, totuşi, pentru ca reciproca să aibă loc se cere ca, pentru fiecare n şi $\lambda \in \Lambda$,

$$P(V_{n+1} \leqslant v | U_n = u, \lambda) = P(V_{n+1} \leqslant v | V_n = T_n(u), \lambda) \tag{63}$$

pentru toţi $(u ; v)$. Din nou, fiecare procedeu invariant este necesar bazat numai pe u_n la pasul n.

Sînt multe situaţii în care parametrul de interes rămîne fixat, însă parametrii nedoriţi pot varia de la un pas la altul. Principiul de invarianţă poate fi extins pentru a cuprinde astfel de situaţii. Hall, Wijsman, Ghosh (1965) au considerat structuri de invarianţă mai complicate în definiţia şirului suficient invariant.

Scanned with OKEN Scanner

6.3. T.S.R.P. invariant

Considerăm problema verificării ipotezei

$$H_0 : \lambda = \lambda_0 \text{ față de } H_1 : \lambda = \lambda_1,\ \lambda_0 \neq \lambda_1,$$

unde $\lambda = \lambda(\theta)$ este un invariant maximal a lui Θ sub $\bar{G}$. Deoarece V_n este suficientă pentru repartiția lui U_n și a repartiției comune a $V_1, V_2, \ldots, V_n$ din criteriul de factorizare avem

$$\frac{f_{U_n}(u_n : \lambda_1)}{f_{U_n}(u_n : \lambda_0)} = \frac{f_{V_n}(v_n : \lambda_1)}{f_{V_n}(v_n ; \lambda_0)} = \frac{g_n(v_1, \ldots, v_n : \lambda_1)}{g_n(v_1, \ldots, v_n ; \lambda_0)} = \exp(Z_n),$$

unde Z_n poate fi privită ca funcție de u_n sau v_n. De asemenea orice test bazat pe acest raport de probabilități pentru $n = 1, 2, \ldots$ folosește la pasul n numai pe v_n și deci este un test invariant. Pentru această aserțiune nu este necesară transitivitatea lui $\{V_n\}$ pentru $\{F_{U_n}(u ; \lambda)\}$; totuși este cerută pentru a asigura că toate testele invariante față de λ sînt bazate, esențial, pe v_n la fiecare etapă. Astfel se poate aplica T.S.R.P. al lui Wald bazat pe Z_n cu valorile pentru margini obținute din specificarea probabilităților. Dacă λ este o valoare reală și $\{F_{V_n}(v, \lambda), \lambda \in \Lambda\}$ sau $\{F_{U_n}(u ; \lambda), \lambda \in \Lambda\}$ posedă, pentru fiecare n, raport de verosimilități monoton atunci T.S.R.P. este efectiv pentru verificarea ipotezei

$$H_0 : \lambda \leqslant \lambda_0 \text{ față de } H_1 : \lambda \geqslant \lambda_1 (\lambda_0 < \lambda_1)$$

cu aceleași probabilități ale erorilor. Presupunem că $z_i = Z_i - Z_{i-1}$ pentru $i \geqslant 1$ cu $Z_0 = 0$ sînt variabile aleatoare independente și identic repartizate. Atît z_i cît și Z_i sînt funcții numai de U_i. Atunci din teorema XXII. 6 urmează că, dacă $P(z_i = 0 \mid \lambda) < 1$, T.S.R.P. se termină după un număr finit de pași cu probabilitatea unu. Deci, sînt adevărate aproximațiile pentru funcția C.O. și V.M.V.S. și au loc proprietățile optime ale T.S.R.P. Pentru această optimitate este necesară independența șirurilor $\{U_i\}$ sau $\{V_i\}$ (cerința care în aplicații are loc rar). Totuși poate exista un test invariant rival care să aibe V.M.V.S. mai mică decît a T.S.R.P. invariant într-un $\lambda \neq \lambda_0, \lambda_1$, sau poate exista un test care să nu fie invariant și care să aibe V.M.V.S. mai mică decît T.S.R.P. invariant chiar în $\lambda = \lambda_0$ sau λ_1.

Dacă $\{z_i\}$ nu sînt variabile aleatoare independente și identic repartizate, fapt care este adevărat în cele mai multe aplicații, aserțiunile anterioare nu sînt adevărate. Atunci proprietatea de terminare poate fi verificată prin alte metode. Ifram (1965) discută acest aspect cînd $\{F_{V_n}(v ; \lambda), \lambda \in \Lambda\}$ posedă, pentru fiecare n, raport de verosimilități monoton și Wijsman (1967 b) consideră cazul cînd $\{X_i\}$ sînt vectori normali independenți și identic repartizați. Atît Ifram cît și Wijsman dau condiții suficiente în care

$$P(\ln B < Z_n < \ln A \mid \lambda) = 0$$

pentru toți $\lambda \in \Lambda$ cînd $n \to \infty$.

Scanned with OKEN Scanner

Berk (1970) a arătat că invariantul maximal pe R_n poate fi identificat cu un şir de variabile aleatoare interschimbabile obţinute din X_1, X_2, ... Avem

TEOREMA 9 (Berk (1970)). *Presupunem că există un întreg pozitiv* k *şi* $\omega_0 \cup \omega_1$ (*unde* $\omega_i = \{0;\ \lambda(0) = \lambda_i\}$, $i = 0,1$) *submulţimea* $\mathfrak{M}$ *a lui* R_k *astfel că fiecare* g *în* G *este determinat prin valorile sale în cele* k *coordonate ale oricărui punct din* $R_k - \mathfrak{M}$. *Atunci luînd funcţia* $U(x_1, \ldots, x_{k+1})$ *G-invariantul maximal, o funcţie G-invariant maximal de* $x_1, \ldots, x_n$, $n > k$ *este*

$$U_n(x_1, \ldots, x_n) = (U(x_1, \ldots, x_{k+1}), \ldots, U(x_1, \ldots, x_k, x_n))$$

Observaţii. În aplicaţii, R_k este un spaţiu vectorial şi $\mathfrak{M}$ este o mulţime de puncte cu coordonatele liniar dependente.

Demonstraţie. U_n este invariant; arătăm că este maximal. Fie $(x_1, \ldots, x_n)$ şi $(x'_1, \ldots, x'_n)$ două realizări posibile ale vectorului $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ pentru care

$$U_n(x_1, \ldots, x_n) = U_n(x'_1, \ldots, x'_n).$$

Atunci

$$U(x_1, \ldots, x_k, x_i) = U(x'_1, \ldots, x'_k, x'_i),\ i = k+1, \ldots, n,$$

şi deoarece U este maximal, există $g_i \in G$ astfel ca

$$(g_i x_1, \ldots, g_i x_k, g_i x_i) = (x'_1, \ldots, x'_k, x'_i),\ i = k+1, \ldots, n.$$

Putem presupune că $(x_1, \ldots, x_k)$ şi $(x'_1, \ldots, x'_k) \in R_k - \mathfrak{M}$; atunci deoarece pentru toţi i

$$(g_i x_1, \ldots, g_i, x_k) = (x'_1, \ldots, x'_k),$$

$$g_{k+1} = \ldots = g_n = g.$$

Astfel $(x'_1, \ldots, x'_n) = (gx_1, \ldots, gx_n)$, ceea ce arată că U_n este maximal.

Observaţie. Luînd $Y_i = U(X_1, \ldots, X_k, X_{k+i})$ şi $U_{k+n} = (Y_1, \ldots, Y_n)$, T.S.R.P. bazat pe U_n depinde de rapoartele de verosimilităţi pentru segmentele succesive iniţiale de şiruri de variabile interschimbabile $Y_1, Y_2, \ldots$ Următorul test t secvenţial va ilustra reducerea de invarianţă.

Exemplul 3. Fie $H_0[H_1]$ ipoteza conform căreia $X_i \sim N(\mu = \delta\sigma, \sigma^2)$ $[N(\mu = \delta'\sigma, \sigma^2)]$ unde $0 \leqslant \delta \leqslant \delta'$ şi $\Theta = (0, \infty)$. [Astfel ipotezele (sînt $\mu/\sigma =$ $= \delta$ sau δ']. Amîndouă ipoteze sînt invariante la schimbarea de scară $(X \to cX,\ c > 0)$ şi sînt generate de aceste transformări. Are loc teorema 9 cu $k = 1$. Deoarece x_2/x_1 este invariant maximal funcţie de (x_1, x_2), urmează că

$$(Y_1, Y_2, \ldots) = (X_2/X_1,\ X_3/X_1, \ldots)$$

este un invariant maximal interschimbabil (garantat de teoremă). Astfel ipotezele pot fi verificate considerînd la pasul $(n+1)$ raportul de verosimilităţi al $U_{n+1} = (Y_1, \ldots, Y_{n+1-k})$ în ipoteze. Deoarece $\bar{X}_n$ şi $(n-1)\, s_n^2 =$

Scanned with OKEN Scanner

$\sum_1^n (X_i - \bar{X}_n)^2$ sînt suficiente comune pentru $X_1, \ldots, X_n$ (sub $H_0 \cup H_1$) după Hall, Wijsman, Ghosh (1965) urmează că funcţia invariant maximal de $(\bar{X}_n, s_n)$ este suficient pentru U_n. $T_n = \bar{X}_n/s_n$ poate fi luată ca suficient invariantă. Deci procedeul se reduce la considerarea şirului de raporte de verosimilităţi pentru statisticile t succesive.

Berk (1970) stabileşte legătura dintre reducerea datelor folosind metoda funcţiilor de pondere şi principiul invarianţei. În fiecare caz, T.S.R.P. este bazat pe raportul densităţilor de repartiţie a şirului de variabile aleatoare interschimbabile. Teorema lui Hewitt, Savage (1955) arată că în cele mai multe cazuri de interes o repartiţie interschimbabilă pentru un şir de date este o mixtură de repartiţii independente şi identice. Se ştie că rapoartele de verosimilităţi pentru anumite T.S.R.P. pot fi obţinute prin mixtura densităţilor comune corespunzătoare pentru $X_1, X_2 \ldots$ cu măsuri adecvate. Pentru testul secvenţial t aceasta a fost arătată implicit de Wald (1947) şi Barnard (1952). Motivul pentru aceasta a fost dezvoltat de Wijsman (1967 a) care a arătat în condiţii generale că densitatea de repartiţie pentru funcţia invariant maximal de $X_1, \ldots, X_n$ este proporţională cu

$$\int_G \prod_{i=1}^n f(x_i \mid g\theta)\, d\nu(g),$$

unde Θ este un punct de referinţă în Θ şi ν este absolut continuă în raport cu măsura Haar pe G. Această ecuaţie arată că raportul de verosimilităţi va fi simetric în $X_1, \ldots, X_n$.

Astfel, Berk (1970) consideră terminarea sigură a T.S.R.P. bazat pe rapoarte de verosimilităţi interschimbabile şi dă rezultate suficiente pentru T.S.R.P. care au fost propuse.

Prezentăm rezultatele lui Wijsman (1971) privind mărginirea exponenţială a timpului de stopare a T.S.R.P. invariant.

Fie $\{X_i\}$ un şir de variabile aleatoare avînd repartiţia comună F. Repartiţia comună a variabilelor X_i va fi notată de asemenea prin F. Stein (1947) a arătat că timpul de oprire N (volumul de selecţie aleator) al T.S.R.P. al lui Wald pentru verificarea unei ipoteze faţă de alta este mărginit exponenţial: adică, pentru un $c < \infty$, $0 < \rho < 1$, avem

$$P(N > n) < c\,\rho^n, \; n = 1, 2, \ldots \tag{64}$$

pentru fiecare F cu excepţia acelor F pentru care log raportului de probabilităţi este degenerat în zero. T.S.R.P. propus de Wald poate fi tratat ca o rătăcire aleatoare $\{S_n, n = 1, 2, \ldots\}$, unde S_n este log raportului de probabilităţi la pasul n. Dacă ipotezele care trebuiesc verificate sînt compuse (ipoteze care după o reducere invariantă devin simple) pe datele reduse poate fi definit un T.S.R.P. invariant. Totuşi, S_n corespunzător nu va mai fi o rătăcire aleatoare. În consecinţă trebuie demonstrată (64) pentru T.S.R.P. invariante. Rezultatele generale obţinute în această privinţă sînt incomplete şi nu demonstrează pentru care F are loc (64). Wijsman (1972) dă o prezentare şi o bibliografie mai completă pentru această problemă. Wijsman dă două exemple în care se demonstrează că (64) are loc pentru toţi F cu excepţia clasei funcţiilor F cu o anumită degenerare.

Scanned with OKEN Scanner

DEFINIȚIA 4. F este numită *obstructivă* dacă (64) nu este satisfăcută pentru toate marginile de stopare. Dacă (64) este satisfăcută pentru toate marginile de stopare, atunci vom spune că N este mărginită exponențial sub F.

Fie Λ_n raportul probabilităților la pasul n a T.S.R.P. invariant. Fie $S_n = \ln \Lambda_n$. Atunci timpul de oprire a T.S.R.P. invariant este definit în mod obișnuit.

(65) N = cel mai mic $n \geqslant 1$ astfel ca $b < S_n < a$ nu este satisfăcută, unde $-\infty < b < a < \infty$ sînt alese margini de stopare pentru $\{S_n\}$. Vom presupune că există o funcție s de la domeniul lui X_1 în spațiul euclidian k-dimensional R_k pentru $k \geqslant 1$, astfel că cu notația

$$Y_i = s(X_i),\ i = 1, 2, \ldots, \tag{66}$$

$$\bar{Y}_n = n^{-1} \sum_1^n Y_i \tag{67}$$

Λ_n (și în consecință S_n) este funcție de $X_1, \ldots, X_n$ numai împreună cu n și $\bar{Y}_n$.

Atunci, avem următoarea teoremă a lui Wijsman (1971) care constă în două părți.

— prima parte stabilește terminarea sigură

$$P(N < \infty) = 1 \tag{68}$$

în condiții slabe asupra lui F

— a doua parte demonstrează (64).

În demonstrația lui (68) se folosesc etape din demonstrarea lui (64) și o idee a lui Stein (1946). Se presupune că există o anumită funcție ψ cu valori reale pe R_k cu anumite proprietăți. După Wijsman (1972) nu există un candidat natural pentru ψ. Vom face următoarele două mulțimi de presupuneri: prima folosește pentru a demonstra (68) și amîndouă pentru a demonstra (64).

Presupunerea A. i) $M(Y_1 | F) = \xi$ există și este finită;

ii) există o vecinătate V a lui ξ și o funcție cu valori reale ψ pe V și o constantă finită B_1 astfel încît

$$|S_n - n\,\psi(\bar{Y}_n)| < B_1;\ \text{dacă}\ \bar{Y}_n \in V,\ n = 1, 2, \ldots; \tag{69}$$

iii) prima derivată a funcției ψ în V este continuă; fie grad ψ vectorul derivatelor parțiale și $\Delta = \text{grad}\ \psi$ evaluat în ξ, atunci

$$P\{\Delta'(Y_1 - \xi) = 0\} < 1. \tag{70}$$

Presupunerea B. Pentru toate componentele $Y_{ij} (j = 1, \ldots, k)$ ale lui Y_1 avem

$$M[\exp\ (tY_{1j}) | F] < \infty$$

pentru t într-o vecinătate a lui 0.

Scanned with OKEN Scanner

Presupunerea B implică presupunerea A(i).

TEOREMA 10. (Wijsman (1972)). *Fie* $-\infty < b < a < \infty$ *arbitrare şi* N *definit de* (65). *Atunci*

(68) *este adevărată dacă are loc Presupunerea* A *şi*

(64) *este adevărată dacă sînt satisfăcute Presupunerile* A şi B.

Dacă $\psi(\xi) \neq 0$ *nu este necesară Presupunerea* A (iii).

Demonstraţie. Punem $D = B_1 + \max(|b|, |a|)$ şi

$$\psi_n = a\psi(\bar{Y}_n). \tag{71}$$

În vederea lui (65) şi folosind (69) se inferă că, dacă pentru anumiţi n, $\bar{Y}_n \in V$ şi $|\psi_n| \geqslant D$, atunci $N \leqslant n$. Distingem două cazuri

$$\psi(\xi) \neq 0 \quad \text{şi} \quad \psi(\xi) = 0.$$

În primul caz presupunem că $\psi(\xi) > 0$ [cazul $\psi(\xi) < 0$ este supus unui tratament analog]. Alegem $0 < \varepsilon < \psi(\xi)$ şi reducem V, dacă este necesar, pentru a asigura că $\psi > \varepsilon$ pe V (acest lucru este posibil deoarece ψ este continuă în ξ). Pentru orice $n > D/\varepsilon$, dacă

$$\bar{Y}_n \in V \text{ atunci } \psi_n > D \text{ astfel ca } N \leqslant n.$$

Fie N' primul $n > D/\varepsilon$ astfel ca $\bar{Y}_n \in V$. Din cele prezentate anterior avem $N \leqslant N'$. Din Presupunerea A(i), $\bar{Y}_n \to \xi$ (aproape peste tot în raport cu F) astfel că eventual $\bar{Y}_n \in V$ (aproape peste tot în raport cu F). Adică

$$P(N' < \infty) = 1$$

şi astfel afortiori

$$P(N < \infty) = 1.$$

Dacă Presupunerea B are loc de asemenea, atunci din Chernoff (1952) sau Wijsman (1968) urmează că

$$P(\bar{Y}_n \in V) < c_1 \rho_1^n \tag{72}$$

pentru $c_1 < \infty$, $0 < \rho_1 < 1$. Deoarece $n > D/\varepsilon$ şi $\bar{Y}_n \in V$ implică $N \leqslant n$, urmează că

$$P(N > n) < c_1 \rho_1^n \text{ pentru toţi } n > D/\varepsilon$$

şi urmează (64).

În cazul $\psi(\xi) = 0$, demonstraţia este lungă şi dificilă. Deci nu o prezentăm aici. Demonstraţia se bazează pe o idee a lui Stein (1946).

Exemplul 4. Fie $X_1, X_2, \ldots$ variabile aleatoare independente şi identic repartizate $N(\mu, \sigma^2)$ μ şi σ^2 necunoscuţi. Ne propunem să verificăm ipoteza

$$H_0 : \sigma = \sigma_0 \text{ faţă de } H_1 : \sigma = \sigma_1$$

unde σ_i sînt daţi şi distincţi (astfel μ este un parametru nedorit).

Scanned with OKEN Scanner

Problema este invariantă la transformarea

$$x_i \to x_i + c (i = 1, 2, \ldots), \mu \to \mu + c, \sigma \to \sigma, -\infty < c < \infty$$

și se obține (Wijsman (1972)) că

$$(73) \qquad S_n = [(2\sigma_0^2)^{-1} - (2\sigma_1^2)^{-1}] \sum_{i=1}^{n} (X_i - \bar{X}_n)^2 + (n-1) \ln (\sigma_0/\sigma_1).$$

În scopul mărginirii exponențiale am multiplicat S_n printr-o constantă nenulă. Atunci putem lua

$$(74) \qquad S_n = \sum_{i=1}^{n} (X_i - \bar{X}_n)^2 - (n-1) d^2$$

unde

$$(75) \qquad d^2 = (\ln \sigma_1 - \ln \sigma_0)/[(2\sigma_0^2)^{-1} - (2\sigma_1^2)^{-1}].$$

Fie F repartiția comună pentru X_i și cu N definit de (65) stabilim (64).

Cazul 1. (F nemărginită). Vom stabili (64) pentru fiecare $-\infty < b < a < \infty$. Vom face aceasta arătînd că există $\varepsilon > 0$ astfel că pentru toți n

$$(76) \qquad P(S_{n+1} > a \mid X_1, \ldots, X_n, b < S_n < a) \geqslant \varepsilon.$$

Bazîndu-ne pe (74) obținem

$$(77) \qquad S_{n+1} - S_n = [n/(n+1)](X_{n+1} - \bar{X}_n)^2 - d^2.$$

Acum, fie $s = a - b$. Atunci, dat $b < S_n < a$, evenimentul $S_{n+1} > a$ este implicat de $S_{n+1} - S_n > s$, adică, folosind (77),

$$(X_{n+1} - \bar{X}_n)^2 > [(n+1)/n] (d^2 + s^2).$$

Aceasta la rîndul ei este implicată de

$$| X_{n+1} - \bar{X}_n | > c \text{ unde } c^2 = 2(d^2 + s^2)$$

Deci membrul stîng al relației (76) este $\geqslant$ decît

$$(78) \qquad P(| X_{n+1} - \bar{X}_n | > c \mid X_1, \ldots, X_n, b < S_n < a).$$

Astfel este suficient să găsim o margine inferioară pozitivă pentru (78). Astfel X_{n+1} este independentă de $(X_1, \ldots, X_n)$, valoarea lui (78) depinzînd de condiționare numai împreună cu $\bar{X}_n$. Mai mult

$$P(| X_{n+1} - \bar{X}_n | > c \mid \bar{X}_n = x) = P(| X_{n+1} - x | > c) = P(| X_1 - x | > c).$$

Scanned with OKEN Scanner

Vom arăta că există $\varepsilon > 0$ astfel încît

(79) $$P(|X_1 - x| > c) \geqslant \varepsilon \text{ pentru toți } -\infty < x < \infty.$$

Deoarece F este nemărginită, există un număr x_0 astfel încît

$$P(X_1 < x_0 - c) = \varepsilon_1 > 0 \text{ și } P(X_1 > x_0 + c) = \varepsilon_2 > 0.$$

Deoarece $P(X_1 < x - c)$ este o funcție nedescrescătoare de x, $P(|X_1 - x| > c) \geqslant \varepsilon_1$ dacă $x > x_0$. Analog, $P(|X_1 - x| > c) \geqslant \varepsilon_2$ dacă $x \leqslant x_0$. Atunci luînd $\varepsilon = \min(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ obținem (79).

Cazul 2. (F mărginită). În acest caz se va folosi teorema 10. Funcția $s(.)$ în (66) este aleasă :

$$s(x) = (x^2, x)', \quad -\infty < x < \infty \text{ (astfel } k = 2)$$

astfel că $Y_i = (X_i^2, X_i)'$. Acum alegem funcția ψ în R_2 ca

(80) $$\psi(x_1, x_2) = x_1 - x_1^2 - d^2$$

unde d^2 este dat de (75). Atunci

(81) $$n\,\psi(\bar{Y}_n) = \sum_1^n (X_i - \bar{X}_n)^2 - nd^2$$

și comparînd-o cu (74) observăm că Presupunerea A (ii) este satisfăcută cu $B_1 = d^2$, neavînd importanță ce vecinătate V este aleasă. Mărginirea lui F garantează validitatea Presupunerii B. Vom scrie

$$M(X_1 | F) = \mu \text{ și } M(X_1^2 | F) = \sigma^2 + \mu^2.$$

Atunci

$$\xi = M(Y_1 | F) = (\sigma^2 + \mu^2, \mu)'.$$

Din forma lui S_n dată de (75) urmează că toate repartițiile F obținute prin translație produc aceeași comportare stocastică a lui $\{S_n\}$. Deci, este suficient să presupunem că $\mu = 0$ astfel ca $\xi = (\sigma^2, 0)'$. Înlocuim x prin ξ în (80) obținem

$$\psi(\xi) = \sigma^2 - d^2$$

astfel că $\psi(\xi) \neq 0$ dacă $d \neq \sigma$. Pentru orice astfel de F, din teorema 10 tragem concluzia că are loc (64).

Acum presupunem că F este astfel ca $\sigma = d$ astfel că $\psi(\xi) = 0$. Pentru a obține (64) este necesară Presupunerea A(iii). Din (80) calculăm grad $\psi = (1, -2x_2)'$ astfel că $\Delta = (1, 0)'$ și $\Delta'(Y_1 - \xi) = X_1^2 - \sigma^2$. Deci, dacă $P(X_1^2 - d^2 = 0) < 1$, este satisfăcută Presupunerea A (iii) și obținem (64). Pe de altă parte, dacă $P(X_1^2 - d^2 = 0) = 1$, atunci pentru ca μ să fie egal cu zero trebuie să avem $P(X_1 = \pm d) = \frac{1}{2}$. În acest caz

Wijsman (1972) (pentru $d = 1$, însă extensia la d arbitrar este uşoară) a arătat că (64) nu este satisfăcută pentru margini de stopare suficient de mari. Pe de altă parte (68) este adevărată. Astfel, pentru fiecare F exceptînd

$$P(X_1 = \mu \pm d) = \frac{1}{2} \text{ pentru } -\infty < \mu < \infty \tag{82}$$

cu d dat de (75), N este mărginită exponenţial. Repartiţiile definite de (82) sînt obstructive, însă pentru fiecare astfel de F, avem $P(N < \infty) = 1$.

Exemplul 5 Fie $X_1, X_2, \ldots$ variabile aleatoare independent identic repartizate $N(\mu, \sigma^2)$ cu μ şi σ^2 necunoscuţi. Fie $\gamma = \mu/\sigma$ şi verificăm ipoteza

$$H_0 : \gamma = \gamma_0 \text{ faţă de } H_1 : \gamma = \gamma_1,$$

unde γ_0 şi γ_1 sînt două numere finite distincte. Problema este invariantă la transformările

$$X_i \to cX_i (i = 1, 2, \ldots), \ \mu \to \mu c, \ \sigma \to \sigma c, \ c > 0.$$

Astfel, grupul G al transformărilor invariante constă în realii pozitivi c. Ca măsură invariantă pe G, vom lua

$$\nu_G(dg) = dc/c.$$

Punem $\theta = (\mu, \sigma)$. Atunci orbita lui θ sub G este

$$G\theta = \{g\theta, \ g \in G\} = \{(c\mu, \ c\sigma) : c > 0\}.$$

În particular luînd $\theta_j = (\gamma_{j,1})$, $j = 0, 1$, cele două orbite $G\theta_j$ sînt două ipoteze compuse ce trebuie verificate. După Wijsman (1972) putem reprezenta raportul probabilităţilor la pasul n ca

$$S_n = I_n(\theta_1)/I_n(\theta_0), \tag{83}$$

unde

$$I_n(\theta) = \int \prod_{i=1}^{n} f(X_i, \ g\theta) \ \nu_G(dg) \tag{84}$$

şi $f(x\,;\ \theta)$ este densitatea lui X_1 în raport cu măsura Lebesque şi este $n(x\,;\ \mu, \ \sigma^2)$.

(84) depinde de X_i numai prin $\sum_1^n X_i^2$ şi $\sum_1^n X_i$. Astfel în (58) luăm s ca în exemplul 4.

$$s(x) = (x^2, \ x)' \text{ astfel ca } Y_1 = (X_1^2, \ X_1)'.$$

După ce punem $g\theta = (\gamma c, \ c)$, $\nu_G(dg) = dc/c$ şi facem schimbarea $c = 1/t$, (84) se scrie ca

$$I_n(\theta) = \int_0^\infty \exp\,[nr(t, \ \bar{Y}_n\,;\ \gamma)]\, t^{-1}\, dt, \tag{85}$$

Scanned with OKEN Scanner

unde

$$r(t, x; \gamma) = \frac{1}{2} x_1 t^2 + \gamma x_2 t + \ln t - \frac{1}{2}\gamma^2 - \frac{1}{2}\ln 2\pi \tag{86}$$

și $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$. Pentru γ, $x_1 > 0$ fixați și x_2, r ca funcție de t are un maxim unic t_m unde

$$t_m = x_1^{-1/2}\alpha(\gamma x_2 x_1^{-1/2}) \tag{87}$$

unde

$$\alpha(u) = \frac{1}{2}[u + (u^2 + 4)^{1/2}], \quad -\infty < u < \infty. \tag{88}$$

Punem

$$\zeta(x; \gamma) = \max_{t>0} r(t, x; \gamma) = r(t_m x; \gamma) =$$
$$= \beta(\gamma x_2 x_1^{-1/2}) - \frac{1}{2}\{\ln x_1 + \gamma^2 + \ln(2\pi) + 1\} \tag{89}$$

unde

$$\beta(u) = \frac{1}{2} u\alpha(u) + \ln \alpha(u). \tag{90}$$

Se poate arăta (Wijsman (1971)) că, pentru $n \to \infty$,

$$(2\pi)^{-1/2} n^{1/2} (x_1 + t_m^2)^{1/2} t_m \, e^{-n\zeta(x, \gamma)} \int_0^\infty e^{nr(t, x; \gamma)} t^{-1} \, dt = 1. \tag{91}$$

Astfel S_n este echivalent cu

$$\zeta(x; \gamma_1) - \zeta(x; \gamma_0) =$$
$$= \beta(\gamma_1 x_2 x_1^{-1/2}) - \beta(\gamma_0 x_2 x_1^{-1/2}) - \frac{1}{2}(\gamma_1^2 - \gamma_0^2). \tag{92}$$

Se poate arăta (a se vedea Wijsman (1971) pentru detaliu) că Presupunerile A și B ale teoremei 10 sînt atinse.

Astfel se poate trage concluzia că testul t secvențial cînd X_1 are repartiția F, timpul de oprire N, este mărginit exponențial dacă X_1^2 are funcția generatoare de momente finită și dacă F nu este una dintre repartițiile definite de

$$P\{X_1 = (\sigma^2 + \mu^2)^{1/2}\mu^{-1}((\sigma^2 + \mu^2)^{1/2} \pm \sigma)\} =$$
$$= \frac{1}{2}[1 \pm \sigma(\sigma^2 + \mu^2)^{-1/2}], \quad \sigma > 0, \ \mu \neq 0. \tag{93}$$

Scanned with OKEN Scanner

Dacă nu cerem ca X_1^2 să aibe funcţia generatoare de momente finită însă o valoare medie finită, atunci $P(N < \infty) = 1$ dacă F nu satisface (93).

Berk (1970) printr-o metodă diferită obţine aceleaşi concluzii cu excepţia că presupunerile sale necesită excluderea tuturor repartiţiilor de forma (93).

Wijsman (1971) afirmă că repartiţiile cu un parametru date de (93) sînt într-adevăr obstructive pentru testul t secvenţial şi că ele sînt singurele.

Wijsman (1971) remarcă că şi testului F secvenţial i se poate aplica acelaşi tratament ca testului t secvenţial.

Wijsman (1977) consideră numai testele secvenţiale a căror regulă de stopare este determinată de şirul de statistici $L_1, L_2, \ldots, L_n$ depinzînd numai de $(X_1, \ldots, X_n)$ şi o pereche de margini de stopare $-\infty < l_1 < l_2 < \infty$ astfel că N este primul întreg $n \geqslant 1$ pentru care

$$l_1 < L_n < l_2 \tag{94}$$

nu este satisfăcută.

De asemenea presupune că marginile de stopare din (94) satisface $-l_1 = l_2$ şi notează valoare comună prin $d/2$. Astfel N va fi definit ca

(95) N este cel mai mic întreg $n \geqslant 1$ astfel încît $|L_n| \geqslant d/2$.

Fie A_n evenimentul

$$A_n = [N > n] \tag{96}$$

Wijsman (1977) foloseşte notaţia $X^n = (X_1, X_2, \ldots . X_n)$ şi obţine în acest cadru rezultate privind marginirea exponenţială a timpului de oprire.

TEOREMA 11. (Wijsman (1977)) *Fie, X, $X_1, X_2, \ldots$ variabile i.i.r. cu valori în $\mathfrak{X}$ şi repartiţia comună P. Fie $L_n = L_n(X^n)$ un şir de statistici cu valori reale şi $U_n = U_n(X^n)$ un şir de statistici cu valori în spaţiul $\mathfrak{U}$. Fie N şi A_n definite de (95) şi (96). Presupunem că există : o submulţime măsurabilă T a lui $\mathfrak{U}$, o funcţie măsurabilă $f : \mathfrak{X} \times T \to R$, o submulţime măsurabilă S a lui $\mathfrak{X} \times T$, numerele reale $p > 0$, $\delta > 0$, $\varepsilon > 0$, şi pentru fiecare întreg $r > 0$ un şir de evenimente C_n, cu C_n depinzînd numai de X^n, astfel că sînt satisfăcute următoarele condiţii :*

i) $P(X \in S_u) > p \; (\forall) \; u \in T$;

ii) *dacă $u \in T$, atunci $f(x, u) > \delta \; (\forall) \; x \in S_u$ sau $f(x, u) < -\delta \; (\forall) \; x \in S_u$, submulţime a spaţiului $\mathfrak{X}$*

iii) *$A_n C_n^c$ este mărginită exponenţial* ;

iiii) *pentru $n = 1, 2, \ldots$, evenimentul $A_n C_n$ implică evenimentul $[U_n \in T]$ şi implică evenimentul*

$$\left[\left| L_{n+r}(X^n, y^r) - L_n(X^n) - \sum_{j=1}^{r} f(y_j, U_n) \right| < \varepsilon \right]$$

oricare ar fi $y_j \in S_{U_n}$, $j = 1, \ldots, r$.

Atunci N este mărginită exponenţial

Scanned with OKEN Scanner

COROLARUL. (Wijsman (1977)). *Fie* $X, X_1, X_2, \ldots$ *variabilele i.i.r. cu valori în* $\mathfrak{X}$ *și repartiția comună* P. *Fie* $L_n = L_n(X^n)$ *un șir de statistici cu valori reale și* N *și* A_n *definite de* (95) *și* (96). *Presupunem că există o funcție măsurabilă* $f : \mathfrak{X} \to R$, *o submulțime măsurabilă* S *a lui* $\mathfrak{X}$ *și* $\delta > 0$ *astfel ca* $P(X \in S) > 0$ *și* $|f(x)| > \delta$ *pentru fiecare* $x \in S$. *Presupunem că pentru* $\varepsilon > 0$ *și fiecare întreg pozitiv* r *există un șir de evenimente* C_n (*ce depind de* r) *cu*

$$C_n \subset \left[\sup \left\{ \left| L_{n+r}(X^n, y^r) - L_n - \sum_1^r f(y_j) \right| : y_1, \ldots, y_r \in S \right\} < \varepsilon \right]$$

astfel ca $A_n C_n^c$ *este mărginit exponențial. Atunci* N *este mărginit exponențial.*

COROLAR. (Wijsman (1977)) *Fie* $X, X_1, X_2, \ldots$ *variabile aleatoare i.i.r. cu valori în* $\mathfrak{X}$ *și repartiția comună* P. *Fie* $L_n = L_n(X^n)$ *un șir de statistici cu valori reale și fie* N *definit de* (95). *Presupunem că există o funcție măsurabilă* $f : \mathfrak{X} \to R$, *o submulțime măsurabilă* S *a lui* $\mathfrak{X}$ *cu* $P(X \in S) > 0$ *și* $f(x) \neq 0$ *oricare ar fi* $x \in S$, *și o mulțime* $S_0 \supset S$, *astfel ca pentru orice întreg pozitiv* r *funcția*

$$(97) \qquad K_n = \sup \left\{ |L_{n+r}(X^n, y^r) - L_n - \sum_1^r f(y_j)| : y_1, \ldots, y_r \in S_0 \right\}$$

este măsurabilă. Dacă $K_n \xrightarrow[\exp]{} 0$, *atunci* N *este mărginit exponențial.*

TEOREMA 12. (Wijsman (1977)). *Fie* $X, X_1, X_2, \ldots$ *variabile aleatoare i.i.r cu valori reale într-un spațiu topologic* σ*-compact* $\mathfrak{X}$, *ce posedă o repartiție comună* P. *Pentru* $n = 1, 2, \ldots$ *fie* $L_n = L_n(X^n)$, $U_n = U_0(X^n)$ *și* $V_n = V_n(X^n)$ *statistici cu valori în* R, $\mathfrak{U}$ *și respectiv* $\mathfrak{V}$, *cu* $\mathfrak{U}$ *și* $\mathfrak{V}$ *spații topologice. Fie* N *și* A_n *definit de* (95) *și* (96). *Presupunem că există o submulțime compactă* T *a lui* $\mathfrak{U}$, *o funcție* f *pe* $\mathfrak{X} \times T$ *cu valori reale continuă, un punct* $v_0 \in \mathfrak{V}$, *și pentru* $r = 1, 2, \ldots$ *o funcție cu valori reale măsurabilă* l_r *pe* $\mathfrak{X}^r \times \mathfrak{U} \times \mathfrak{V}$ *care este continuă în* (y^r, u, v_0) *pentru fiecare* $y^r \in \mathfrak{X}^r$, $u \in T$, *astfel că sînt satisfăcute următoarele condiții :*

i) $A_n \cap [U_n \notin T]$ *este mărginită exponențial ;*

ii) $A_n \cap [V_n \notin G]$ *este mărginită exponențial ori care ar fi vecinătatea* G *a lui* v_0.

iii) $L_{n+r} - L_n = l_r(X_{n+1}, \ldots, X_{n+r}, U_n, V_n)$ *pe* $A_n \cap [U_n \in T]$

iv) $l_r(y^r, u, v_0) = \sum_1^r f(y_j, u)$ $y^r \in \mathfrak{X}^r$, $u \in T$;

v) $P\{f(X, u) = 0\} < 1$ $(\forall)$ $u \in T$.

Atunci N *este mărginit exponențial.*

TEOREMA 13. (Wijsman (1977)). *Dacă* N *este definit de* (95) *și* $L_n/n \xrightarrow[\exp]{} a \neq 0$; *atunci* N *este mărginit exponențial.*

Scanned with OKEN Scanner

Următoarea propoziție dă condiții suficiente pentru ca N să fie mărginit exponențial dacă $\|X\|$ are funcția generatoare de momente finită.

PROPOZIȚIA (Wijsman (1977)). *Fie X, X_1, X_2 ... vectori aleatori i.i.r cu valori în R^k (k un întreg pozitiv). Fie P repartiția lui X astfel încît $M \exp(t\|X\|) < \infty$ pentru $t > 0$ și fie $MX = \xi$. Fie $\{L_n\}$ un șir de statistici și fie N definită de (95). Presupunem că există o vecinătate W a lui ξ și o funcție cu valori reale ϕ pe W ce posedă un gradient continuu, astfel ca*

$$|L_n - n\phi(\bar{X}_n)| < B \text{ dacă } \bar{X}_n \in W (n = 1, 2, \ldots) \tag{98}$$

pentru $B < \infty$. Fie $\Delta = \operatorname{grad} \Phi$ evaluat în ξ. Atunci, dacă

$$P\{\Delta'(X - \xi) + \phi(\xi) = 0\} < 1, \tag{99}$$

N este mărginit exponențial.

Observații. i) Dacă $\phi(\xi) \neq 0$, atunci pentru a obține aceeași concluzie trebuie numai ca ϕ să fie continuă în ξ. Aceasta urmează din teorema 13 după ce observăm că $\bar{X}_n \xrightarrow[\text{exp}]{} \xi$ implică că $L_n/n \xrightarrow[\text{exp}]{} \phi(\xi)$.

ii) Dacă nu este satisfăcută (99), adică $f(X) = \Delta'(X - \xi) + \phi(\xi) = 0$ cu probabilitatea unu, atunci luînd media în ambii membrii ai acestei ecuații găsim $\phi(\xi) = 0$ și prin urmare $P\{\Delta'(X - \xi) = 0\} = 1$. Dacă, în plus, ϕ are derivata de ordinul 2 continuă în vecinătatea lui ξ, atunci P este obstructivă (Wijsman (1972) b) (Pentru acest rezultat singura condiție asupra lui P este ca $M\|X\|^2$ să fie finită).

Wijsman (1977) dă aplicații ale acestor rezultate la testul F secvențial pentru ipoteze liniare. O a doua aplicație se referă la testul secvențial al lui Wilcoxon în cazul a două selecții pentru egalitatea repartițiilor variabilelor aleatoare X și Y.

Din (62) un șir $\{V_n\}$ suficient invariant se obține făcînd mai întîi o reducere maximal invariantă pe R_n pentru fiecare n, și atunci făcînd o reducere suficientă pentru fieccare n pe spațiul de selecție a statisticii invariant maximal. Totuși în problemele practice determinarea funcției $f_{V_n}(u; \lambda)$ poate fi complicată. În multe cazuri, poate fi mult mai ușor să facem mai întîi o reducere suficientă pe R_n și apoi să facem o reducere maximală invariantă pe spațiul de selecție al statisticii suficiente. Problema care se pune este în ce condiții metoda alternativă este echivalentă cu prima metodă.

DEFINIȚIA 5. Fie $T_n = T_n(X_n)$ un șir suficient pentru familia de repartiții $\{F_n(X_n; \theta) : \theta \in \Theta\}$ dată și fie $F_{T_n}(t; \theta)$ funcția de repartiție a statisticii T_n (care poate fi și un vector). Vom spune că grupul G sub care familia dată rămîne invariantă induce un grup G_t de transformări (biunivoce) pe spațiul de selecție al statisticii T_n dacă pentru fiecare $g \in G$,

$$T_n(\mathbf{x}_n) = T_n(\mathbf{x}'_n) \text{ implică că } T_n(g\mathbf{x}_n) = T_n(g\mathbf{x}'_n).$$

Cu alte cuvinte, pentru fiecare $g \in G$, există o transformare $g_t \in G_t$ pe spațiul de selecție a lui T_n astfel ca

$$g_t t = T_n(g\mathbf{x}_n) \text{ pentru toți } \mathbf{x}_n \in R_n \text{ ce satisfac } T_n(\mathbf{x}_n) = t.$$

Scanned with OKEN Scanner

Notăm că g_t poate să depindă de n. În cele ce urmează presupunem că există un grup G_t indus. Fie $U_n = U_n(T_n)$ invariantul maximal sub G_t pe spaţiul de selecţie al statisticii T_n. Ca o funcţie de $\mathbf{x}_n$ pe R_n vom scrie

$$U_n(T_n(\mathbf{x}_n)) = V_n(\mathbf{x}_n) \text{ pentru fiecare } n \text{ şi toţi } \mathbf{x}_n \in R_n.$$

Din definiţia lui G_t urmează că V_n este invariant pe R_n sub G pentru fiecare n şi că U_n şi V_n sînt identic repartizate ca $F_{V_n}(v, \lambda)$ unde $\lambda = \lambda(0)$ este invariantul maximal pe Θ sub $\bar{G}$. Reducerea datelor $\mathbf{x}_n$ la datele suficiente T_n şi de acolo la datele invariante V_n pentru datele suficiente poate fi exprimată simbolic ca

$$(100) \quad \{F_n(\mathbf{x}_n; \theta), \theta \in \Theta\} \overset{\text{suf}}{\to} \{F_{T_n}(t; \theta), \theta \in \Theta\} \to \{F_{V_n}(v; \lambda), \lambda \in \Lambda\}.$$

Următoarele teoreme arată în ce condiţii V_n este într-adevăr o statistică suficient invariantă sub G.

TEOREMA 14. (Stein) *Fie $T_n = T_n(X_n)$ o statistică k-dimensională suficientă pentru familia $\{F_n(\mathbf{x}_n; \theta), \theta \in \Theta\}$ şi fie $U_n(T_n)$ invariantul maximal sub G_t, grupul indus pe spaţiul de selecţie al statisticii T_n de G care lasă funcţia dată invariantă. Dacă T_n este o variabilă aleatoare discretă, atunci*

$$V_n = V_n(X_n) = U_n(T_n(X_n))$$

este suficientă invariantă pentru familia dată sub G.

Demonstraţie. Deoarece T_n este suficientă

$$P(X_n \in A \mid T_n = t)$$

nu implică θ pentru orice $A \in R_n$ şi pentru orice t care satisface

$$P(T_n = t \mid \theta) > 0.$$

Deci, dacă A este orice mulţime invariantă sub G, avem,

$$P(X_n \in A \mid T_n = t) = \frac{P(X_n \in A, T_n = t \mid \theta)}{P(T_n = t \mid \theta)} =$$

$$(101) \qquad = \frac{P(X_n \in gA, T_n = g_t t \mid \bar{g}\theta)}{P(T_n = g_t t \mid \bar{g}\theta)} =$$

$$= P(X_n \in gA \mid T_n = g_t t, \bar{g}\theta) =$$

$$= P(X_n \in A \mid T_n = g_t t),$$

pentru fiecare $g \in G$, $\theta \in \Theta$ şi t satisfăcînd $P(T_n = t \mid \theta) > 0$.

Acum

$$P(X_n \in A \mid V_n = v, \theta) = \sum_t P(T_n = t \mid V_n = v, \theta)\, P(X_n \in A \mid T_n = t, V_n = v),$$

Scanned with OKEN Scanner

suma extinzîndu-se asupra acelor valori ale lui t care satisfac $V_n(t) = v$. Deoarece $U_n(T_n)$ este invariant maximal, valorile lui t care intră în sumă trebuie să fie de forma $g_t t_0$ unde t_0 este fixat însă g_t variază în G_t. Deci, în al doilea pas, folosind (101)

$$P(X_n \in A \mid V_n = v,\ \theta) =$$

$$= \sum_{g_t} P(T_n = g_t\, t_0 \mid V_n = v, \theta)\ P(X_n \in A \mid T_n = g_t\, t_0) =$$

$$= P(X_n \in A \mid T_n = t_0) \sum_{g_t} P(T_n = g_t\, t_0 \mid V_n = v,\ \theta) =$$

$$= P(X_n \in A \mid T_n = t_0)$$

care nu implică θ. Teorema este demonstrată.

Dacă T_n este continuă sau de tip mixt şi (101) are loc atunci urmează aserţiunea teoremei 11 deoarece

$$P(X_n \in A \mid V_n = v,\ \theta) = M\{P(X_n \in A \mid T_n = t_0) \mid V_n = v\,;\theta\} =$$

$$= P\ (X_n \in A \mid T_n = t_0)$$

unde media este în raport cu T_n condiţionată de $U_n\,(T_n) = v$. Hall, Wijsman, Ghosh (1965) au extins teorema 11 la cazul cînd T_n nu este discretă.

TEOREMA 15. (Hall, Wijsman, Ghosh (1965)). *Dacă T_n nu este discretă, teorema* 11 *are loc dacă este satisfăcută una dintre următoarele trei presupuneri*

Presupunerea I. Fiecare funcţie invariantă sub G_T este echivalentă cu o funcţie invariantă sub G_T pe spaţiul de selecţie al statisticii T_n.

Presupunerea II. Pentru fiecare $g \in G$ există o probabilitate condiţionată invariantă

$$P(X_n \in A \mid T_n = t) = P(X_n \in gA \mid T_n = g_t t),$$

pentru fiecare mulţime invariantă $A \in R_n$ şi pentru toţi t.

Presupunerea III. X_n este un vector aleator continuu a cărui densitate $f_n\,(X_n, \theta)$ poate fi factorizată în

$$J_n\,(T_n\,(X_n);\ \theta)\ K_n\,(X_n)$$

aproape peste tot în R_n astfel încît pentru fiecare $g \in G$ şi $X_n \in R_n - A_0$ unde A_0 este o mulţime invariantă ce satisface $P(X_n \in A_0 \mid \theta) = 0$ pentru toţi $\theta \in \Theta$ şi $T_n\,(X_n) \neq T_n\,(X_n')$ dacă $X_n \in A_0$ însă $X_n' \in R_n - A_0$, avem

i) *transformarea $X_n \to gX_n$ continuă derivabilă cu Jacobianul depinzînd de X_n numai împreună cu $T_n\,(X_n)$*

ii) *$T_n\,(X_n)$ continuă derivabilă cu matricea $D(X_n)$ al cărui element (i, j) este derivata componentei j a lui $T_n(X_n)$ în raport cu x_i de rang $k < n$, şi*

Scanned with OKEN Scanner

iii) $K_n(gX_n)/K_n(X_n)$ *depinde de* X_n *numai împreună cu* $T_n(X_n)$ *unde* K *este o funcție cu valori reale.*

Dacă are loc teorema 11 pentru fiecare n, transitivitatea lui $\{T_n\}$ pentru $\{F_n(\mathbf{x}_n\,;\ \theta) : \theta \in \Theta\}$ implică transitivitatea lui $\{V_n\}$ pentru $\{F_{V_n}(v\,;\ \lambda), \in \Lambda\}$. În consecință orice procedeu invariant pentru λ este esențial bazat numai pe V_n la pasul n cu condiția

$$(102) \qquad P(T_{n+1} \leqslant t \mid X_n = \mathbf{x}_n,\ \theta) = P(T_{n+1} \leqslant t \mid T_n = t_n(\mathbf{x}_n), \theta)$$

pentru fiecare n, θ, $\mathbf{x}_n$ și t. (102) se verifică mult mai ușor decît (63). Dacă $f_{T_n}(v\,;\lambda)$ poate fi obținută nu se folosește teorema lui Stein. Wijsman (1967 a) dă o metodă generală pentru determinarea funcției $f_{V_n}(v\,;\lambda)$ din $f_{T_n}(t\,;\ \theta)$. Următoarele exemple ilustrează metoda alternativă.

Exemplul 6. Presupunem că $\{X_i\}$ sînt variabile aleatoare independente identic repartizate $N(\mu,\ \sigma^2)$. Fie $\theta = (\mu,\ \sigma)$ necunoscut. Fie G grupul translațiilor pe R_n care induce $\bar{G}$ pe Θ astfel că

$$\bar{g}\theta = (\mu + c,\ \sigma).$$

Urmează că $T_n(X_n) = (\bar{X}_n,\ s_n^2)$ este suficientă pentru θ pentru fiecare $n \geqslant 1$. Grupul G induce grupul G_t pe

$$(-\infty < \bar{x}_n < \infty,\ s_n^2 \geqslant 0)$$

pentru fiecare $n \geqslant 1$ astfel că

$$g_t\, t = (\bar{x}_n + c,\ s_n^2),\ -\infty < c < \infty,$$

și invariantul maximal sub G este

$$U_n(T_n) = (n-1)\,s_n^2 \quad \text{pentru} \quad n > 1.$$

Atunci

$$V_n(X_n) = U_n(T_n(X_n)) = \sum_1^n (X_i - \bar{X}_n)^2$$

este invariant pe R_n sub G pentru fiecare $n > 1$. Dacă $n = 2$ se verifică direct că

$$V_2(X_2) = (X_1 - X_2)^2$$

este suficientă pentru densitatea invariantului maximal (pe R_2 sub G). $U_2(X_2) = (X_1 - X_2)$. Pentru fiecare $n > 2$ are loc Presupunerea III a teoremei 12. Deci $\{(n-1)s_n^2\}$ este un șir de statistici suficiente invariante pentru familia dată. Deoarece pentru fiecare $n > 1$,

$$(n-1)s_n^2 \sim \chi^2(n-1),$$

Scanned with OKEN Scanner

se poate obține $f_{V_n}(v\,;\,\sigma)$ și T.S.R.P. invariant pentru

$$\sigma = \sigma_0 \text{ față de } \sigma = \sigma_1$$

este dat de:

la pasul $n (n = 1, 2, \ldots)$ se continuă experimentul dacă

$$\ln B < S_n < \ln A,\ S_n = (n-1)\ln(\sigma_1/\sigma_0) + \frac{1}{2}(\sigma_0^{-2} - \sigma_1^{-2})V_n.$$

De asemenea, deoarece

$$\bar{x}_{n+1} = (n\bar{x}_n + x_{n+1})/(n+1)$$

și

$$s_{n+1}^2 = \frac{n-1}{n}\left[s_n^2 + \frac{n(\bar{x}_n - x_{n+1})^2}{n^2-1}\right],$$

se poate arăta că $\{(n-1)s_n^2\}$ satisface (96). Astfel $\{(n-1)s_n^2\}$ este un șir tranzitiv pentru $\{F_{V_n}(v\,;\,\sigma)\,;\ \sigma > 0\}$.

Exemplul 7. Pentru fiecare $n > 1$, fie $f_n(x_1, \ldots, x_n\,;\,\mu, \delta) = \mu^{n\delta}(x_1 \ldots x_n)^{\delta-1}\exp[-(\mu x_n)^\delta/\delta]$ pentru $0 < x_1 < \ldots < x_n$, unde $\theta = (\mu, \delta)$ este necunoscut și $\Theta = \{\mu > 0,\ \delta > 0\}$ densitatea de repartiție comună a variabilelor $X_1, \ldots, X_n$. Acest model apare cînd evenimentele se produc aleator la timpul x cu o *rată* $r(x) = \mu^\delta x^{\delta-1}$ și X_i reprezintă momentul aleator al producerii i. Familia dată rămîne invariantă sub grupul G al schimbărilor pozitive de scara și $g\theta = (\mu/c, \delta)$, $c > 0$. Urmează că

$$T_n(X_n) = (X_1, \ldots, X_n, X_n^n)$$

este suficientă pentru θ pentru fiecare $n \geqslant 1$. Grupul G induce grupul G_t pe $(0 < x_1 < \ldots < x_n \leqslant x_n^n)$ astfel ca

$$g_t t = (c^n x_1 \ldots x_n,\ c^n x^n),\ c > 0$$

și un invariant maximal sub G_t este

$$U_n(T_n) = X_1 \ldots X_n / X_n^n \text{ pentru fiecare } n > 1.$$

Atunci $V_n(X_n) = X_1 \ldots X_n / X_n^n$ este invariant pe R_n sub G. Pentru fiecare $n > 2$, are loc Presupunerea III a teoremei 12. Deci $\{X_1 \ldots X_n / X_n^n\}$ este un șir de statistici suficiente invariante pentru $f_n(x_1, \ldots, x_n\,;\,\mu, \delta)$ și pentru fiecare $n > 1$,

$$-2\delta \ln V_n(X_n) \sim \chi^2([2(n-1)].$$

Astfel T.S.R.P. invariant pentru

$$\delta = \delta_0 \text{ față de } \delta = \delta_1$$

este dat de

la pasul n se continuă experimentul dacă

$$\ln B < (n-1)\ln(\delta_1/\delta_0) + (\delta_1 - \delta_0)\ln V_n < \ln A,\ n = 1, 2, \ldots$$

Scanned with OKEN Scanner

Observație. T.S.R.P. invariant și mai general, principiul invarianței nu se aplică la multe probleme de decizie interesante [în special cînd $\{X_i\}$ sînt discrete] privind un parametru real în prezența unui sau mai multor parametrii nedoriți. De exemplu, fie

$$f(x, y; p_x, p_y) = p_x^x(1 - p_x)^{1-x} p_y^y (1 - p_y)^{1-y}, \; x, y = 0,1$$

și fie $\psi(p_x,p_y) = \ln [p_x(1 - p_y)/p_y (1 - p_x)]$. Atunci nu există nici o transformare care să lase f și ψ invariante, astfel că considerațiile de invarianță nu se aplică în verificarea ipotezelor privind ψ.

6.4. Proprietăți asimptotice ale T.S.R.P. invariant

Fie H_0 și H_1 două ipoteze compuse invariante față de șirul de date $X_1, X_2, \ldots$ independente și identic repartizate, amîndouă generate de același grup G. G este grupul transformărilor biunivoce bimăsurabile ce acționează pe domeniul lui X și sub H_i, repartiția lui X aparținînd la $\mathfrak{P}_i = GP_i$, $i = 0,1$ (P_i poate fi orice repartiție în $\mathfrak{P}_i$.) Pentru considerațiile următoare fie $\mathfrak{T}_n$ submulțimile G-invariante ale lui $\mathfrak{F}_n = \mathfrak{B}_n(X_1, \ldots X_n)$, și anume cîmpul Borelian indus de $X_1, \ldots, X_n$. Pentru $P_i \in \mathfrak{P}_i$, fie P_{in} măsura produs indusă pe $\mathfrak{F}_n$ și Q_{in} restricția lui P_{in} la $\mathfrak{T}_n$. (Deoarece G generează pe $\mathfrak{P}_i$, fiecare repartiție din $\mathfrak{P}_i$ este dată de același Q_{in}). Presupunem că există P_i în $\mathfrak{P}_i$, $i = 0,1$ astfel că $P_{1n} = P_{0n}$ pentru toți n. Atunci raportul de verosimilități sub H_0 și H_1 a G-invariantului maximal pentru $(X_1, \ldots, X_n)$ este

$$\Lambda_n = \mathrm{d}Q_{1n}/\mathrm{d}Q_{0n} = M_0(\mathrm{d}P_{1n}/\mathrm{d}P_{0n} \mid \mathfrak{T}_n).$$

Deoarece $\{\Lambda_n\}$ este un șir de rapoarte de verosimilități pe σ-cîmpuri crescătoare ($\mathfrak{T}_n \subset \mathfrak{T}_{n+1}$) un T.S.R.P. pentru H_0 față de H_1 poate fi bazat pe $\{\Lambda_n\}$. Luînd $S_n = \ln\Lambda_n$ se poate folosi T.S.R.P. al lui Wald. Inegalitățile lui Wald pentru probabilitățile erorilor rămîn neschimbate. Fie P repartiția actuală a variabilului X, care nu este în nici o ipoteză. Următorul rezultat nu folosește structura invariantă; astfel se aplică la orice T.S.R.P. care satisface ipotezele.

TEOREMA 16. (Berk (1973)). *Presupunem că* $S_n/n \to \mu \in (0, \infty]$. *Atunci*

$$\text{i)} \quad \lim_{c\to\infty} I_{S_N \geqslant a} = \lim_{c\to\infty} P(S_n \geqslant a) = 1,$$

$$\lim_{c\to\infty} N/a = 1/\mu$$

unde (b, a) *sînt marginile* T.S.R.P. *și* $c = \min(-b, a)$. *Dacă de asemenea pentru* $\delta \in (0, \mu)$, *probabilitățile* $p_n = P(S_n/n < \delta)$ *satisfac*

$$\lim_n np_n = 0 \text{ și } \sum_n p_n < \infty,$$

Scanned with OKEN Scanner

atunci de asemenea

ii) $\lim_{c\to\infty} M(N/a) = 1/\mu$.

Se obţin rezultate analoage dacă $S_n/n \to \mu < 0$.

Demonstraţie. Pentru a demonstra ii) este suficient să arătăm că N/a este uniform integrabilă. Pentru aceasta trebuie să arătăm numai că

$$\sup_{c>1}\{nP(N>na) + \sum_{k>n} P(N>ka)\} = 0(1) \text{ cînd } n\to\infty \tag{103}$$

Este suficient să stabilim (103) cînd a parcurge întregii pozitivi [deoarece N nu depăşeşte timpul de oprire obţinut prin înlocuirea lui a cu $\{a\} = \inf\{n : n \geqslant a\}$]. Pentru orice întreg $n > 1/\delta$, luînd $r = na$, avem

$$P(N>na) \leqslant P(S_r < a) = P(S_r/r < 1/n) \leqslant p_r. \tag{104}$$

Din ipoteze urmează că $d_n = \sup_{k\geqslant n} kp_k \downarrow 0$ cînd $n\to\infty$. Astfel (98) conduce la

$$nP(N>na) < np_r \leqslant d_n \tag{105}$$

şi de asemenea la

$$\sum_{k>n} P(N>ka) \leqslant \sum_{k>r} p_k \leqslant \sum_{k>n} p_k. \tag{106}$$

Acum (105) şi (106) conduce la (103).

TEOREMA 17. (Berk (1973)). *Presupunem că pentru* $i = 0, 1$, $P_i(S_n/n \to \mu_i) = 1$, *unde* $-\infty < \mu_0 < 0 < \mu_1 < \infty$ *şi că pentru* $\delta_i \in (0, |\mu_i|)$,

$$p_n = P_0(S_n/n > -\delta_0) + P_1(S_n/n < \delta_1)$$

satisface

$$\lim_n np_n = 0 \text{ şi } \sum_n p_n < \infty.$$

Presupunem de asemenea că (P_0, P_1) *poate fi ales astfel ca* $M_i|Z| < \infty$, $i = 0, 1$, *unde* $Z = dP_1/dP_0(X)$ *şi că invarianţa şi aproape invarianţa sînt echivalente pentru* $\mathfrak{Q}_i$, $i = 1, 2$. *Atunci*

$$\lim_c (-b)^{-1} \ln \beta^{-1} = \lim_c a^{-1} \ln \alpha^{-1} = 1.$$

Înainte să demonstrăm teorema, stabilim

LEMA 2 (Berk (1973)). *Fie* $\{U_c\}$ *o mulţime de variabile aleatoare nenegative uniform integrabile, toate măsurabile în raport cu* σ *— cîmpul* $\mathfrak{F}$. *Fie* $\{\mathfrak{F}_c\}$ *sistemul similar indexat de sub* σ *— cîmpuri ale cîmpului* $\mathfrak{F}$ *şi fie* $V_c = M(U_c|\mathfrak{F}_c)$. *Atunci* $\{V_c\}$ *este uniform integrabilă.*

Demonstraţie. Deoarece $MV_c = MU_c$, $\sup_c MV_c = \sup_c MU_c = B < \infty$.

Pentru $x > 0$, $\int_{(V_c>x)} V_c = \int_{(V_c>x)} U_c$.

Scanned with OKEN Scanner

Deoarece pentru fiecare c, $P(V_c > x) \leqslant B/x$, urmează că

$$\sup_c \int_{(V_c > x)} V_c = \sup_c \int_{(V_c > x)} U_c \to 0 \text{ cînd } x \to \infty.$$

Demonstrația teoremei 17. Avem :

$$\lim_c \alpha = \lim_c \beta = 0$$

și în fapt

$$\liminf_c (-b_1)^{-1} \ln \beta^{-1} \geqslant 1.$$

De asemenea este adevărată că

$$M_0 S_N^- \geqslant -M_0 S_N \geqslant (1-\alpha) \ln [(1-\alpha)/\beta] + \alpha \ln [/\alpha(1-\beta)] =$$
(107)
$$= \ln \beta^{-1}[1 + 0(1)].$$

Astfel

$$M_0 S_N^- /(-b) \geqslant (-b)^{-1} \ln \beta^{-1}[1 + 0(1)]$$

și teorema va fi demonstrată dacă arătăm că

(108) $$\lim_c M_0 S_N^- /(-b) = 1.$$

Prin ipoteza,

$$P_0(\lim_n S_n/n = \mu_0 < 0) = 1,$$

astfel că

$$P_0(\lim_n S_N^-/n = -\mu_0) = 1.$$

Deoarece $P_0(\lim_c N = \infty) = 1$, $P_0(\lim_c S_N^-/N = -\mu_0) = 1$. După teorema 13 $P_0(\lim_c N/(-b) = -1/\mu_0) = 1$ și deci

(109) $$P_0(\lim_c S_N^{-1}/(-b) = 1) = 1.$$

În baza lui (109), pentru a stabili (108) trebuie să arătăm că $S_N^-/(-b)$ este uniform integrabilă.

Fie $\mathcal{S}_n \subset \mathcal{F}$ σ — cîmpul suficient al tuturor mulțimilor invariante la permutarea lui $(X_1, \ldots, X_n)$. Dacă X este cu valori reale $\mathcal{S}_n$ este generat de statisticile de ordine obținute din $(X_1, \ldots, X_n)$. Fie $\mathcal{J}_n = \mathcal{F}_n \cap \mathcal{S}_n$. Din teorema 3.2 (Hall, Wijsman, Ghosh (1965)) urmează că sub orice $P_0 \in \mathcal{P}_0$, $\mathcal{F}_n$ și $\mathcal{S}_n$ sînt independente condiționat dat $\mathcal{J}_n$.

Scanned with OKEN Scanner

Deoarece $R_n = dP_{1n}/dP_{0n} = \exp\left\{\sum_1^n Z_j\right\}$ este simetrică în $(X_1, \ldots, X_n)$, și $\Lambda_n = M_0(R_n \mid \mathcal{T}_n)$ va fi simetrică în $(X_1, \ldots, X_n)$. Astfel $\Lambda_n = M_0(R_n \mid \mathcal{J}_n)$. Atunci avem :

$$S_n = \ln \Lambda_n \geqslant M_0(\ln R_n \mid \mathcal{J}_n) = M_0\left(\sum_1^n Z_j \mid \mathcal{J}_n\right) = nM_0(Z_1 \mid \mathcal{J}_n).$$

(Ultima egalitate urmează din simetrie $M_0(Z_j \mid \mathcal{J}_n) = M_0(Z_1 \mid \mathcal{J}_n)$, $j = 1, \ldots, n$). Astfel

$$S_n^- \leqslant n[M_0(Z_1 \mid \mathcal{J}_n)]^- \leqslant nM_0(Z_n^- \mid \mathcal{J}_n) = M_0(s_n \mid \mathcal{J}_n), \tag{110}$$

unde $s_n = Z_1^- + \ldots + Z_n^-$. Luăm

$$V_n = M_0(Z_1^- \mid \mathcal{J}_n) = M_0(s_n/n \mid \mathcal{J}_n),$$

$S_n^- \leqslant nV_n$ astfel că

$$S_n^- \leqslant NV_N. \tag{111}$$

Completăm demonstrația arătînd că $NV_n/(-b)$ este uniform integrabilă.

Fie $\mathcal{J}_n = \{\bigcup_n A_n(N = n) : A_n \in \mathcal{J}_n\} \cdot \mathcal{J}_N$ este σ — cîmpul de stopare pentru șirul $\{\mathcal{J}_n\}$. Arătăm că

$$NV_N = M_0(s_N \mid \mathcal{J}_N). \tag{112}$$

Din propoziția 2.2. (Berk (1969)) obținem

$$M_0(s_N \mid \mathcal{J}_N) = \sum_n \{M_0(s_N I_{(N=n)} \mid \mathcal{J}_n)/P_0(N = n \mid \mathcal{J}_n)\} I_{(N=n)} =$$

$$= \sum_n M_0(s_n I_{(N=n)} \mid \mathcal{J}_n)/P_0(N = n \mid \mathcal{J}_n)\} I_{(N=n)} =$$

$$= \sum_n M_0(s_n \mid \mathcal{J}_n) I_{(N=n)} = \sum_n nV_n I_{(N=n)} = NV_N,$$

unde am folosit independența condiționată a lui $\mathcal{S}_n$ și $\mathcal{T}_n$ pentru a obține a treia egalitate (observăm că $(N = n) \in \mathcal{T}_n$). Din (112) avem

$$NV_n/(-b) = M_0(s_N/(-b) \mid \mathcal{J})_n. \tag{113}$$

$s_N/(-b)$ este uniform integrabilă (Pentru $0 \leqslant s_N/(-b) = (s_N/N)\,(N/(-b)) \to$ $\to -M_0 Z^-/\mu_0$ $[P_0]$ și $M_0 s_N/(-b) = M_0 N M_0 Z^{-1}/(-b) \to M_0 Z^-/\mu_0$ după teorema 16). Astfel din (113) și din lema 2 urmează că $NV_n/(-b)$ este, de asemenea, uniform integrabilă. Aceasta împreună cu (109) și (111) stabilește (108).

Scanned with OKEN Scanner

TEOREMA 18. (Berk (1973)). *Dacă* $P(S_n/n = 0) = 1$, *atunci*

$$\lim_c N/c = \lim_c M(N/c) = \infty.$$

Demonstrație. Avem $| S_N \geqslant c$. Rezultatul urmează notînd că $P(\lim_c S_N/N = 0) = 1$. Deci $P(\lim_c N/c = \infty) = 1$ și atunci după lema lui Fatou $\lim_c M(N/C) = \infty$.

Ca o aplicație a rezultatelor obținute, menționăm clasa testelor secvențiale ale rangurilor pentru problema celor două selecții discutată de Berk, Savage (1968). La pasul n sînt posibile selecțiile independente $(X_1, \ldots, X_n)$ și $(Y_1, \ldots, Y_n)$. Din aceste selecții se obține statistica rangurilor ordonat $\mathbf{R}_n = (R_{n1}, \ldots, R_{nn})$ unde coordonatele lui $\mathbf{R}_n$ sînt rangurile variabilelor $Y_1, \ldots, Y_n$ printre $X_1, \ldots, X_n, Y_1, \ldots, Y_n$. Fie $F(G)$ funcția de repartiție a variabilei $X(Y)$. Pentru a verifica ipoteza nulă $H_0 : F = G$ a fost propusă următoarea clasă de T.S.R.P. : se alege o ipoteză alternativă : $H_1 : G = \varphi(F)$ unde φ este o densitate pe $[0, 1]$. Repartiția lui $\mathbf{R}_n$ este determinată în amîndouă ipotezele și un T.S.R.P. poate fi bazat pe $L_n = \ln [P_{1n}(\mathbf{R}_n)/P_{0n}(\mathbf{R}_n)]$, unde $P_{in}(\mathbf{r}) = P_i(\mathbf{R}_n = \mathbf{r})$ este calculată sub H_i, $i = 0, 1$. În anumite condiții asupra lui φ, L_n/n converge către o limită μ și în fapt, are loc următorul rezultat. Pentru toți $\varepsilon > 0$ există un $c > 0$ și $\rho < 1$ astfel ca

$$P(|L_n/n - \mu| > \varepsilon) \leqslant c\rho^n.$$

În acest caz P este repartiția vectorului (X, Y). Cînd $\mu \neq 0$, rezultatul pentru L_n/n implică condițiile teoremei 16, astfel că comportarea limită a lui MN date se aplică la testul secvențial al rangurilor. Luînd μ_i valoarea limită a lui L_n/n sub H_i se poate verifica ca $-\infty < \mu_0 < 0 < \mu_1 < \infty$ și condițiile teoremei 17 sînt satisfăcute pentru acest T.S.R.P.

Rezultatele anterioare dau o justificare asimptotică a conjecturii lui Bhate (1955) pentru teste secvențiale, conjectură care este :

Neglijînd efectul depășirii marginilor, avem egalitatea aproximativă

$$M_0 S_N = (1 - \alpha)b + \alpha a. \tag{114}$$

Luînd $\lambda_0(n) = M_0 S_n$, Bhate afirmă că o aproximație rezonabilă este dată de

$$M_0 S_n \simeq \lambda_0(M_0(N)), \tag{115}$$

unde $\lambda_0(\cdot)$ este definită pe dreapta reală într-un mod convenabil.

TEOREMA 19 (Berk (1973)) *În condițiile de regularitate ale teoremei 17, aproximația lui Bhate (1955) este asimptotic corectă, adică*

$$\lim_c n_i/M_i(N) = 1, \quad i = 0,1.$$

Demonstrația. Vom da demonstrația pentru n_0. Mai întîi arătăm că

$$\lim_n \lambda_0(n)/n = \lim_n M_0 S_n/n = \mu_0 < 0.$$

Scanned with OKEN Scanner

Deoarece $P_0(S_n/n \to \mu_0) = 1$ se vede că

$$P_0(S_n^+/n \to 0) = 1 \text{ și } P_0(S_n^-/n \to -\mu_0) = 1$$

Pentru $x > 0$, deoarece $M_0 \Lambda_n = 1$,

$$P_0(S_n^+ > x) = P_0(\Lambda_n > e^x) \leqslant e^{-x}.$$

Astfel $\{S_n^+\}$ este uniform integrabil, și a fortiori și $\{S_n^+/n\}$; astfel $M_0 S_n^+/n \to 0$. Din demonstrația teoremei 16 urmează că $\{S_n^-/n\}$ este de asemenea uniform integrabilă. Astfel $M_0(S_n^{-1}/n) \to -\mu_0$ și deci $\lim_n \lambda_0(n)/n = \mu_0$.

Ecuația pentru n_0 este

$$\lambda_0(n_0) = b[1 + 0(1)]. \tag{116}$$

Astfel, $\lim_c n_0 = \infty$ și în consecință

$$\lim_c \lambda_0(n_0)/n_0 = \mu_0. \tag{117}$$

Din (116), vedem că $\lim_c \lambda_0(n_0)/b = 1$ și deci după teorema 16 și din (117) avem

$$\lim_c n_0/b = \lim_c M_0 N/b = 1/\mu_0. \tag{118}$$

Urmează că

$$\lim_c n_0/M_0 N = 1$$

Observații. i) Deoarece $\lambda_0(n) \simeq n\mu_0$, aproximația lui Bhate modificată va înlocui $\lambda(M_0 N)$ prin $\mu_0 M_0 N$ în (115). Similar membrul drept al relației (114) poate fi înlocuit prin

$$(1 - \alpha) \ln[\beta/(1-\alpha)] + \alpha \ln[(1 - \beta)/\alpha]$$

cu (α, β) înlocuite prin expresii asimptotice corespunzătoare; de exemplu (e^{-a}, e^{-b}).

Deoarece aproximațiile obținute pentru $M_i N$ au numai o justificare asimptotică, vom folosi expresiile asimptotice date de teorema 15:

$$M_0 N = b/\mu_0 \text{ și } M_1 N = a/\mu_1.$$

ii) Demonstrația teoremei 17 arată că $\lim_c M_0 S_N/b = 1$. Deoarece $\lim_c \lambda_0(M_0 N)/M_0(N) = \mu_0$, din (118) urmează că

$$\lim_c M_0 S_N/\lambda_0(M_0 N) = 1.$$

Adică, conjectura lui Bhate (115) este asimptotic corectă.

Scanned with OKEN Scanner

§ 7. Eficiența T.S.R.P.

7.1. Eficiența relativă în $\theta = \theta_0, \theta_1$

Presupunem că T.S.R.P. $S(b^*, a^*)$ pentru (XXII.2) atinge intensitatea (α, β) prestabilită și că este bazat pe variabilele independente și identic repartizate $\{z_i\}$.

După teorema XXII.3, $S(b^*, a^*)$ este atunci U.C.M.E. pentru (XXII.2).

Dat orice test valid rival S, se poate studia eficiența testului $S(b^*, a^*)$ în raport cu S în minimizare V.M.V.S. în $\theta = \theta_0, \theta_1$. Vom cerceta cantitatea precisă de economie atinsă de $S(b^*, a^*)$ peste testul optim bazat pe o selecție de volum fix pentru (XXII.2). Se presupune că volumul selecției $n(\alpha, \beta)$ cerut de ultimul poate fi determinat pentru diferite combinații de (α, β), $\alpha + \beta < 1$.

DEFINIȚIA 6. Eficiența relativă a testului $S(b^*, a^*)$ în $\theta \in \Theta$ este

$$Re(\theta) = Re(\alpha, \beta, \theta) = \frac{n(\alpha, \beta)}{M^*(n;\ \theta)} \tag{119}$$

unde $M^*(n;\theta)$ este V.M.V.S. a testului $S(b^*, a^*)$.

Observație. $100\ [Re(\theta) - 1)]/Re(\theta)$ este media procentuală economisită rezultată din folosirea testului $S(b^*, a^*)$ în locul testului optim bazat pe o selecție de volum fix cînd θ este valoarea adevărată a parametrului.

Exemplul 8. Presupunem că $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$, σ^2 cunoscută. Ne propunem să evaluăm $Re(\mu_0)$ și $Re(\mu_1)$ pentru verificarea ipotezei

$$\mu = \mu_0 \text{ față de } \mu = \mu_1.$$

Vom presupune că $|\mu_1 - \mu_2|$ este mică astfel că aproximațiile pentru $M_{\mu_i}(N)$ $(i = 0,1)$ în (XXII.71) sînt rezonabile. În cazul selecției de volum fix, volumul selecției și marginea regiunii critice sînt date de

$$\begin{aligned} n(\alpha, \beta) &= \left(\frac{\sigma}{\mu_1 - \mu_0}\right)^2 (z_{1-\alpha} + z_{1-\beta})^2, \\ c(\alpha, \beta) &= n(\alpha, \beta)\mu_0 + \sigma z_{1-\alpha}[n(\alpha, \beta)]^{1/2} = n(\alpha, \beta)\bar{x}_{n(\alpha, \beta)} \end{aligned} \tag{120}$$

cu condiția $\alpha + \beta < 1$, unde z_γ este cuantilă de ordin γ a variabilei $N(0, 1)$. Din (XXII.71) și (120) urmează că

$$Re(\mu_0) = \frac{n(\alpha, \beta)}{M_{\mu_0}(N)} = \frac{(z_{1-\alpha} + z_{1-\beta})^2}{2\{(1-\alpha)\ln[(1-\alpha)/\beta] - \alpha \ln[(1-\beta)/\alpha]\}}, \tag{121}$$

și

$$Re(\mu_1) = \frac{n(\alpha, \beta)}{M_{\mu_1}(N)} = \frac{(z_{1-\alpha} + z_{1-\beta})^2}{2\{(1-\beta)\ln[(1-\beta)/\alpha] - \beta \ln[(1-\alpha)/\beta]\}}. \tag{122}$$

Scanned with OKEN Scanner

care sînt independente de valorile μ_0, μ_1, σ. Formulele (121) şi (122) devin exacte cînd $\mu_0 \to \mu_1$. Avem :

$$Re(\alpha, \beta, \mu_0) = Re(\beta, \alpha, \mu_1) \text{ pentru toţi } (\alpha, \beta),$$

şi

$$Re(\alpha, \alpha, \mu_0) = Re(\alpha, \alpha, \mu_1).$$

TEOREMA 20. (Gosh (1970), Govindarajulu (1975)). *Fie* $\{X_i\}$ *variabile aleatoare independente identic repartizate avînd densitatea* $f(x, \theta)$, *unde fără a pierde din generalitate se presupune că* θ *este real. Dacă pentru* θ *în vecinătatea lui* θ_0 *şi* θ_1, $\int f(x, \theta)\, dx$ *poate fi derivată de două ori în raport cu* θ *sub semnul integrală şi* $\partial^2 \ln f(x, \theta)/\partial \theta^2$ *este uniform continuă în* θ *atunci formulele* $Re(\theta_0)$ *şi* $Re(\theta_1)$ *ale* T.S.R.P. *pentru* $\theta = \theta_0$ *faţă de* $\theta = \theta_1$ *relativ la procedeul optim bazat pe o selecţie de volum fix sînt aproximativ date de* (121) *şi* (122).

Demonstraţie. Dezvoltînd $\ln f(x_i ; \theta_j)$ pentru $j = 0,1$ în serii Taylor în θ_0 sau θ_1 putem scrie $z_i = \ln [f(x_i ; \theta_1)/f(x_i ; \theta_0)]$ în două forme alternative ca

$$z_i = \Delta \frac{\partial \ln f(x_i ; \theta_0)}{\partial \theta_0} + \frac{1}{2} \Delta^2 \frac{\partial^2 \ln f(x_i ; \theta_0)}{\partial \theta_0^2} + 0(\Delta^2) =$$

$$= \Delta \frac{\partial \ln f(x_i ; \theta_1)}{\partial \theta_1} - \frac{1}{2} \Delta^2 \frac{\partial^2 \ln f(x_i, \theta_1)}{\partial \theta_1^2} + 0\,(\Delta^2)$$

unde $\Delta = \theta_1 - \theta_0$. Din prima presupunere, avem :

$$M_{\theta_j} \left\{ \frac{\partial \ln f(x ; \theta_j)}{\partial \theta_j} \right\} = 0,$$

şi

$$M_{\theta_j} \left\{ - \frac{\partial^2 \ln f(x ; \theta_j)}{\partial \theta_j^2} \right\} = M_{\theta_j} \left\{ \left[\frac{\partial \ln f(x ; \theta_j)}{\partial \theta_j} \right]^2 \right\} = I(\theta_j), \; j = 0,1.$$

Deci, $\{z_i\}$ fiind variabilele aleatoare independente şi identic repartizate avem

$$M_{\theta_0}(z) = M(z ; \theta_0) = - \frac{1}{2} \Delta^2 I(\theta_0) + 0(\Delta^2),$$

$$M(z ; \theta_1) = \frac{1}{2} \Delta^2 I(\theta_1) + 0(\Delta^2),$$

$$D^2_{\theta_0}(z) = D^2(z ; \theta_0) = \Delta^2 I(\theta_0) + 0\,(\Delta^2), \; D^2(z ; \theta_1) = \Delta^2 I\,(\theta_1) + 0\,(\Delta^2).$$

Scanned with OKEN Scanner

Dacă $|\Delta|$ este mică, atunci $|M(z;\theta_0)|$ şi $D^2(z,\theta)$ sînt mici în $\theta=\theta_0$, θ_1 şi (XXII, 71) dă

$$M(N;\theta_0)\simeq\frac{(1-\alpha)\ln[(1-\alpha)/\beta)]-\alpha\ln[(1-\beta)/\alpha]}{\frac{1}{2}\Delta^2 I(\theta_0)+0(\Delta^2)},$$

(123)

$$M(N;\theta_1)\simeq\frac{(1-\beta)\ln[(1-\beta)/\alpha]-\beta\ln[(1-\alpha)/\beta]}{\frac{1}{2}\Delta^2 I(\theta_1)+0(\Delta^2)}.$$

Formulele (123) devin exacte cînd $\theta_0\to\theta_1$. În continuare din lema Neyman-Pearson, testul optim pentru verificarea ipotezei $\theta=\theta_0$ faţă de $\theta=\theta_1$ bazat pe o selecţie de volum fix este definit de regiunea critică

$$S_n(\alpha,\beta)>c(\alpha,\beta),$$

unde $c(\alpha,\beta)$ este cel mai mic întreg $n(\alpha,\beta)$ care satisface

$$P_{\theta_0}(S_{n(\alpha,\beta)}\leqslant c(\alpha,\beta))\geqslant 1-\alpha \text{ şi } P_{\theta_1}(S_{n(\alpha,\beta)}\leqslant c(\alpha,\beta))\leqslant\beta,$$

unde $S_n=\sum_1^n z_i$. Dacă $|\Delta|$ este mic, atunci $n(\alpha,\beta)$ este mare şi după teorema limită centrală, $S_{n(\alpha,\beta)}$ este aproximativ

$$N(n(\alpha,\beta)M(z;\theta_j),\ n(\alpha,\beta)D^2(z;\theta_j))$$

în $\theta=\theta_j$. În consecinţă

$$n(\alpha,\beta)\simeq\frac{[z_{1-\alpha}D(z;\theta_0)+z_{1-\beta}D(z;\theta_1)]^2}{[M(z;\theta_1)-M(z;\theta_0)]^2}=$$

(124)

$$\simeq\frac{|z_{1-\alpha}\{\Delta^2 I(\theta_0)+0(\Delta^2)\}^{1/2}+z_{1-\beta}\{\Delta^2 I(\theta_1)+0(\Delta^2)\}^{1/2}}{\left[\frac{1}{2}\Delta^2 I(\theta_0)+\frac{1}{2}\Delta^2 I(\theta_1)+0(\Delta^2)\right]^2}$$

(124) devine exactă cînd $\theta_0\to\theta_1$. Formulele (123) şi (124) conduc la (121) şi (122) pentru $Re(\theta_0)$ şi $Re(\theta_1)$ cînd $\theta_0=\theta_1$. Din presupunerea de continuitate uniformă urmează că pentru $\theta_0\to\theta_1$

$$\lim 0(\Delta^2)/\Delta^2=0 \text{ şi } \lim I(\theta_0)/I(\theta_1)=1.$$

Eficienţa relativă poate fi estimată dacă este necesar mai precis obţinînd $n(\alpha,\beta)$ fără presupuneri de regularitate şi normalitate.

Scanned with OKEN Scanner

7.2. Eficiența relativă în $\theta \neq \theta_0, \theta_1$

Cînd se alege între două ipoteze simple în familii cu un parametru sau cu mai mulți parametri este de conceput că valoarea necunoscută a parametrului θ poate fi diferită de θ_0 și θ_1. Performanța funcției C.O. a testului $S(b^*, a^*)$ în astfel de valori obișnuit nu este de mare importanță practică deoarece după criteriul (XXII. 3), este indiferent dacă H_0 este acceptată sau respinsă. Pe de altă parte, performanța funcției V.M.V.S. în astfel de valori este de o importanță considerabilă deoarece o V.M.V.S. mare, comparată cu $n(\alpha, \beta)$ sau cu V.M.V.S. a oricărui alt test valid, va întuneca sigur caracterul optim al testului $S(b^*, a^*)$ în θ_0 și θ_1. Deoarece teorema XXII.3 nu aruncă nici o lumină asupra stării relative a $M^*(n\,;\,\theta)$ pentru $\theta \neq \theta_0, \theta_1$, comportarea $Re(\theta)$ pentru $\theta \neq \theta_0, \theta_1$ este de interes practic real cînd $S(b^*, a^*)$ este folosit pentru a verifica (XXII. 23) supus la (XXII. 24).

Observații : i) Dacă $M^*(n\,;\,\theta)$ este o funcție continuă de θ, discuția din subparagraful precedent va putea fi aplicată de asemenea la $Re(\theta)$ pentru θ în vecinătatea lui θ_0 și θ_1.

ii) Dacă α și β nu sînt foarte mici, atunci

$$\sup_{\theta} M^*(n\,;\,\theta) < n(\alpha, \beta).$$

Că maximul V.M.V.S. a testului $S(b^*, a^*)$ este real mai mică decît $n(\alpha, \beta)$ poate fi verificată în orice situație dată folosind aproximațiile lui Wald. Pe de altă parte, poate este bine ca

$$M^*(n\,;\,\theta) > n(\alpha, \beta)$$

pentru toți $\theta \in \Theta'$, unde Θ' este o submulțime a lui Θ. Cînd acesta este cazul într-o familie cu un parametru, Θ' este un interval de valori dintre θ_0 și θ_1. Acest aspect poate fi ilustrat de T.S.R.P.U.C.M.E. și de testul optim bazat pe o selecție de volum fix pentru verificarea ipotezei.

$$H_0\,;\,\mu \leqslant \mu_0 \text{ față de } H_1 : \mu \geqslant \mu_1,\ -\infty < \mu_0 < \mu_1 < \infty.$$

Fie $\alpha = \beta < \dfrac{1}{2}$. Observăm că

$M(N\,;\,\mu) < M(N\,;\,\mu_0) = M(N\,;\,\mu_1) < n(\alpha, \alpha)$ pentru $\mu < \mu_0$ sau $\mu > \mu_1$ și

$$\sup_{\mu} M(N\,;\,\mu) = M(N\,;\,\tilde{\mu}),\ \tilde{\mu} = (\mu_0 + \mu_1)/2.$$

Avem

$$n(\alpha, \alpha) = 4z^2_{1-\alpha}\ [(\mu_1 - \mu_0)/\sigma]^2,\ M(N\,;\,\tilde{\mu}) \simeq \frac{\{\ln[(1-\alpha)/\alpha]\}^2}{[(\mu_1 - \mu_0)/\sigma]^2},$$

Scanned with OKEN Scanner

şi în consecinţă

$$\inf_{\mu} Re(\mu) = \frac{n(\alpha, \alpha)}{\sup_{\mu} M(N;\mu)} = \left[\frac{2z_{1-\alpha}}{\ln[(1-\alpha)/\alpha]}\right]^2 = \psi(\alpha) \text{ pentru } 0<\alpha<\frac{1}{2}.$$

Avem

$$\lim_{\alpha\to 0}\inf_{\mu} Re(\mu) = 0 \text{ şi } \lim_{\alpha\to 1/2}\inf_{\mu} Re(\mu) = \pi/2.$$

Pentru a studia comportarea expresiei $\inf_{\mu} Re(\mu)$ este suficient să examinăm derivata lui $[\psi(\alpha)]^{1/2}$. Deci, considerăm

$$h(\alpha) = z\varphi(z) - \alpha(1-\alpha)\ln[(1-\alpha)/\alpha] \text{ unde } z = z_{1-\alpha}$$

$$= \frac{1}{2} - \alpha - \int_0^z x^2\varphi(x)dx - \alpha(1-\alpha)\ln[(1-\alpha)/\alpha],$$

după ce am integrat prin părţi. Deci

$$h'(\alpha) = (1-2\alpha)\ln[(1-\alpha)/\alpha] - 2 + z^2,$$

$$h''(\alpha) = -2\ln[(1-\alpha)/\alpha] - (1-2\alpha)/\alpha(1-\alpha) - 2z/\varphi(z) < 0.$$

Adică, h'(α) este descrescătoare în α. Deoarece $h(0) = h\left(\frac{1}{2}\right) = 0$, h nu poate să schimbe semnul pentru α în $\left(0, \frac{1}{2}\right)$. Deoarece $h(\alpha)$ nu este identic zero, este strict pozitivă pentru α în $\left(0, \frac{1}{2}\right)$.

Soluţia ecuaţiei $\psi(\alpha) = 1$ variază între $\alpha = 0{,}0080$ şi $\alpha = 0{,}0081$. În consecinţă, pentru $\alpha \leqslant 0{,}008$, T.S.R.P.U.C.M.E este mai puţin eficient decît testul optim bazat pe o selecţie de volum fix cînd valoarea adevărată a parametrului μ este în vecinătatea lui $(\mu_0 + \mu_1)/2$. Un studiu comparativ similar poate fi făcut pentru orice pereche (α, β) dată cu $\alpha \neq \beta$.

T.S.R.P.U.C.M.E. poate suferi, pentru $\theta \neq \theta_0, \theta_1$, de o pierdere de eficienţă relativ la orice alt test valid.

7.3. Limitări ale proprietăţii optime a T.S.R.P.

T.S.R.P.U.C.M.E. poate să nu fie întotdeauna cea mai bună soluţie pentru (XXII.2) cu condiţia (XXII.3) sau pentru (XXII. 23) cu condiţia (XXII. 24). Vom pune în evidenţă unele situaţii rezonabile în care un test S rival (nu un T.S.R.P.), satisfăcînd (XXI. 18) poate fi preferat testului $S(b^*, a^*)$.

1. Presupunem că cele două ipoteze sînt verificate cu variabilele independente şi identic repartizate $\{z_i\}$, $S(b^*, a^*)$ atinge intensitatea (α, β) prestabilită şi că S este testul optim bazat pe o selecţie de volum fix. Atunci

Scanned with OKEN Scanner

după criteriul formal (XXI.21), $S(b^*, a^*)$ va fi desigur după teorema XXII.3, cea mai bună alegere. Totuşi este de conceput că $S(b^*, a^*)$ are o valoare mare pentru

$$P(n > n(\alpha, \beta) \mid \theta_0) \text{ şi (sau) } P(n > n(\alpha, \beta) \mid \theta_1).$$

Deoarece pentru multe şiruri observate $\{x_i\}$ $S(b^*, a^*)$ necesită mai multe observaţii decît S, vom obţine o margine inferioară a

$$P(n \leqslant N \mid \theta) \text{ pentru } S(b^*, a^*)$$

unde N este un întreg pozitiv dat şi $\theta \in \Theta$ este specificat. Pentru orice T.S.R.P. arbitrar cu marginile de stopare (b, a), avem

$$P(n \leqslant N \mid \theta) = 1 - P(b < Z_1 < a, \ldots, b < Z_n < a; \theta) \geqslant$$
$$\geqslant P(Z_N \leqslant b \mid \theta) + P(Z_N \geqslant a \mid \theta).$$

Cei doi termeni din membrul drept pot fi determinaţi precis din $f_N(x; \theta)$ în termen de (b, a, θ). Dacă, pentru θ dat $\{z_i\}$ sînt independenţi, identic repartizate cu media şi dispersia finite, atunci din teorema limită centrală urmează că Z_N este asimptotic repartizată $N(NM(z; \theta), ND^2(z; \theta))$. Atunci inegalitatea anterioară se reduce la

$$P(n \leqslant N \mid \theta) \geqslant 1 + \Phi\left(\frac{b - NM(z; \theta)}{\sqrt{N}\sqrt{D^2(z; \theta)}}\right) - \Phi\left(\frac{a - NM(z; \theta)}{\sqrt{N}\sqrt{D^2(z; \theta)}}\right) +$$
$$+ 0\left(\frac{1}{\sqrt{N}}\right) = p_\theta(n). \tag{125}$$

Pentru valori mari ale lui N, termenul $0(1/\sqrt{N})$ poate fi neglijat.

Dacă $|M(z, \theta)|$ şi $D^2(z; \theta)$ sînt mici, atunci $S(b^*, a^*)$, sub (XXII. 18), are aproximativ intensitatea (α, β) prestabilită şi (125) cu

$$b = \ln[\beta/(1 - \alpha)] \text{ şi } a = \ln[(1 - \beta)/\alpha]$$

dă o margine inferioară a probabilităţii ca $S(b^*, a^*)$ să ceară cel mult N observaţii pentru luarea deciziei.

Exemplul 9. Dacă $\{X_i\}$ sînt variabile aleatoare independente identic repartizate $N(\mu, \sigma^2)$ şi

$$H_0 : \mu = \mu_0, \; H_1 = \mu = \mu_1,$$

atunci avem

$$M(z; \mu_0) = -\Delta^2/2 = -M(z; \mu_1), \; D^2(z; \mu) = \Delta^{-2}, \; \Delta = (\mu_1 = \mu_0)/\sigma.$$

Pentru fiecare $n \geqslant 1$, marginea inferioară din (119) se reduce la

$$p_{\mu_0}(n) = \Phi\left(\frac{b + n\Delta^2/2}{\Delta n^{1/2}}\right) + \Phi\left(\frac{-a - n\Delta^2/2}{\Delta n^{1/2}}\right),$$

$$P_{\mu_1}(n) = \Phi\left(\frac{b - n\Delta^2/2}{\Delta n^{1/2}}\right) + \Phi\left(\frac{-a + n\Delta^2/2}{\Delta n^{1/2}}\right).$$

Scanned with OKEN Scanner

Dat $(\alpha, \beta,)\alpha + \beta < 1$, se poate alege $\Delta(n(\alpha, \beta)$ dat) din

$$\Delta = |z_{1-\alpha} + z_{1-\beta}| / [n(\alpha, \beta)]^{1/2}.$$

2. Deoarece probabilităţile erorilor asociate cu testul $S(b^*, a^*)$ pentru (XXII.2) trebuie să satisfacă

$$\alpha^*(\theta_0) + \beta^*(\theta_1) < 1$$

atunci, dat $\alpha + \beta \geqslant 1$, poate să existe un test S astfel încît

$$\alpha^*(\theta_0) < \alpha_S(\theta_0) \leqslant \alpha \text{ şi (sau) } \beta^*(\theta_1) < \beta_S(\theta_1) \leqslant \beta$$

pe seama

$$M^*(n\,;\,\theta_0) > M_S(n\,;\,\theta_0) \text{ şi (sau) } M^*(n\,;\,\theta_1) > M_S(n\,;\,\theta_1).$$

Evident, S poate să fie preferat lui $S(b^*, a^*)$. Totuşi, din punct de vedere practic, acest defect al testului $S(b^*, a^*)$ nu poate fi considerat serios deoarece valorile specificate ale lui (α, β) sînt în general destul de mici pentru a asigura $\alpha + \beta < 1$. Dealtfel, multe din testele competitorii testului $S(b^*, a^*)$, incluzînd testul optim bazat pe o selecţie de volum fix posedă de asemenea probabilităţi ale erorilor satisfăcînd

$$\alpha_S(\theta_0) + \alpha_S(\theta_1) < 1.$$

Ce poate fi mai derutant, este faptul că, chiar cînd $\alpha + \beta < 1$, poate să existe un test S care este mai eficient decît $S(b^*, a^*)$ dacă ultimul nu poate atinge intensitatea prestabilită. Existenţa şi construcţia unui astfel de test rival a fost arătată pe o bază adhoc. Dacă diferenţele

$$|\alpha^*(\theta_0) - \alpha| \quad \text{şi} \quad |\beta^*(\theta_1) - \beta|$$

sînt destul de mici în comparaţie cu α şi respectiv β, o astfel de cercetare nu va fi necesară şi se va adopta $S(b^*, a^*)$. Însă sînt multe cazuri speciale cînd aceasta nu este aşa, deoarece fiecare $|\beta^*(\theta_1) - \beta|$ şi $|\alpha^*(\theta_2) - \alpha|$ nu sînt mici sau deoarece alte consideraţii sînt în favoarea adoptării testului rival.

3. Cu excepţia cazului menţionat în exemplul XXII.1, pentru familii ce conţin trei sau mai multe repartiţii nu există în general teste U.C.M.E. Dealtfel, problema generală de construire a testului care minimizează $\sup_\theta M_S(n\,;\,\theta)$, printre toate testele S valide pentru (XXII. 2) sau (XXII.23) este de asemenea nerezolvată pentru familiile care conţin trei sau mai multe repartiţii distincte. Pentru unele posibilităţi se poate vedea Kiefer, Weiss (1957). Totuşi, în multe familii cu parametru real $\sup_\theta M^*(n\,;\,\theta)$ a $S(b^*, a^*)$ tinde să fie mai mică ca $n(\alpha, \beta)$ a testului optim bazat pe o selecţie de volum fix. Pe de altă parte, dacă $\sup_\theta M^*(n\,;\,\theta)$ este mult mai mare decît $M^*(n\,;\,\theta_0)$

Scanned with OKEN Scanner

și $M^*(n\,;\,\theta_1)$ (sau poate ca $n(\alpha, \beta)$), teorema XXII.3 are valoare practică mică. În astfel de situații se poate prefera o modificare a $S(b^*, a^*)$, obținîndu-se S', din care

$$\sup_{\theta} M_{S'}(n\,;\,\theta) < \sup_{\theta} M^*(n\,;\,\theta)$$

este asigurată pe seama

$$M_{S'}(n\,;\,\theta_0) > M^*(n\,;\,\theta_0) \quad \text{și} \quad M_{S'}(n\,;\,\theta_1) > M^*(n\,;\,\theta_1).$$

4. Cea mai importantă limitare a teoremei XXII.3 este că ea se mărginește la variabilele independente și identic repartizate $\{z_i\}$. Nu este cunoscută nici o proprietate optimă comparabilă pentru $S(b, a)$ bazat pe variabilele $\{z_i\}$ care nu sînt independente sau care sînt îndependente însă nu identic repartizate. Testul $S(b^*, a^*)$ pentru (XXII.2) în cazul de neindependență nu are nici o proprietate optimă.

Într-adevăr în cazul variabilelor independente și identic repartizate, se obține informație nouă asupra populației pentru fiecare z_i. În cazul de neindependență o parte a acestei informații este pierdută (pentru $i \geqslant 2$) datorită influenței observațiilor precedente lui z_i. Informația netă furnizată de $(z_1, \ldots, z_n)$ va fi, prin urmare, mai mică (pentru $n > 1$) în cazul de neindependență decît în cazul de independență și repartizare identică. Altfel spus dacă $(z_1, \ldots, z_n)$ și $(z'_1, \ldots, z'_n)$, $n \neq n'$ sînt două șiruri particulare de selecție astfel încît $Z_n = c = Z'_n$, atunci repartiția lui Z_{n+m} $(m \geqslant 1)$ dat $Z_n = c$ și a lui $Z_{n'+m}$ dat $Z'_{n'} = c_1$ în cazul de neindependență poate fi diferită de repartiția în cazul de independență și identic repartizare (aici $Z_{n+m} - Z_n = Z'_{n'+m} - Z_{n'}$ reprezintă suma adițională a m z_i). Această pierdere de informație poate să influențeze T.S.R.P.U.C.M.E. mai drastic decît alt test valid așa încît îl face pe primul mai puțin eficient decît ultimul.

Exemplul 10. (Cox (1952)) Presupunem că avem șirul de observații $\{x_i\}$ $(i = 1, 2, \ldots)$ și că fiecare x_i ia valoarea 0 sau 1. Considerăm problema alegerii între ipotezele

$H_0 : \{x_i\}$ sînt variabile independente Bernoulli cu $P(x_i = 1) = p$

$H_1 : x_1$ este o variabilă Bernoulli cu $P(x_1 = 1) = r$ și $P(x_1 = x_2 = \ldots) = 1$, unde $0 < p < 1$ și $0 < r < 1$ sînt cunoscute.

În acest caz $\{z_i\}$ nu sînt independente și

$$Z_n = \begin{cases} \ln(1-r) - n\ln(1-p)\,, & x_1 = \ldots = x_n = 0 \\ \ln r - n\ln p\,, & x_1 = \ldots = x_n = 1 \\ -\infty\,, & x_i \neq x_j \text{ pentru } 1 \leqslant i \neq j \leqslant n \end{cases}$$

Atunci regula de decizie a testului $S(b, a)$ poate fi exprimată ca:
i) accept H_0 dacă orice două observații diferă, sau dacă

$$b \geqslant \ln\,[(1-r)/(1-p)] \text{ și } x_1 = 0$$

sau dacă

$b \geqslant \ln\,(r/p)$ și $x_1 = 1$,

ii) resping H_0, dacă

$b < \ln\,[(1-r)/(1-p)]$ și $x_1 = \ldots = x_{n'} = 0$

Scanned with OKEN Scanner

pentru $n' > [\ln(1-r) - a]/\ln(1-p)$,

sau dacă

$b < \ln(r/p)$ și $x_1 = \ldots = x_{n''} = 1$
pentru $n'' \geqslant [\ln r - a]/\ln p$
iii) se continuă experimentul în rest.

7.4. Eficiența relativă limită a T.S.R.P.

Eficiența relativă limită a T.S.R.P. a fost studiată de Paulson (1947), Chernoff (1956), Aivazian (1959) și Bechhofer (1960). Bechhofer (1960) a studiat eficiența relativă limită a T.S.R.P. pentru cazul normal cînd probabilitățile erorilor sînt legate una de celalaltă și tind la zero. În cele ce urmează prezentăm rezultatele sale.

Fie $X_1, X_2, \ldots$ variabile aleatoare independente identic repartizate $N(\mu, \sigma^2)$, μ necunoscută și σ^2 cunoscută. Ne propunem să verificăm ipoteza

$$H_0 : \mu = \mu_0 \text{ față de } H_1 : \mu = \mu_1 (\mu_1 > \mu_0).$$

Fie α și β marginile probabilităților erorilor astfel ca $0 < \alpha, \beta < 1$ și $\alpha + \beta < 1$. Vom studia eficiența (măsurată în termeni de raport de valoare medie a volumului selecției la volumul selecției fix) T.S.R.P. față de cel mai bun procedeu competitoriu bazat pe o selecție de volum fix cînd (α, β) se apropie de zero într-un mod prestabilit. În 7.2. am studiat aceeași problemă pentru $\alpha = \beta$ fixat. Pentru simplicitate, fie

$$\theta = [2\mu - (\mu_0 + \mu_1)]/2\sigma, \quad \theta^* = (\mu_1 - \mu_0)/2\sigma. \tag{126}$$

Atunci $\mu = \mu_0$ și $\mu = \mu_1$ sînt echivalente cu $\theta = -\theta^*$ și respectiv $\theta = \theta^*$. Aproximațiile pentru funcțiile C.O și V.M.V.S. sînt

$$L(\theta) \simeq (A^h - 1)/(A^h - B^h), \qquad h = -\theta/\theta^* \tag{127}$$

și

$$M(N;\theta) \simeq \{L(\theta)\ln B + [1 - L(\theta)]\ln A\}\ 2\theta\theta^* \tag{128}$$

unde $A = (1-\beta)/\alpha$ și $B = \beta/(1-\alpha)$. Rapoartele acestor aproximații (cu neglijarea exceselor depășirii marginii) la valorile corespunzătoare se apropie foarte repede de unitate cînd V.M.V.S. devin mari. De asemnenea din (120), volumul selecției (fix) care garantează aceleași margini pentru probabilitățile erorilor este cel mai mic întreg $\geqslant$ decît

$$(z_\alpha - z_{1-\beta})^2/4\,(\theta^*)^2. \tag{129}$$

Atunci, eficiența relativă (neglijînd efectul depășirii marginilor) este dată de

$$Re(\alpha, \beta, \theta, \theta^*) \simeq \frac{2\theta^*}{\theta} \cdot \frac{L(\theta)\ln B + [1 - L(\theta)]\ln A}{(z_\alpha - z_{1-\beta})^2} \tag{130}$$

Scanned with OKEN Scanner

Vom obține limita expresiei (130) cînd $\beta = c\alpha^d$ $(c, d > 0)$ și $\alpha \to 0$. Al doilea element din membrul drept al expresiei (130) devine

$$L(\theta)\,[\ln(c\alpha^d) - \ln(1-\alpha)] + [1 - L(\theta)]\,[\ln(1 - c\alpha^d) - \ln\alpha]$$

care se apropie (cînd $\alpha \to 0$) de

$$-\ln\alpha + L(\theta)\,[\ln\alpha + \ln(c\,\alpha^d)].$$

Folosind regula lui l'Hospital, obținem că $L(\theta)\,[\ln\alpha + \ln(c\alpha^d]$ se apropie de

$\ln\alpha + \ln(c\,\alpha^d)$ pentru $\theta < 0$

0 pentru $\theta > 0$ cînd $\alpha \to 0$.

Deci avem

$$(131)\quad \lim_{\alpha\to 0} Re(\alpha, c\alpha,^d, \theta, \theta^*) = \begin{cases} (2\theta^*/\theta) \lim\limits_{\alpha\to 0} [\ln(c\alpha^d)/(z_\alpha + z_{c\alpha^d})^2, & \theta < 0 \\ (2\theta^*/\theta) \lim\limits_{\alpha\to 0} [-\ln\alpha/(z_\alpha + z_{c\alpha^d})^2], & \theta > 0. \end{cases}$$

Pentru valori mai mici ale lui α, integrînd prin părți avem

$$\alpha = \int_{-\infty}^{z\alpha} \varphi(y)dy = -[\varphi(z_\alpha)/z_\alpha] - \int_{-\infty}^{z\alpha} y^{-2}\varphi(y)\,dy.$$

Deci, $\ln\alpha \simeq -\frac{1}{2}z_\alpha^2 - \ln(-z_\alpha) - \ln 2(\pi)^{\frac{1}{2}} \simeq -\left(\frac{1}{2}\right) z_\alpha^2$. Astfel pentru α apropiat de zero avem

$$z_\alpha \simeq \{-2\ln\alpha\}^{\frac{1}{2}} \text{ și } z_{c\alpha^d} \simeq \{-2\ln(c\alpha^d)\}^{\frac{1}{2}}.$$

Înlocuind aceste valori în (131), obținem (Aivazian (1959)).

$$(132)\quad \lim_{\alpha\to 0} Re(\alpha, c\alpha^d, \theta, \theta^*) = \begin{cases} (-\theta^*/\theta)\,(1 + d^{-\frac{1}{2}})^{-2}, & \theta < 0 \\ (\theta^*/\theta)\,(1 + d^{\frac{1}{2}})^{-2}, & \theta > 0. \end{cases}$$

Cînd $d = 1$, adică $c\alpha = \beta$, (132) devine

$$(133)\quad \lim_{\alpha\to 0} Re(\alpha, c\alpha, \theta, \theta^*) = \theta^*/4|\,\theta| =$$

$$= (\mu_1\,\mu_0)/4|\,\mu_0 + \mu_1 - 2\mu_1|.$$

Scanned with OKEN Scanner

Astfel, la limită ($c\alpha = \beta \to 0$), eficiența procedeului bazat pe o selecție de volum fix relativă T.S.R.P.

$$\begin{cases} \to 0 & , \mu \to \pm\infty \\ = \dfrac{1}{4} & , \mu = \mu_0 \text{ sau } \mu = \mu_1 \text{ (Chernoff (1956))} \\ > 1 & , (5\mu_0 + 3\mu_1)/8 < \mu < 3\mu_0 \\ = \infty & , \mu = (\mu_0 + \mu_1)/2. \end{cases}$$

Observație. Chernoff (1956) și Aivazian (1956) au considerat problema generală a verificării unei ipoteze simple față de o alternativă simplă și au studiat eficiența relativă limită cînd valorile parametrilor specificate de ipoteze se apropie.

7.5. Eficiența asimptotică a T.S.R.P.

Berk (1973) se ocupă de eficiența asimptotică a T.S.R.P. relativă la cel mai bun test nesecvențial avînd aceeași intensitate (α, β). Teorema XXII. 16 dă comportarea asimptotică cînd $c = \min(a, -b) \to \infty$, în timp ce teoremele XXII.15 și XXII.17 dau comportarea corespunzătoare a MN. Pentru a efectua comparația este necesară o expresie asimptotică corespunzătoare pentru volumul selecției cerut pentru cel mai bun test nesecvențial de intensitate (α, β). Cînd facem comparația, presupunem că

$$\lim_{c} [(\ln \beta)/(\ln \alpha)] = \lambda, \; 0 < \lambda < \infty \tag{134}$$

sau în vederea teoremei XXII.16 că

$$\lim_{c} [(-b)/a] = \lambda.$$

Pentru o selecție de volum fix C.M.P. test pentru verificarea ipotezei H_0 față de H_1 respinge H_0 dacă

$$S_n > d_n.$$

Trebuie să alegem (n, d_n) astfel că, asimptotic, testul nesecvențial să aibă intensitatea (α, β). Adică, trebuie să avem

$$\text{a) } P_0(S_n > d_n) \simeq \alpha \tag{135}$$

$$\text{b) } P_1(S_n \leqslant d_n) \simeq \beta$$

în sensul că rapoartele logaritmilor corespunzători tind la unitate [Astfel (n, d_n) depinde de (b, a)].

Argumentăm că $d_n = 0(n)$, sau mai exact, că putem atinge (135) alegînd

$$d_n = n\zeta,$$

Scanned with OKEN Scanner

unde ζ este un număr real ce depinde de H_0, H_1 și λ. Motivul acesteia se găsește în Chernoff (1952). Fie

$$c_0(t) = \ln M_0(\exp tZ).$$

Deoarece Z este logaritmul funcției de verosimilități, $c_0(t) < \infty$ cel puțin pentru $0 \leqslant t \leqslant 1$. Atunci teorema lui Chernoff spune că pentru $z > M_0 Z$,

$$\lim_n n^{-1} \ln P_0(S_n > nz) = -k_0(z) \tag{136}$$

unde

$$k_0(z) = \sup_{-\infty < t < \infty} [tz - c_0(t)]. \tag{137}$$

Similar dacă $z < M_1 Z$

$$\lim_n n^{-1} \ln P_1(S_n \leqslant nz) = -k_1(z). \tag{138}$$

În vederea relațiilor (134), (136) și (138) vedem că testul nesecvențial asimptotic de intensitate (α, β) este obținut alegînd $d_n = n\zeta(\lambda)$ unde $\mu_0 < \zeta(\lambda) < \mu_1$ este soluția unică a ecuației

$$k_1(z)/k_0(z) = \lambda \tag{139}$$

și n este ales astfel încît (135), (ii) are loc. Astfel (135) și (136) dau pentru n relația $nk_0(\zeta) = \ln \alpha^{-1}$, sau în vederea teoremei XXII.16

$$nk_1(\zeta) = a \tag{140}$$

Deci volumul selecției cerut pentru obținerea, asimptotică a intensității (α, β) este

$$\nu(c, \lambda) = a/k_0(\zeta), \tag{141}$$

și valoarea critică corespunzătoare pentru S_1 este $\zeta(\lambda)a/k_0(\zeta)$.
Notăm

$$c_1(t) = \ln \int [f_1(x)/f_0(x)]^t f_1(x) \mathrm{d}x = c_0(t+1)$$

din care urmează că

$$k_1(z) = k_0(z) - z. \tag{142}$$

Cînd $z = \mu_0 < 0$, $t\mu_0 - c_0(t)$ este minimă în $t = 0$ (deoarece $c_0'(0) = \mu_0$ unde $c_0'(t) = \mathrm{d}c_0(t)/\mathrm{d}t$; deci $k_0(\mu_0) = 0$, astfel ca $k_0(\mu_1) = \mu_1 > 0$. În vederea lui (142), (139) devin

$$(1 - \lambda)k_0(z) = z,$$

care are solutia $\zeta = 0$ dacă $\lambda = 1$. În rest (139) dă ecuația

$$k_0(z) = z/(1 - \lambda). \tag{143}$$

Scanned with OKEN Scanner

Deoarece (Chernoff (1952)) dacă $z > \mu_0$,

$$k_0(z) = \sup_{t>0} [tz - c_0(t)].$$

urmează ca k_0 este convexă în t și crește pentru $z > \mu_0$. Deoarece de asemenea $k_0(\mu_0) = 0$, $k_0(\mu_1) = \mu_1$ și $0 < \lambda < \infty$ antrenează $(1 - \lambda)^{-1} \notin (0, 1)$, urmează că curba definită de cei doi membri ai relației (143) se intersectează într-un singur punct, a cărui abscisă $\zeta(\lambda)$ este (μ_0, μ_1) și este astfel soluția unică a ecuației (139). În vederea lui (143), (141) devine

$$(144) \qquad \nu(c, \lambda) = \begin{cases} a(1 - \lambda)/\zeta(\lambda), & \lambda \neq 1 \\ a/\mathcal{K}, & \lambda = 1, \end{cases}$$

unde (cum a arătat Chernoff (1952)),

$$\mathcal{K} = k_0(0) = k_1(0) = -\ln \inf_{0<t<1} \int f_0^t(x) f_1^{1-t}(x)\, dx.$$

Eficiența asimptotică a T.S.R.P. relativă la cel mai bun test nesecvențial este obținută în baza lui (144). Dacă $MZ = \mu \neq 0$, atunci

$$MN \simeq \begin{cases} a/\mu, & \mu > 0 \\ b/\mu, & \mu < 0 \end{cases}$$

în timp ce testul nesecvențial corespunzător cere $\nu(c, \lambda)$ observații. Deci eficiența asimptotică relativă a T.S.R.P. este dată de

$$(145) \qquad \lim_c \nu(c, \lambda)/MN = \begin{cases} (1 - \lambda)\mu/\zeta(\lambda), & \mu > 0, \quad \lambda \neq 1, \\ -\mu(1 - \lambda)/\lambda\zeta(\lambda), & \mu < 0, \quad \lambda \neq 1, \\ |\mu|/\mathcal{K}, & \mu \neq 0, \quad \lambda = 1. \end{cases}$$

Dacă $MZ = 0$, atunci din teorema XXII.16 vedem că $MN \sim -ab$ astfel că

$$\lim_c \nu(c, \lambda)/MN = 0.$$

Adică, T.S.R.P. are eficiența asimptotică relativă zero pentru repartițiile pentru care $MZ = 0$. Acest fenomen a fost pus în evidență de Bechhofer (1960) pentru cazul normal.

§ 8. Eficiența asimptotică a testelor secvențiale

8.1. Eficiența asimptotică

Ocupîndu-se de teste secvențiale pentru verificarea ipotezei

$$(146) \qquad H_1 : \theta \leqslant 0 \text{ față de } H_2 : \theta > 0$$

unde θ este media necunoscută a unei repartiții normale cu dispersia cunoscută asimptotic, Berk (1976) consideră analoage secvențiale ale eficiențelor Hodges-Lehmann și Chernoff.

Scanned with OKEN Scanner

Berk (1976) folosește următoarele notații și convenții :

— $X(t)$, $t \geqslant 0$ reprezintă o rătăcire observabilă descrisă de un proces Wiener cu deplasarea θ necunoscută și dispersia 1 pe unitatea de timp,

— pentru testul secvențial al verificării ipotezei H_1 față de H_2, τ reprezintă timpul de stopare, $A = (\text{accept } H_1)$ și $R = (\text{resping } H_1)$,

— P_θ reprezintă repartiția probabilistică a procesului $X(t)$, $t \geqslant 0$ sub θ și $\varepsilon(\theta)$ probabilitatea erorii corespunzătoare (scriem $\overline{\varepsilon}(\theta) = 1 - \varepsilon(\theta)$); obișnuit $\varepsilon(\theta)$ este pragul de semnificații al testului,

— se consideră numai teste pentru care

$$M_\theta \tau < \infty \text{ pentru toți } \theta,$$

ceea ce antrenează

$$P_\theta A + P_\theta R = 1,$$

— ca în considerațiile asimptotice obișnuite, fiecare test considerat face parte dintr-o familie de teste indexată de un parametru a, astfel că pentru $a \to \infty$, $\tau \to \infty$. Familia corespunzătoare de teste este consistentă : pentru $\theta \neq 0$, $\varepsilon(\theta) \to 0$ cînd $a \to \infty$.

În compararea testelor secvențiale, problema care apare este că nu putem face funcțiile caracteristice operatoare egale. Accasta este în contrast cu teoria asimptotică nesecvențială, în care două teste diferite pot fi făcute asimptotic să aibă aceeași putere și volume de selecție corespunzătoare cerute pentru aceasta sînt comparate.

Totuși ca în teoria nesecvențială, compararea se aplică la două șiruri de statistici diferite, folosind margini de stopare similare pentru amîndouă șirurile. În fiecare caz șirul stocastic de bază este același ; marginile de stopare sînt acelea care diferă.

O abordare posibilă de comportare a unor astfel de teste secvențiale este sugerată de eficiențele Hodges-Lehmann și Chernoff. Hodges și Lehman (1956) fixează $\varepsilon(\theta)$ și consideră, pentru $\theta \neq 0$, rata cu care $\varepsilon(\theta)$ tinde la zero cînd volumul selecției crește. Există o margine superioară a acestei rate, margine care adeseori poate fi atinsă. Aceasta dă noțiunea de eficiență asimptotică relativă și absolută. Noțiunea de eficiență a lui Chernoff (1952) a fost dezvoltată pentru verificarea unei ipoteze simple față de o alternativă simplă, în cazul de față $-\theta$ față de θ. Eficiența lui Chernoff se obține din rata cu care eroarea totală

$$\gamma(\theta) = \varepsilon(\theta) + \varepsilon(-\theta)$$

tinde la zero cînd volumul selecției devine infinit. Și aici există o margine superioară teoretică, care dă din nou noțiunea de eficiență relativă și absolută. Pentru amîndouă eficiențele, se folosește logerorii împărțit prin volumul selecției. Considerăm analogul pentru cazul secvențial, normalizînd logerorii prin valoarea medie a volumului selecției corespunzătoare. Există margini superioare teoretice pentru unele din cantitățile considerate. Cu o excepție, exemplele următoare arată că marginile pot fi atinse de teste consistente.

În analogie cu eficiența Hodges-Lehmann, considerăm (limita valorilor) raportului $[-\ln \varepsilon(\theta)]/M_\theta \tau$.

Acest raport, într-un sens, standardizează raza erorii în θ pentru *cantitatea* de selecție cerută pentru atingerea ratei erorii. De asemenea

Scanned with OKEN Scanner

considerăm raportul $[-\ln \varepsilon(\theta)]/M_{-\theta}\tau$, care pare că are un rol neînsemnat ca măsură a eficienţei. Totuşi există o margine superioară pentru valoarea limită a celui de-al doilea raport. Pentru procedeele simetrice, aceasta dă o margine superioară corespunzătoare pentru primul raport. De asemenea considerăm raportul corespunzător cu $M_0\tau$ la numitor. Pentru multe din procedeele pe care le prezentăm, $M_0\tau$ este, cel puţin asimptotic, maximul valorii medii a timpului de stopare. (Pentru procedeele simetrice acest lucru este adevărat şi neasimptotic. (Anderson (1960), Hoeffding (1960)). Acest ultim raport dă o măsură conservativă mai bună a eficienţei decît primul. Primul raport suferă de defectul teoretic că limita sa poate lua orice valoare nenegativă incluzînd $+\infty$. Astfel el nu dă o noţiune de eficienţă absolută interesantă (cu excepţia procedeelor simetrice). Prin contrast, raportul ce utilizează $M_0\tau$ are o limită netrivială a marginii superioare şi astfel dă o noţiune de eficienţă absolută pentru toate procedeele. De asemenea considerăm rapoartele cu eroarea totală $\gamma(\theta)$ în locul erorii $\varepsilon(\theta)$. Deoarece $\gamma(\cdot)$ este o funcţie pară, raportul

$$-[\ln \gamma(\theta)]/M_\theta\tau$$

dă, printre altele, o comparaţie între $M_\theta\tau$ şi $M_{-\theta}\tau$. În multe cazuri analizele pentru $\theta > 0$ şi $\theta < 0$ sînt similare, astfel că una este omisă.

Apare că nici un raport nu dă un profil adecvat pentru testul secvenţial. De exemplu, în cazul simetric, T.S.R.P. este asimptotic optimal cînd este judecat după $M_0\tau$. Totuşi cu $M_0\tau$ la numitor, limita corespunzătoare este rea. Aceasta reflectă faptul că asimptotic, $M_0\tau$ pentru T.S.R.P. este mare.

Se poate da chiar un profil mai complex, o eficienţă în doi parametri obţinută considerînd

$$[-\ln \varepsilon(\theta)]/M_\nu\tau.$$

Se obţine limita acestui raport pentru toate valorile parametrilor θ şi ν. Ne fixăm atenţia asupra clasei $\nu = \theta$, 0 sau $-\theta$.

Vom obţine margini superioare pentru valorile limită ale rapoartelor introduse.

Fie σ un timp de oprire pentru $\{X(t) : t \geqslant 0\}$ care, pentru ν şi θ în R,

$$P_\theta(\sigma < \infty) = P_\nu(\sigma < \infty) = 1.$$

Fie P_θ^σ repartiţia procesului de stopare $\{X(t) : 0 \leqslant t \leqslant \sigma\}$ sub θ. Atunci $P_\theta^\sigma \equiv P_\nu^\sigma$ şi (Freedman (1971) teorema 159)

$$\mathrm{d}P_\theta^\sigma/\mathrm{d}P_\nu^\sigma = \mathrm{e}^{(\theta-\nu)X(\sigma)-\frac{1}{2}(\theta^2-\nu^2)\sigma}[P_\nu]. \tag{147}$$

Următoarele două leme dau marginile pentru $[-\ln \varepsilon(\theta)]/M_0\tau$.

LEMA 3. (Berk (1976)). *Pentru un test consistent, pentru care* $\varepsilon(0)$ *nu este degenerat,*

$$\limsup_a [-\ln \varepsilon(\theta)]/M_0\tau \leqslant \frac{1}{2}\theta^2\{\limsup_a M_0(\tau|A)/M_0\tau\}, \quad \theta > 0 \tag{148}$$

(limita se ia după $a \to \infty$*).*

Scanned with OKEN Scanner

Demonstrație. Folosind (147) pentru $\theta > 0$,

$$\varepsilon(\theta) = P_0 A = \int_A e^{\theta X(\tau) - \frac{1}{2}\theta^2 \sigma} dP_\theta =$$

(149)

$$= \bar{\varepsilon}(0) M_0(e^{\theta X(\tau) - \frac{1}{2}\theta^2 \tau} | A) \geqslant \bar{\varepsilon}(0) \exp\{M_0(\theta X(\tau) - \frac{1}{2}\theta^2 \tau | A\}.$$

Folosind lema lui Wald, obținem

$$(150) \qquad |M_0(X(\tau)|A)| \leqslant M_0|X(\tau)|/\bar{\varepsilon}(0) \leqslant (M_0\tau)^{\frac{1}{2}}/\bar{\varepsilon}(0).$$

Deoarece pentru $\theta > 0$, $\lim_a \varepsilon(\theta) = 0$, din (149) urmează că $\lim_a M_0(\tau|A) = \infty$; deci de asemenea că $\lim_a M_0\tau = \infty$. Lema urmează din (149) și (150).

Lema 3 poate fi extinsă pentru verificarea ipotezelor simple nule. În contrast, următoarea margine folosește H_1 compusă (Pe de altă parte, $\varepsilon(0)$ nu este supusă nici unei restricții).

LEMA 4 (Berk (1976)). *Pentru teste consistente*

$$(151) \quad \limsup_a [-\ln \varepsilon(\theta)]/M_0\tau \leqslant \frac{1}{2}\theta^2\{\liminf_\nu \limsup_a M_{-\nu}/M_0\tau\}, \ \theta \neq 0,$$

limita după ν *fiind luată ca* $\nu \to 0$.

Demonstrație. Pentru $\nu\theta > 0$, Wald (1947) dă următoarea margine inferioară pentru $M_{-\nu}\tau$:

$$(152) \quad M_{-\nu}\tau \geqslant 2(\theta + \nu)^{-2}\left\{\bar{\varepsilon}(-\nu)\ln\left[\frac{\bar{\varepsilon}(-\nu)}{\varepsilon(\theta)}\right] + \varepsilon(-\nu)\ln\left[\frac{\varepsilon(-\nu)}{\bar{\varepsilon}(\theta)}\right]\right\}.$$

Pentru $\nu\theta \neq 0$, atît $\varepsilon(\theta)$ cît și $\varepsilon(-\nu)$ se apropie de zero, astfel ca

$$(153) \qquad M_{-\nu}\tau \geqslant 2(\theta + \nu)^{-2}[-\ln \varepsilon(\theta)]\{1 + 0(1)\}$$

și deci

$$(154) \quad \limsup_a [-\ln \varepsilon(\theta)]/M_0\tau \leqslant (1/2)(\theta + \nu)^2\{\limsup_a M_{-\nu}\tau/M_0\tau\}.$$

Lema urmează făcînd $\nu \to 0$ în (154).

Observație. Din (153) urmează că

$$(155) \qquad \limsup_a [-\ln \varepsilon(\theta)]/M_{-\nu}\tau \leqslant \frac{1}{2}(\theta + \nu)^2, \ \nu\theta > 0.$$

Marginea dată de lema 3 nu este satisfăcătoare deoarece conține comportarea intrinsecă a timpului de oprire. (Același lucru poate fi spus de

Scanned with OKEN Scanner

lema 4). O margine brută, însă care nu suferă de acest neajuns, se obține din lema 3 observînd că

$$M_0\tau \geqslant \bar{\varepsilon}(0) M_0(\tau|A).$$

Această margine este:

$$\limsup_a [-\ln \varepsilon(\theta)]/M_0\tau \leqslant \frac{1}{2}\theta^2 \liminf_a \bar{\varepsilon}(0), \quad \theta > 0 \tag{156}$$

și aparent nu poate fi atinsă de un test consistent. Adeseori (156) nu depinde de $\varepsilon(0)$. Atunci luînd inf. după toate valorile lui $\varepsilon(0)$,

$$\limsup_a [-\ln \varepsilon(0)]/M_0\tau \leqslant \frac{1}{2}\theta^2, \quad \theta \neq 0. \tag{157}$$

În particular (157) are loc pentru testele nesecvențiale. Mai general, (157) are loc pentru testele care sînt, într-un sens, simetrice. Aceasta este arătat în.

PROPOZIȚIA 2. (Berk (1976)). *Pentru testele consistente, dacă*

$$\limsup_a M_0(\tau|A)/M_0\tau \leqslant 1 \geqslant \limsup_a M_0(\tau|R)/M_0\tau, \tag{158}$$

atunci are loc (157). *De altfel urmează aceleași concluzii dacă*

$$\lim_a [-\ln \varepsilon(\theta)]/M_0\tau = \lim_a [-\ln \varepsilon(-\theta)]/M_0\tau. \tag{159}$$

Reciproc, dacă are loc (159) *și valoarea comună este* $\frac{1}{2}\theta^2$, *atunci* (158) *are loc în mod necesar* (*cu condiția ca* $\varepsilon(0)$ *să nu fie degenerată*).

Observație. Deoarece (dacă $\varepsilon(0)$ nu este degenerată)

$$M_0\tau = \bar{\varepsilon}(0) M_0(\tau|A) + \varepsilon(0) M_0(\tau|R),$$

(158) este echivalentă cu

$$\begin{gathered} \lim_a M_0(\tau|A)/M_0\tau = \lim_a M_0(\tau|R)/M_0(\tau) = 1 \text{ sau} \\ \liminf_a M_0(\tau|A)/M_0\tau \geqslant 1 \leqslant \liminf_a M_0(\tau|R)/M_0\tau. \end{gathered} \tag{160}$$

Demonstrația propoziției 2 este dată după lema 5.

Următorul caz special al relației (155) prezintă interes. Luînd $\nu = \theta$, obținem

$$\limsup_a [-\ln \varepsilon(\theta)]/M_{-\theta}\tau \leqslant 2\theta^2, \quad \theta \neq 0. \tag{161}$$

Scanned with OKEN Scanner

Nu există o margine superioară finită pentru

$$\limsup_a [-\ln \varepsilon(\theta)]/M_\theta\tau$$

(a se vedea (170) și (195). Această dificultate este înlăturată considerînd eroarea totală.

LEMA 5. (Berk (1976)). *Pentru testele consistente*

$$\limsup_a [-\ln \gamma(\theta)]/M_\theta\tau \leqslant \frac{1}{2}\theta^2, \qquad \theta \neq 0 \tag{162}$$

și

$$\limsup_a [-\ln \gamma(\theta)]/M_\theta\tau \leqslant 2\theta^2, \qquad \theta \neq 0 \tag{163}$$

Demonstrație. Hoeffding (1960), ec. (1.4)) dă o margine inferioară pentru $M_\nu\tau$, care, luînd (în notația sa) $\theta_0 = \nu$, $\theta_1 = -\theta_2 = \theta$, devine aici

$$M_\nu\tau \geqslant \{[c^2 - \zeta \ln \gamma(\theta)]^{\frac{1}{2}} - c\}^2/\zeta^2, \tag{164}$$

unde $\zeta = \frac{1}{2}(|\theta| + |\nu|)^2$ și c este o constantă care nu depinde de a. Luînd $\nu = 0$, din (164) prin împărțire la $M_\theta\tau$ obținem (162). (163) urmează similar luînd $\nu = \theta$.

Marginea în (163) poate fi atinsă de T.S.R.P., însă nu de un test nesecvențial. Acest ultim fapt urmează din marginea superioară nesecvențială dată de Chernoff (1952), care în acest caz este $\frac{1}{2}\theta^2$.

Demonstrația propoziției 2. Prima aserțiune urmează din lema 3; a doua din (162). În final dacă limita comună în (159) este $\frac{1}{2}\theta^2$, urmează din (149) și (150) că (160) și de asemenea (158) au loc.

8.2. Teste nesecvențiale U.C.M.P

Luăm $\tau = a$ și $A = \{X(a) \leqslant \eta a^{1/2}\}$, unde η este o cuantilă corespunzătoare a repartiției $N(0, 1)$. Avem

$$\varepsilon(\theta) = \Phi(\eta \operatorname{sgn} \theta - |\theta| a^{\frac{1}{2}}) = e^{-\frac{1}{2}\theta^2 a + o(a)}, \quad \theta \neq 0 \tag{165}$$

ultima egalitate avînd loc dacă $|\eta| = o(a^{\frac{1}{2}})$. Astfel

$$\lim_a [-\ln \varepsilon(\theta)]/a = \frac{1}{2}\theta^2, \quad \theta \neq 0. \tag{166}$$

Scanned with OKEN Scanner

Atunci se vede că (157) are loc ca egalitate; adică judecînd din nou funcţiile caracteristice în zero, $[\varepsilon(0), M_0\tau]$, testul nesecvenţial U.C.M.P. este asimptotic la fel de puternic ca orice test secvenţial prezentînd condiţiile de simetrie ale propoziţiei 1. Notăm de asemenea că este atinsă marginea în (162) şi nu sînt atinse acelea din (161) şi (163).

8.3. T.S.R.P.

Pentru λ şi μ fixaţi, luăm

$$\tau = \inf\{t : X(t) \notin (-\lambda a,\ \mu a)\}$$

şi $A = (X(\tau) = -\lambda a)$. Acesta este un T.S.R.P. pentru verificarea ipotezei $-\theta$ faţă de θ cu erorile $\varepsilon(-\theta)$ şi $\varepsilon(\theta)$ corespunzătoare şi este local C.M.P. pentru verificarea ipotezei H_1 faţă de H_2 pentru $[\varepsilon(0), M_0\tau]$ dat (Berk (1975)). Comportarea asimptotică a lui τ este dată de cele ce urmează

TEOREMA 21. (Berk (1976)) *Sub* P_θ

$$\tau/a \to \mu/\theta\ , \quad \theta > 0$$

$$\to \lambda/|\theta|, \quad \theta < 0$$

şi $M_\theta\tau/a$ *are aceeaşi limită. Pentru* $\theta = 0$, $\tau \sim a^2\tau(1)$, *unde* $\tau(1)$ *este timpul de stopare cînd* $a = 1$. *În particular* $M_0\tau = \lambda\mu a^2$.

Demonstraţie. Considerăm $\theta > 0$. Fie $X_x = \inf_{t \geqslant 0} X(t)$. Deoarece $P_\theta(X(t) \to \infty) = 1$, $P_\theta(X_x > -\infty) = 1$. Aceasta antrenează $P_\theta(I_R \to 1) = 1$. Avem

$$X(\tau) = \mu a I_R - \lambda a I_A \tag{167}$$

împărţim prin τ şi facem $a \to \infty$. Avem $P_\theta(\lim_a \tau = \infty) = 1$, astfel că $P_\theta(\lim_a X(\tau)/\tau = \theta) = 1$. Urmează că $P_\theta(\lim_a \mu a/\tau = \theta) = 1$. Convergenţa corespunzătoare pentru $M_\theta\tau/a$ urmează din

$$M_\theta\tau = M_\theta X(\tau) = \bar{\varepsilon}(\theta)\mu a - \varepsilon(\theta)\lambda a;$$

notăm că $\varepsilon(0) \to 0$ cînd $a \to \infty$. Rezultatul pentru $\theta = 0$ urmează înlocuind $X(t)$ prin $a\,X(t/a^2)$, care are aceeaşi repartiţie cînd $\theta = 0$.

Formula lui Wald pentru rata erorii T.S.R.P., care este exactă în acest caz, este

$$\varepsilon(\theta) = (e^{-2\theta\lambda a} - e^{-2\theta(\lambda+\mu)a})/(1 - e^{-2\theta(\lambda+\mu)a}) = e^{-2\theta\lambda a[1+o(1)]}, \quad \theta > 0 \tag{168}$$

astfel ca

$$\lim_a [-\ln \varepsilon(\theta)]/a = 2\lambda\theta, \quad \theta \leqslant 0. \tag{169}$$

Scanned with OKEN Scanner

Urmează că marginea din (161) este atinsă ca și (163) dacă $\lambda \leqslant \mu$. (Notăm că $\varepsilon(0) = \lambda/(\lambda + \mu)$ astfel ca $\lambda \leqslant \mu \equiv \varepsilon(0) \leqslant \frac{1}{2}$). De asemenea.

$$\lim_{a} [-\ln \varepsilon(\theta)]/M_0\tau = 2\lambda\theta^2/\mu, \qquad \theta \geqslant 0. \tag{170}$$

Toate rapoartele care conțin $M_0\tau$ tind la zero, ca $M_0\tau = 0(M_0\tau)$. Astfel T.S.R.P. este foarte ineficient cînd îl judecăm după $M_0\tau$, fenomen care este bine cunoscut (Bechhofer (1960), Berk (1973)). *Aceasta sugerează* că dacă testele secvențiale sînt comparate prin funcțiile C.O. în zero, T.S.R.P. nu va fi la fel de puternic ca alte teste secvențiale. În particular, T.S.R.P. nu va fi comparat favorabil în acest mod cu testul nesecvențial U.C.M.P. Studii numerice arată că testul nesecvențial este mai puternic, exceptînd pentru θ în vecinătatea lui zero (T.S.R.P. este local C.M.P.).

8.4. T.S.R.P. trunchiat

Considerăm un T.S.R.P. trunchiat; efectul trunchierii este printre altele de a face ca $M_0\tau$ să crească în aceeași rată ca $M_0\tau$, $\theta \neq 0$. Pentru λ și μ pozitivi fixați și η fixat, fie

$$\sigma = \inf \{t : X(t) \notin (-\lambda a, \mu a)\},$$

$\tau = \sigma \wedge a$ și $A = (X(\tau) < \eta a^{\frac{1}{2}}) \cdot \varepsilon(0)$ converge către

$$P_0(X(a) \geqslant \eta a^{1/2}) = 1 - \Phi(\eta).$$

Deci η poate fi ales să dea pragul dorit (În particular, pentru alegerea naturală $\eta = 0$, $\varepsilon(0) \to \frac{1}{2}$, chiar dacă $\lambda \neq \mu$). Comportarea asimptotică a lui τ este dată în cele ce urmează

TEOREMA 22. (Berk (1976)). *Sub* P_θ,

$$\begin{aligned} \tau/a &\to \mu/\theta \quad , \qquad \theta > \mu \\ &\to 1 \quad , \qquad -\lambda \leqslant \theta \leqslant \mu \\ &\to \lambda/|\theta|, \quad \theta < -\lambda \end{aligned}$$

Limita corespunzătoare pentru $M_0\tau/a$ *este aceeași.*

Demonstrație. Pentru $\theta \neq 0$, rezultă din rezultatele corespunzătoare pentru σ, care sînt date în teorema 21. Pentru $\theta = 0$, rezultă din (167) care, prin împărțire la σ, antrenează

$$P_0(a/\sigma \to 0) = 1.$$

Scanned with OKEN Scanner

Rezultatul corespunzător pentru $M_0\tau/a$ urmează din convergența dominantă, deoarece $\tau/a \leqslant 1$.

Comportarea corespunzătoare pentru $\varepsilon(\theta)$ este dată de

$$\lim_a [-\ln \varepsilon(\theta)]/a = \frac{1}{2}\theta^2, \qquad 0 < \theta \leqslant 4\lambda$$

$$= 2\lambda\theta, \qquad \theta > 4\lambda. \tag{171}$$

Stabilim (171) cu ajutorul lemelor 6 și 7. Începem arătînd că

$$\varepsilon(\theta) = P_0 A(\sigma < a) + P_0 A(\sigma \geqslant a), \qquad \theta > 0, \tag{172}$$

și că $A(\sigma \geqslant a)$ este un eveniment determinat de $\{X(t) : 0 \leqslant t \leqslant a\}$. Atunci folosind (147), avem

$$\varepsilon(\theta) = \int_{A(\sigma<a)} e^{\theta(X(\sigma)-\frac{1}{2}\theta^2\sigma}\, dP_0 + \int_{A(\sigma\geqslant a)} e^{\theta X(a)-\frac{1}{2}\theta^2 a}\, dP_0 =$$

$$= e^{-\lambda\theta a} \int_{A(\sigma<a)} e^{-\frac{1}{2}\theta^2\sigma}\, dP_0 + e^{-\frac{1}{2}\theta^2 a} \int_{A(\sigma\geqslant a)} e^{\theta X(a)}\, dP_0, \quad \theta > 0. \tag{173}$$

Studiem comportarea acestor ultime două integrale în următoarele leme :

LEMA 6. (Berk 1976)). *Avem*

$$\int_{A(\sigma<a)} e^{-\frac{1}{2}\theta^2\sigma}\, dP_0 \leqslant e^{-\lambda\theta a}, \quad \theta > 0 \tag{174}$$

$$\lim_a e^{\lambda\theta a} \int_{A(\sigma<a)} e^{-\frac{1}{2}\theta^2\sigma}\, dP_0 = 1, \quad \theta > \lambda \tag{175}$$

și

$$\int_{A(\sigma<a)} e^{-\frac{1}{2}\lambda^2\sigma}\, dP_0 = e^{-\lambda^2 a + \theta(a)}. \tag{176}$$

Demonstrație. Luăm $\theta > 0$. Folosind (147) avem

$$1 \geqslant P_{-\theta} A(\sigma < a) = e^{\lambda\theta a} \int_{A(\sigma<a)} e^{-\sigma\theta^2/2}\, dP_0,$$

Scanned with OKEN Scanner

care dă (174). În continuare notăm că

$$P_{-\theta}A(\sigma \geqslant a) \leqslant P_{-\theta}(X(a) > -\lambda a) \leqslant \frac{1}{2}, \quad \theta = \lambda$$

(177)

$$\leqslant e^{-\frac{1}{2}a(\theta-\lambda)^2}, \quad \theta > \lambda \text{ și } a \text{ mare.}$$

Deoarece pentru $\theta > 0$, $\bar{\varepsilon}(-\theta) \to 1$, urmează că

$$\liminf_a e^{\lambda\theta a} \int_{A(\sigma<a)} e^{-\frac{1}{2}\theta^2\sigma}\, dP_0 \geqslant \frac{1}{2}, \quad \theta = \lambda$$

(178)

$$\geqslant 1, \qquad \theta > \lambda.$$

(178) și (174) antrenează (175) și (176).

LEMA 7. (Berk (1976))

$$\int_{A(\sigma \geqslant a)} e^{\theta X(a)}\, dP_0 = e^{\theta(a)}, \quad \theta > 0.$$

Demonstrație. Notăm că

$$(179) \quad 0 \leqslant \int_{(X(a)<\eta a^{\frac{1}{2}})} e^{\theta X(a)}\, dP_0 - \int_{A(\sigma \geqslant a)} e^{\theta X(a)}\, dP_0 \leqslant e^{\theta\eta a^{\frac{1}{2}}} P_0(\sigma < a).$$

Presupunem $\lambda \leqslant \mu$. Atunci

$$P_0(\sigma < a) = P_0(\sup_{0<t<a} |X(t)| \geqslant \lambda a) =$$

(180)

$$= P_0(\sup_{0<s<1} |X(s)| \geqslant \lambda a^{1/2}) \leqslant 4P_0(X(1) \geqslant \lambda a^{\frac{1}{2}}) \leqslant$$

$$\leqslant e^{-\frac{1}{2}\lambda^2 a} \text{ pentru } a \text{ mare.}$$

Urmează că

$$(181) \quad \int_{(X(a)<\eta a^{\frac{1}{2}})} e^{\theta X(a)}\, dP_0 = e^{\frac{1}{2}\theta^2 a}[1 - \Phi(\theta a^{\frac{1}{2}} - \eta)] = e^{\theta(a)}.$$

Lema urmează din (179)—(181).

Acum (171) urmează din (173) și din lemele 6 și 7.

Combinînd teorema 22 și (171), găsim

$$\lim_a [-\ln \varepsilon(\theta)]/M_0\tau = \frac{1}{2}\theta^2, \qquad 0 \leqslant \theta \leqslant 4\lambda,$$

(182)

$$= 2\lambda\theta, \qquad 4\lambda < \theta;$$

și (157) are loc pentru $-4\mu \leqslant \theta \leqslant 4\lambda$.

Scanned with OKEN Scanner

Avem

$$\lim_a [-\ln \varepsilon(\theta)]/M_0\tau = \frac{1}{2}\theta^2, \qquad 0 \leqslant \theta \leqslant \mu \wedge 4\lambda,$$

(183)

$$= 2\lambda\theta^2/\mu, \qquad \mu \vee 4\lambda \leqslant \theta.$$

Dacă $4\lambda \neq \mu$, limita pentru $\mu \wedge 4\lambda < \theta < \mu \vee 4\lambda$ depinde dacă $4\lambda < \mu$ sau viceversa. În orice rată, pentru cazul simetric $\mu = \lambda$, cea mai bună rată este atinsă în (183) pentru $|\theta| \geqslant 4\lambda$ ((161)). De asemenea

$$\lim_a [-\ln \varepsilon(\theta)]/M_{-\theta}\tau = \begin{cases} \frac{1}{2}\theta^2, & 0 \leqslant \theta \leqslant \lambda, \\ \theta^3/2\lambda, & \lambda < \theta < 4\lambda, \\ 2\theta^2, & 4\lambda \leqslant \theta, \end{cases} \tag{184}$$

astfel că marginea în (161) este atinsă pentru $\theta \notin (-4\mu, 4\lambda)$. Dacă $\lambda = \mu$, din (184) obţinem

$$\lim_a [-\ln \gamma(\theta)]/M_\theta\tau \text{ (pentru } \theta \geqslant 0),$$

arătînd că marginea în (163) este, de asemenea, atinsă în acest caz, pentru $|\theta| \geqslant 4\lambda$. Prin contrast, dacă $4\lambda \leqslant \mu$,

$$\lim_a [-\ln \gamma(\theta)/M_\theta\tau = \begin{cases} 2\theta^2, & \theta \leqslant -4\lambda\mu, \\ |\theta|^3/2\lambda, & -4\mu < \theta < -\lambda, \\ \frac{1}{2}\theta^2, & -\lambda \leqslant \theta \leqslant 4\lambda, \\ 2\lambda\theta, & 4\lambda < \theta < \mu, \\ 2\lambda\theta^2/\mu, & \mu \leqslant \theta, \end{cases} \tag{185}$$

astfel că marginea în (163) este atinsă numai pentru $\theta \leqslant -4\mu$.

8.5. T.S.R.P. trunchiat II

Se poate obiecta că punctul de trunchiere este ales arbitrar să crească cu aceeaşi rată ca marginile orizontale. Sînt de asemenea posibile puncte de trunchiere cu creşteri cu rate diferite. Dacă punctul de trunchiere creşte mai încet se obţine, asimptotic un test nesecvenţial. Dacă creşterea este mai rapidă se obţine un T.S.R.P. Vom arăta că această ultimă presupunere este corectă. Fie

$$\sigma = \inf\{t,\ X(t) \notin (-\lambda a,\ \mu a)\},$$

$\tau = \sigma \wedge a^2$ şi $T = (X(\tau) < 0)$. Comportarea asimptotică a lui τ este dată de

TEOREMA 23. (Berk (1976)). *Sub* P_0

$$\tau/a \to \mu/\theta \quad , \qquad \theta > 0$$

$$\to \lambda/|\theta|, \qquad \theta < 0.$$

$M_0\tau/a$ *are aceeași limită. Cînd* $\theta = 0$, $\tau \sim a^2\tau(1)$. *În particular* $M_0\tau = a^2 M_0\tau(1)$.

Observație. Deoarece $\tau(1) \leqslant 1$ și $P_0(\tau(1) < 1) > 0$, $M_0(\tau) < 1$.

Demonstrație. Pentru $\theta \neq 0$, prima parte a teoremei rezultă din rezultatele corespunzătoare pentru σ, care sînt date în teorema 21. Pentru a obține media, avem

$$M_0\tau/a \leqslant M_\theta\ \sigma/a$$

ceea ce conduce la jumătate din rezultat. Cealaltă jumătate se obține prin aplicarea lemei lui Fatou la $M_0\tau/a$. Rezultatul pentru $\theta = 0$ urmează ca în teorema 21.

TEOREMA 24. (Berk (1976)). *Pentru* $\theta > 0$, $\lim_a [-\ln \varepsilon(\theta)]/a = 2\lambda\theta$.

Demonstrație. Descompunerea (167) devine

$$\varepsilon(\theta) = e^{-\lambda\theta a} \int_{A(\sigma < a^2)} e^{-\frac{1}{2}\theta^2\sigma}\, dP_0 + e^{-\frac{1}{2}\theta^2 a^2} \int_{A(\sigma \geqslant a^2)} e^{\theta X(a^2)}\, dP_0. \tag{186}$$

În acest caz al doilea termen este neglijabil în comparație cu primul. Din nou notăm că $\bar{\varepsilon}(-\theta) \to 1$ și deoarece (pentru a mare)

$$P_{-\theta}(A(\sigma \geqslant a^2) \leqslant P_{-\theta}(X(a^2) > -\lambda a) \leqslant \exp\left\{-\frac{1}{2}(\theta a - \lambda)^2\right\} \to 0,$$

$P_{-\theta}A(\sigma < a^2) \to 1$. Adică

$$\lim_a e^{\lambda\theta a} \int_{A(\sigma < a^2)} e^{-\frac{1}{2}\theta^2\sigma}\, dP_0 = 1, \quad \theta > 0. \tag{187}$$

Deoarece $X(a^2) < 0$ pe $A(\sigma \geqslant a^2)$, al doilea termen din (186) are ordinul de mărime mai mic decît primul. Teorema urmează din (186) și (187).

Observație. Urmează că toate rapoartele considerate în 8.3 au în acest subparagraf aceeași limită. Singurul efect al trunchierii, asimptotic, este reducerea lui $M_0\tau$, însă este de ordin mai mare decît $M_0\tau$, $\theta \neq 0$.

8.6. Test de semnificație repetat

Samuel-Cahn (1974) discută teste de semnificație repetate pentru media normală. Versiunea timpului continuu a acestor procedee este următoarea: Pentru μ pozitiv fixat, fie

$$\sigma = \inf\{t : X(t) \geqslant \mu a^{\frac{1}{2}}\},\ \tau = \sigma \wedge a \text{ și } A = (X(\tau) < \mu a^{\frac{1}{2}}).$$

Scanned with OKEN Scanner

Aici μ este o cuantilă a repartiției $N(0, 1)$, aleasă pentru a da $\varepsilon(0)$ dorit. Relația dintre μ și $\varepsilon(0)$ este dată în relația (188) (care urmează). Acest test poate fi descris după cum urmează. Timpul de observație a total este ales înainte. Dacă la orice timp aprior lui a, $X(t)$ este semnificativ, judecat după valoarea critică corespunzătoare pentru timpul a, experimentul se oprește și H_1 este respinsă. Numai dacă $X(t)$ încetează să fie semnificativ pentru orice $0 \leqslant t \leqslant a$, H_1 este acceptată.

Aici este natural că marginea superioară și punctul de trunchiere să crească în rate diferite.

TEOREMA 25. (Berk (1976)). *Pentru* $\theta > 0$,

$$\tau/a^{\frac{1}{2}} \to \mu/\theta[P_\theta] \quad \text{și} \quad \tau/a \to 1[P_{-\infty}].$$

Mediile corespunzătoare au aceleași limite. Cînd $\theta = 0$, $\tau \sim a\tau(1)$. *În particular,* $M_0\tau = aM_0\tau(1) < a$.

Demonstrație. Pentru deplasare pozitivă, demonstrația rezultă din faptul că $X(\sigma) = \mu a^{\frac{1}{2}}$ și că $X(\sigma)/\sigma \to \theta[P_\theta]$. Astfel $P_\theta(\sigma/a^{\frac{1}{2}} \to \mu/\theta) = 1$ și similar pentru τ. Pentru medie, folosind versiunea lemei lui Wald dată de Robbins, Samuel (1966),

$$M_\theta X(\sigma) = \theta M_\theta \sigma = \mu a^{\frac{1}{2}},$$

deci

$$M_\theta \sigma/a^{\frac{1}{2}} = \mu/\theta \text{ și } M_\theta \tau/a^{\frac{1}{2}} \leqslant \mu/\theta.$$

De asemenea, după Fatou, $\liminf_a M_\theta \tau/a^{\frac{1}{2}} \geqslant \mu/\theta$.

Pentru deplasare negativă

$$P_{-\theta}(\sigma < a,\ a > x) \leqslant P_\theta(\sup_{0<t<\infty} [X(t) - \theta t] > \mu x^{\frac{1}{2}}) \to 0 \text{ ca } x \to \infty.$$

Deci $P_{-\theta}(\tau/a \to 1) = 1$. Convergența medie urmează din convergența dominată. Pentru $\theta = 0$, înlocuind $X(t)$ prin $a^{\frac{1}{2}}X(t/a)$ obținem rezultatul dorit.

Observație. Înlocuind $X(t)$ prin $a^{\frac{1}{2}}X(t/a)$ obținem

$$\varepsilon(0) = P_0(\sup_{0<t<1} X(t) \geqslant \mu) = 2[1 - \Phi(\mu)]. \tag{188}$$

Notăm o altă consecință a teoremei 25. Avem $M_0(\tau|A) = a$, astfel că

$$\lim_a M_0(\tau|A/M_0\tau = 1/M_0\tau(1) > 1.$$

Deoarece

$$M_0\tau = \bar{\varepsilon}(0)M_0(\tau|A) + \varepsilon(0)M_0(\tau|R),$$

urmează că

$$\lim_a M_0(\tau|R)/M_0\tau < 1.$$

Deci după lema 3 pentru $\theta > 0$, $[-\ln \varepsilon(-\theta)]/M_0\tau$ nu poate, la limită să atingă valoarea $\frac{1}{2}\theta^2$. Aceasta se poate vedea după cum urmează

După Samuel-Cohn (1974), avem

$$M_0\tau(1) = [2\Phi(\mu) - 1] + \mu^2[1 - \Phi(\mu)] + 2\mu\varphi(u) \tag{189}$$

şi

$$P_\theta(\sup_{0<t<a} X(t) < \mu a^{\frac{1}{2}}) = \Phi(\mu - \theta a^{\frac{1}{2}}) - e^{2\mu\theta a^{\frac{1}{2}}}\Phi(-\mu - \theta a^{\frac{1}{2}}) =$$

$$= e^{-\frac{1}{2}\theta^2 a + 0(a)} \text{ dacă } \theta > 0. \tag{190}$$

Pentru $\theta > 0$, (190) este $\varepsilon(\theta)$, astfel

$$\lim_a [-\ln \varepsilon(\theta)]/M_0\tau = \theta^2/2M_0\tau(1) > \frac{1}{2}\theta^2, \quad \theta > 0, \tag{191}$$

astfel că (157) nu este adevărată pentru acest test. În fapt, marginea dată de lema 3 este atinsă în acest caz, cu toate că după (188) şi (189), (156) nu este atinsă; în acest caz marginea este $\theta^2/2[2\Phi(\mu) - 1]$.

Pentru $-\theta < 0$, (190) dă

$$\varepsilon(-\theta) = \exp[-2\mu\theta a^{\frac{1}{2}}[1 + 0(1)]], \tag{192}$$

deci

$$\lim_a [-\ln \varepsilon(-\theta)]/M_0\tau = 0, \quad \theta > 0. \tag{193}$$

Contrastul dintre (191) şi (193) reflectă natura asimetrică a acestui test. Pe de altă parte, din (192) şi teorema 25, vedem că

$$\lim_a [-\ln \varepsilon(-\theta)]/M_0\tau = 2\theta^2, \quad \theta > 0, \tag{194}$$

astfel că marginea în (161) este atinsă.

Alte indicaţii privind natura asimetrică a testului sînt date de

$$\lim_a [-\ln \varepsilon(\theta)]/M_0\tau = \infty, \quad \theta > 0$$

$$= 0, \quad \theta < 0. \tag{195}$$

În final avem

$$\lim_a [-\ln \gamma(\theta)]/M_0\tau = \lim_a [-\ln \gamma(\theta)]/M_{-\theta}\tau = 0, \quad \theta > 0 \tag{196}$$

şi

$$\lim_a [-\ln \gamma(\theta)]/M_0\tau = 2\theta^2, \quad \theta > 0. \tag{197}$$

Scanned with OKEN Scanner

Capitolul XXV

TESTUL SECVENȚIAL AL RAPORTULUI DE VEROSIMILITĂȚI

§ 1. Estimatori de verosimilitate maximă ai T.S.R.P.

Dacă metoda funcțiilor de pondere a lui Wald nu este posibilă și dacă nu se aplică suficiența în sensul lui Fraser și invarianța, atunci vom căuta un procedeu în care estimațiile vor înlocui valorile adevărate ale parametrilor nedoriți. Orice estimație va fi suficientă. În particular ne vom opri asupra estimatorilor de verosimilitate maximă care au asimptotic proprietăți optime.

Testul secvențial al raportului de verosimilități a fost propus de Bartlett (1946) și de Cox (1963). Vom da mai întîi procedeul lui Cox care este o modificare a procedeului lui Bartlett (1946). Presupunem că sîntem interesați în verificarea ipotezei :

$$H_0 : \gamma = \gamma_0 \text{ față de } H_1 : \gamma = \gamma_1,$$

unde δ este un parametru nedorit, nefiind posibilă nici o informare aprioricică asupra sa. Vom presupune că

$$|\gamma_1 - \gamma| \text{ și } |\gamma_0 - \gamma| \text{ sînt de ordinul } n^{-1/2}$$

unde γ reprezintă valoarea adevărată. Fie $\hat{\gamma}_n$ și $\hat{\delta}_n$ estimatori de verosimilitate maximă pentru γ și δ bazați pe $X_1, \ldots, X_n$. Atunci considerăm procedeul bazat pe

$$Z'_n = \ln \{f(X_n ; \gamma_1, \hat{\delta}_n)/f(X_n ; \gamma_0, \hat{\delta}_n) \tag{1}$$

care este numit raportul de verosimilități secvențial.

Metoda lui Bartlett (1946) implică folosirea a doi estimatori de verosimilitate maximă pentru δ, unul presupunînd $\gamma = \gamma_1$ și altul $\gamma = \gamma_0$. În cele ce urmează vom descrie acest procedeu. Observăm că $\exp Z'_n$ nu este raportul densităților și deci marginile aproximative în termeni de probabilitățile erorilor nu pot fi folosite fără justificare.

Scanned with OKEN Scanner

Dezvoltările în serii Taylor pentru $\ln f(X_n, \gamma_i; \hat{\delta}_n)$ pentru $i = 0, 1$ în jurul valorii adevărate (γ, δ) dau

$$Z'_n = (\gamma_1 - \gamma_0)\frac{\partial \ln f(X_n; \gamma, \delta)}{\partial \gamma} +$$

$$+ \frac{1}{2}(\gamma_1 - \gamma_0)(\gamma_1 + \gamma_0 - 2\gamma)\frac{\partial^2 \ln f(X_n; \gamma, \delta)}{\partial \gamma^2} + \tag{2}$$

$$+ (\gamma_1 - \gamma_0)(\hat{\delta}_n - \delta)\frac{\partial^2 \ln f(X_n; \gamma, \delta)}{\partial \gamma \partial \delta} + R_n(X_n),$$

unde R_n conține derivatele de ordinul doi și converge în probabilitate către zero cînd $|\gamma_i - \gamma|$, $i = 0, 1$ sînt suficient de mici și derivatele de ordinul doi sînt netede. În continuare, dezvoltînd următoarele funcții care sînt soluții ale ecuațiilor

$$\frac{\partial \ln f((X_n, \hat{\gamma}_n, \hat{\delta}_n)}{\partial \hat{\gamma}_n} = \frac{\partial \ln f(X_n, \hat{\gamma}_n, \hat{\delta}_n)}{\partial \hat{\delta}_n} = 0, \tag{3}$$

în jurul valorilor $\hat{\gamma}_n$ și $\hat{\delta}_n$, obținem :

$$\frac{\partial \ln f(X_n; \gamma, \delta)}{\partial \gamma} = -(\hat{\gamma}_n - \gamma)\frac{\partial^2 \ln f(X_n; \gamma, \delta)}{\partial \gamma^2} -$$

$$-(\hat{\delta}_n - \delta)\frac{\partial^2 \ln f(X_n, \gamma, \delta)}{\partial \gamma \partial \delta} + R'_n(X_n) \tag{4}$$

și

$$\frac{\partial \ln f(X_n; \gamma, \delta)}{\partial \delta} = -(\hat{\gamma}_n - \gamma)\frac{\partial^2 \ln f(X_n; \gamma, \delta)}{\partial \gamma \partial \delta} -$$

$$-(\hat{\delta}_n - \delta)\frac{\partial^2 \ln f(X_n; \gamma, \delta)}{\partial \delta^2} + R''_n(X_n), \tag{5}$$

unde R'_n și R''_n converg în probabilitate către zero și deci pot fi neglijate pentru n suficient de mare. Înlocuind (4) în (2) și ignorînd termenii de ordinul 0(1) obținem :

TEOREMA 1 (Cox (1963)). *În condiții de regularitate convenabile, obținem*

$$Z'_n \simeq (\gamma_1 - \gamma_0) I_{\gamma\gamma}\, n\left(\hat{\gamma}_n - \frac{1}{2}(\gamma_0 + \gamma_1)\right), \tag{6}$$

unde $n\,\hat{\gamma}_n$ *este asimptotic normal cu media* $n\gamma$ *și dispersia*

$$nI_{\delta\delta}/(I_{\gamma\gamma}I_{\delta\delta} - I^2_{\gamma\delta}).$$

Scanned with OKEN Scanner

De asemenea din capitolul IX, (4) și (6) vedem că pentru valori mari ale lui n, $n\hat{\gamma}_n$ este suma variabilelor $\{Y_i\}$, $i = 1, 2, \ldots, n$ independente și identic repartizate, unde

$$(7)\quad Y_i - \gamma = [I_{\gamma\gamma}I_{\delta\delta} - I_{\gamma\delta}^2]^{-1}[I_{\delta\delta}\partial \ln f/\partial\gamma - I_{\gamma\delta}\partial \ln f(X_n;\ \gamma,\ \delta)/\partial\delta].$$

Acum putem folosi aproximațiile lui Wald pentru valorile marginilor în termeni de probabilitățile erorilor. Cu alte cuvinte, pentru valori ale lui n suficient de mari, sînt de asemenea adevărate expresiile pentru funcțiile C.O. și V.M.V.S. Astfel :

$$(8)\quad \begin{aligned} \ln B &= (1 - I_{\gamma\delta}^2/I_{\gamma\gamma}I_{\delta\delta})^{-1} \ln [\beta/(1-\alpha)] \simeq c_n \ln [\beta/(1-\alpha)], \\ \ln A &= (1 - I_{\gamma\delta}^2/I_{\gamma\gamma}I_{\delta\delta})^{-1} \ln [(1-\beta)/\alpha] \simeq c_n \ln [(1-\beta)/\alpha], \end{aligned}$$

unde $c_n = (1 - I^2_{\hat{\gamma}_n, \hat{\delta}_n}/I_{\hat{\gamma}_n, \hat{\gamma}_n} I_{\hat{\delta}_n \hat{\delta}_n})^{-1}$.

Exemplul 1. Presupunem că X_i sînt variabile aleatoare independente identic repartizate $N(\theta,\ \sigma^2)$. Dorim să verificăm ipoteza

$$H_0 : \gamma = \theta/\sigma = \gamma_0 \text{ față de } H_1 : \gamma = \gamma_1 (\gamma_0 < \gamma_1).$$

Aici $\hat{\gamma}_n = \bar{X}_n/s_n$, $\hat{\delta}_n = \hat{\sigma}_n = s_n$. Astfel :

$$Z_n' = n(\gamma_1 - \gamma_0)\left\{(\bar{X}_n/s_n) - \frac{1}{2}(\gamma_0 + \gamma_1)\right\},\ n = 2, 3, \ldots$$

și

$$I_{\gamma\gamma} = 1,\ I_{\sigma\sigma} = (2 + \gamma^2)/\sigma^2 \text{ și } I_{\gamma\sigma} = \gamma/\sigma.$$

Astfel luăm $c_n = (1 + \bar{X}_n^2/2s_n^2)$ și aplicăm procedeul. *Procedeul anterior este asimptotic echivalent cu testul secvențial.*

Se poate obține testul secvențial al raportului de verosimilități pentru verificarea ipotezei

$H_0 : \theta = \theta_0$ față de $H_1 : \theta = \theta_1$ $(\theta_1 > \theta_0)$ cînd σ este necunoscut. În acest caz nu se aplică suficiența în sensul lui Fraser și nici invarianța. De asemenea se poate obține un procedeu secvențial al raportului de verosimilități pentru problema Behrens-Fisher.

În unele situații se pot calcula ușor estimatorii de verosimilitate maximă $\hat{\gamma}_n$ și $\hat{\delta}_n$. Bartlett (1946) propune ca testul raportului de verosimilități secvențial să fie bazat pe

$$(9)\quad Z_n'' = \ln [f(X_n;\ \gamma_1,\ \hat{\delta}_1)/f(X_n;\ \gamma_0,\ \hat{\delta}_0)],$$

unde $\hat{\delta}_1(\hat{\delta}_0)$ este estimatorul de verosimilitate maximă pentru δ cînd $\gamma = \gamma_1(\gamma_0)$. Vom omite, pentru simplificarea scrierii, indicele n de la δ.

Scanned with OKEN Scanner

TEOREMA 2 (Bartlett (1946)). *În condiții de regularitate convenabil avem :*

$$Z_n'' \simeq (\gamma_1 - \gamma_0)\left[\frac{\partial \ln f(X_n;\ \gamma,\ \delta)}{\partial \gamma} - I_{\gamma\delta}\frac{\partial \ln f(X_n;\ \gamma_1,\ \delta)/I_{\delta\delta}}{\partial \delta}\right] +$$

$$+ \frac{1}{2} n(\gamma_1 - \gamma_0)^2[I_{\gamma\gamma} - I_{\gamma\delta}^2/I_{\delta\delta}]. \tag{10}$$

Demonstrație. Scriem

$$Z_n'' = [\ln f(X_n;\ \gamma_1,\ \hat{\delta}_1) - \ln f(X_n;\ \gamma_0,\ \delta)] -$$

$$- [\ln f(X_n;\ \gamma_0,\ \hat{\delta}_0) - \ln f(X_n;\ \gamma_0,\ \delta)].$$

Dezvoltînd cele două diferențe în serii Taylor, obținem :

$$Z_n'' \simeq (\gamma_1 - \gamma_0)\,\partial \ln f(X_n;\ \gamma_1,\ \delta)/\partial\gamma_1 + (\hat{\delta}_1 - \hat{\delta}_0)\,\partial \ln f(X_n;\ \gamma,\ \delta)/\partial\delta +$$

$$+ \frac{1}{2} n\{(\gamma_1 - \gamma_0)^2 I_{\gamma\gamma} - 2(\gamma_1 - \gamma_0)(\hat{\delta}_0 - \delta)I_{\gamma\delta} + \tag{11}$$

$$+ [(\hat{\delta}_0 - \delta)^2 - (\hat{\delta}_1 - \delta)^2]I_{\delta\delta}\}.$$

De asemenea, deoarece

$$\partial \ln f(X_n;\ \gamma_0,\ \hat{\delta}_0)/\partial\delta \simeq \partial \ln f(X_n,\ \gamma_1,\ \hat{\delta}_1)/\partial\delta + (\gamma_1 - \gamma_0)I_{\gamma\delta},$$

avem :

$$(\hat{\delta}_0 - \hat{\delta}_1) \simeq (\gamma_1 - \gamma_0)I_{\gamma\delta}/I_{\delta\delta}.$$

Folosind aceasta în (11) obținem (10) care este o sumă de variabile aleatoare independente și identic repartizate și deci sînt aplicabile : aproximațiile lui Wald pentru valorile marginilor, funcțiile C.O. și V.M.V.S.

Observație. Cox (1963) a aplicat procedeul secvențial al raportului de verosimilități pentru verificarea anumitor ipoteze privind două proporții binomiale.

§ 2. Testul secvențial al raportului de verosimilități nesfîrșit pentru familii Koopman-Darmois

Mai întîi vom prezenta un rezultat obținut de Lorden (1970) privind excesul depășirii marginii. În T.S.R.P. un rol important îl joacă sumele cumulate. Fie $S_n = X_1 + \ldots + X_n$ suma a n variabile aleatoare independente cu media comună $\mu > 0$. Timpul de stopare este dat de

$$N(t) = \inf\{n : S_n > t\}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Ecuaţia lui Wald (1946)

$$\mu MN(t) = MS_{N(t)}$$

indiferent dacă $\sup_n M|X_n|$ şi $MN(t)$ sînt finite se poate rescrie

$$\mu MN(t) = t + MR_t,$$

unde $R_t = S_{N(t)} - t$.

DEFINIŢIA 1. Fie rătăcirea aleatoare $(S_n)_{0 \leqslant n < \infty}$ avînd cursul pozitiv şi plecarea din origine cu oprirea pentru prima oară în $S_n > t \geqslant 0$. Fie $N(t) = \inf\{n : S_n > t\}$. Atunci $R_t = S_{N(t)} - t$ poartă numele de excesul depăşirii marginii.

Adeseori se presupune că excesul depăşirii marginii este neglijabil. Wald (1947) a dat o margine superioară pentru $\sup_{t \geqslant 0} MR_t$ în cazul în care X_i sînt independente şi identic repartizate şi anume

$$\sup_{r \geqslant 0} M(X - r | X > r).$$

Această margine este exactă pentru repartiţia exponenţială şi destul de bună pentru multe cazuri în care funcţia de repartiţie F comună are rata hazardului

$$(\mathrm{d}/\mathrm{d}x)\{-\ln [1 - F(x)]\}, \text{ pentru } x \geqslant 0$$

monoton crescătoare. În fapt pentru această clasă de repartiţii supremum expresiei $M(X - r | X > r)$ este atins în $r = 0$ şi deoarece

$$\sup_{t \geqslant 0} MR_t \geqslant MR_0 \geqslant [1 - F(0)]M(X | X > 0),$$

marginea lui Wald este mai mare prin cel mult un factor de $[1 - F(0)]^{-1}$, care este mai mică decît 2. De asemenea marginea lui Wald poate fi dificil de calculat; poate fi infinită chiar dacă $M(X^+)^2$ este finită, unde

$$X^+ = \begin{cases} X, & X > 0 \\ 0, & X < 0, \end{cases}$$

care este condiţia necesară şi suficientă pentru ca $\sup_{t \geqslant 0} MR_t$ să fie finită.

Avem următorul rezultat:

TEOREMA 3 (Lorden (1970)). *Fie $X_1, X_2, \ldots$ variabile aleatoare independente şi identic repartizate cu*

$$M(X) = \mu > 0 \quad \text{şi} \quad M(X^+)^2 < \infty.$$

Fie $S_n = X_1 + \ldots + X_n$, $N(t) = \inf\{n : S_n > t\}$ şi $R_t = S_{N(t)} - t$. Atunci

(12)
$$\sup_{t \geqslant 0} MR_t \leqslant M(X^+)^2/\mu.$$

Demonstrație. Oricare ar fi valorile variabilelor $X_1, X_2, \ldots$, funcția aleatoare $\{R_t\,;\, t>0\}$ este liniară pe bucăți, toate bucățile avînd panta -1. Mai întîi vom presupune că $\{X_i\}$ sînt nenegative.
Pentru $c \geqslant 0$

$$\int_0^c R_t\,dt = \int_0^{S_{N(c)}} R_t\,dt - \int_c^{S_{N(c)}} R_t\,dt = \sum_{n=1}^{N(c)} X_n^2/2 - R_c^2/2 \tag{13}$$

deoarece

$$\int_0^{S_{N(c)}} R_t\,dt = \sum_{i=1}^{N(c)} \int_{S_{i-1}}^{S_i} S_i\,dt - \frac{1}{2} S_{N(c)}^2 = \sum_{i=1}^{N(c)} X_i^2/2$$

și

$$\int_c^{S_{N(c)}} R_t\,dt = \int_c^{S_{N(c)}} S_{N(c)}\,dt - \int_c^{S_{N(c)}} t\,dt = R_c S_{N(c)} - \frac{1}{2}(S_{N(c)}^2 - c^2) = R_c^2/2.$$

Deoarece $R_t \geqslant 0$ pentru toți t, după teorema lui Fubini și ecuația lui Wald $[M(S_N^k \mid \text{acc } H_0) \simeq (\ln B)^k]$ avem

$$\int_0^c MR_t\,dt = (MX^2)MN(c)/2 - MR_c^2/2. \tag{14}$$

Din inegalitatea lui Schwarz și ecuația lui Wald avem

$$\int_0^c MR_t\,dt \leqslant MX^2(c + MR_c)/2\mu - (MR_c)^2/2. \tag{15}$$

Pentru toți $t \geqslant 0$, $u \geqslant 0$, $MN(t+u) \leqslant MN(t) + MN(u)$ deoarece valoarea medie din $N(t+u) - N(t)$ dat $N(t) = n$, $X_1 = x_1, \ldots, X_n = x_n$ este egală cu $MN(u-r)$ unde $r = x_1 + \ldots + x_n - t > 0$ și $N(u-r)$ este zero dacă $r > 0$, astfel că în orice caz

$$MN(u-r) < MN(u).$$

Din ecuația lui Wald urmează că MR_t este o funcție subadditivă de t și în consecință

$$cMR_c/2 \leqslant (c/2) \inf_{0 \leqslant t \leqslant c/2} (MR_t + MR_{c-t}) \leqslant \int_0^{c/2} (MR_t + MR_{c-t})\,dt = \tag{16}$$

$$= \int_0^c MR_t\,dt.$$

Combinînd (15) și (16) avem

$$(MR_c)^2 + (c - MX^2/\mu)MR_c - c(MX^2/\mu) \leqslant 0. \tag{17}$$

Scanned with OKEN Scanner

Membrul stîng al relaţiei (17) este patratic în MR_t care nu este pozitiv numai între rădăcinile sale, $-c$ şi MX^2/μ. Deoarece

$$MR_c \leqslant MX^2/\mu$$

şi deoarece c este arbitrar teorema este demonstrată pentru cazul în care X_t sînt nenegative. Cazul în care $X_1, X_2, \ldots$ pot lua valori negative se reduce la cazul în care X_t sînt nenegative prin considerarea şirului de variabile în trepte pozitive asociate care sînt independente şi identic repartizate ca $S_{N(0)}$ [Blackwell (1953)]. Fie N_1 cel mai mic n pentru care $S_n > 0$ şi scriem $Y_1 = S_{N_1}$; fie N_2 cel mai mic $n > 0$ pentru care $S_{N_1+n} - S_{N_1} > 0$ şi scriem $Y_2 = S_{N_1+N_2} - S_{N_1}$ şi aşa mai departe. Continuînd în acest mod obţinem şirurile

$$N_1, N_2, \ldots; Y_1, Y_2, \ldots$$

de variabile aleatoare independente, pozitive şi identic repartizate astfel ca

$$S_{N_1+\ldots+N_k} = Y_1 + \ldots + Y_k.$$

Fiecare Y_i este repartizat ca $S_{N(0)}$ unde $N(0) = \inf\{n : S_n > 0\}$. Deoarece R_t este pe bucăţi aceeaşi afirmaţie este valabilă şi pentru $X_1, X_2, \ldots$ şi pentru şirul de variabile în trepte $Y_1, Y_2 \ldots$ şi deoarece $S_{N(0)-1} \leqslant 0$, $0 < S_{N(0)} \leqslant X^+_{N(0)}$, din ecuaţia lui Wald şi rezultatul pentru $\{X_i\}$ negative obţinem:

$$\sup_{t>0} MR_t \leqslant \frac{MS^2_{N(0)}}{MS_{N(0)}} \leqslant \frac{M(X^+_{N(0)})^2}{MS_{N(0)}} \leqslant \frac{M[(X_1^+)^2+\ldots+(X^+_{N(0)})^2]}{M(X_1+\ldots+X_{N(0)})} = M(X^+)^2/\mu$$

ceea ce demonstrează teorema

COROLARUL 1. *În ipotezele teoremei 3, dacă* $b \leqslant 0 \leqslant a$ *şi* $N^* = \inf\{n : S_n \notin [b, a]\}$, *atunci*

$$MN^* \leqslant [(1-\beta)a + \beta b]/\mu + M(X^+)^2/\mu^2 \tag{18}$$

unde $\beta = P(S_{N^*} < b)$.

Demonstraţie. Avem

$$S_{N^*} \leqslant \min(S_{N^*}, a) + S_{N^*} - a.$$

Deci

$$MS_{N^*} \leqslant a(1-\beta) + b\beta + M(S_{N^*} - a) \leqslant (1-\beta)a + b\beta + M(X^+)^2/\mu$$

şi ecuaţia lui Wald dă rezultatul dorit.

Folosind corolarul 1 obţinem o margine inferioară pentru β. Pentru T.S.R.P., Wald (1947) stabileşte numai margini superioare pentru α şi β. Totuşi acelaşi argument demonstrează că

$$\alpha/(1-\beta) = M[\exp(-S_{N^*}) | S_{N^*} > a]$$

unde α este probabilitatea erorii de ordinul unu.

Scanned with OKEN Scanner

[Marginea superioară pentru β este obținută din observația că media condiționată este cel mult e^{-a}]. Ținînd seama că dacă $g(x)$ este convexă, atunci

$$Mg(X) \geqslant gM(X)$$

și de un argument similar ca acela folosit în corolar, obținem

$$\alpha/(1-\beta) \geqslant \exp\{-M[S_{N^*} | S_{N^*} > a]\} \geqslant \exp\left\{-\left[a + \frac{M(X^+)^2}{(1-\beta)\mu}\right]\right\}.$$

Folosind marginea superioară $\beta \leqslant e^b$

$$\alpha \geqslant (1-e^b)\exp\left\{-\left[a + \frac{M(X^+)^2}{(1-e^b)\mu}\right]\right\} \tag{19}$$

și un calcul similar folosind repartiția alternativă dă o margine superioară pentru β. Lorden obține margini pentru momentele de ordin superior.

Următoarea teoremă dă rezultate mai slabe însă arată că cel puțin media lui MR_t pe intervalele $[0, c]$, în condiții generale, se comportă bine.

TEOREMA 4. (*Lorden (1970)*). *Fie $X_1, X_2, \ldots$ variabile aleatoare pe un spațiu probabilistic cu $N(c)$ și R_c definiți anterior. Dacă, pentru $n = 1, 2, \ldots$*

$$M[(X_n^+)^2 | N(c) \geqslant n] \leqslant RM[X_n | N(c) \geqslant n]$$

și MR_c sau $MN(c)$ sînt finite, atunci

$$c^{-1}\int_0^c MR_t\,dt \leqslant \frac{1}{2}R(1 + R/4c), \quad c \geqslant \frac{1}{2}R$$

$$\leqslant R - \frac{1}{2}c, \quad c < \frac{1}{2}R \tag{20}$$

și $MR_c \leqslant R + (Rc)^{1/2}$.

Demonstrație. Relația (13) are loc dacă X_n^2 este înlocuit prin $((S_n - \max_{k<n} S_k)^+)^2$, care nu este mai mare decît $(X_n^+)^2$. Prin urmare

$$\int_0^c R_t\,dt \leqslant \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N(c)}(X_n^+)^2 - \frac{1}{2}R_c^2. \tag{21}$$

Definim

$$I_n = \begin{cases} 1, & N(c) \geqslant n \\ 0, & N(c) < n, \end{cases} \qquad n = 1, 2, \ldots$$

Pentru $m = 1, 2, \ldots$ ipotezele noastre implică

$$\sum_{n=1}^{m} M(X_n^+)^2 I_n \leqslant R\sum_{n=1}^{m} MX_nI_n = RM\sum_{n=1}^{m} X_nI_n \leqslant R(c + MR_c),$$

Scanned with OKEN Scanner

deoarece

$$\sum_{n=1}^{m} X_n I_n \leqslant c, \quad N(c) > m$$

$$= c + R_c, \quad N(c) \leqslant m.$$

Făcînd pe $m \to \infty$

$$R(c+MR_c) \geqslant \sum_{n=1}^{\infty} M(X_n^+)^2 I_n = M \sum_{n=1}^{\infty} (X_n^+)^2 I_n = M \sum_{n=1}^{N(c)} (X_n^+)^2$$

din convergenţa monotonă.

Presupunem că MR_c este finită. Atunci după (21) şi relaţia stabilită, MR_c^2 este finită şi

$$\int_0^c MR_t \, dt = M \int_0^c R_t \, dt \leqslant \frac{1}{2} R(c + MR_c) -$$

(22)

$$- \frac{1}{2} MR_c^2 \leqslant \frac{1}{2} R(c + MR_c) - \frac{1}{2} (MR_c)^2.$$

Membrul drept al relaţiei (22) este patratic în MR_c cu valoarea minimă $\frac{1}{2} cR(1 + R/4c)$, în $MR_c = \frac{1}{2} R$. Aceasta demonstrează (20) cu $c \geqslant \frac{1}{2} R$.

De asemenea, membrul stîng al relaţiei (22) este nenegativ,

$$R(c + MR_c) - (MR_c)^2 \geqslant 0,$$

de unde

$$MR_c \leqslant \frac{1}{2} (R + (R^2 + 4R_c)^{1/2}) \leqslant R + (R_c)^{1/2}.$$

$t > u$ implica $R_t \geqslant R_u - (t - u)$. Urmează că

$$1/c \int_0^c MR_t \, dt \leqslant MR_c + \frac{1}{2} c.$$

Acum, dacă pentru unii $c < \frac{1}{2} R$, (20) nu are loc, atunci

$$R - \frac{1}{2} c - c^{-1} \int_0^c MR_t \, dt \leqslant MR_c + \frac{1}{2} c,$$

astfel ca

(23) $$MR_c > R - c.$$

Pătratul din membrul drept al relației (22) este descrescător pentru $MR_c > \frac{1}{2}R$ și $R - c > \frac{1}{2}R$ deoarece $c < \frac{1}{2}R$. Astfel (22) și (23) implică

$$\int_0^c MR_t\,dt \leqslant \frac{1}{2}R^2 - \frac{1}{2}(R-c)^2 = Rc - \frac{1}{2}c^2,$$

ceea ce contrazice presupunerea că (20) nu are loc.

Rămîne să arătăm că MR_c este finită dacă $MN(c)$ este finită. Mai întîi observăm că

$$(M[X_n^+ | N(c) \geqslant n])^2 \leqslant M[(X_n^+)^2 | N(c) \geqslant n] \leqslant$$

$$\leqslant RM[X_n | N(c) \geqslant n] \leqslant RM[X_n^+ | N(c) \geqslant n]$$

astfel că $M[X_n^+ | N(c) \geqslant n] \leqslant R$. Atunci, dacă $MN(c)$ este finită,

$$c + MR_c = M\sum_{n=1}^{\infty} X_n I_n \leqslant M\sum_{n=1}^{\infty} X_n^+ I_n \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} MX_n^+ I_n \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} RMI_n,$$

și ultima este $RMN(c)$, care este finită. Prin urmare MR_c este finită și teorema este demonstrată.

Următorul rezultat generalizează teorema 3 dînd margini superioare pentru momente arbitrare ale lui R_t. În virtutea relației

$$(MR_t)^p \leqslant M(R_t)^p$$

adevărată pentru $p > 1$, se obțin margini alternative pentru

$$\sup_{t \geqslant 0} MR_t.$$

TEOREMA 5 (Lorden (1970)). *În presupunerile teoremei*

$$\sup_{t \geqslant 0} M(R_t)^p \leqslant (p+2)M(X^+)^{p+1}/\mu(p+1) \tag{24}$$

pentru toți $p > 0$.

Observație. În cazul variabilelor nenegative cu repartiție nearitmetică momentul de ordinul p al repartiției limită al variabilei R_t este $M(X^+)^{p+1}/(p+1)\mu$.

Demonstrație. Prin același argument folosit în teoremele 3 și 4 obținem

$$\int_0^c MR_t^p\,dt \leqslant \frac{M(X^+)^{p+1}}{(p+1)\mu}(c + MR_c) - \frac{M(R_c)^{p+1}}{p+1}. \tag{25}$$

Notînd $X_{N(t)}$ prin L_t, avem

$$\int_0^c ML_t^p\,dt \leqslant \frac{M(X^+)^{p+1}}{\mu}(c + MR_c) - M(R_c)^{p+1}. \tag{26}$$

Acum arătăm că pentru toţi $u,\ v \geqslant 0$,

$$R_{u+v} \leqslant \max\,(R_u,\ L'_v) \tag{27}$$

unde L'_v este repartizată la fel ca L_v. Fie N' cel mai mic $n > N(u)$ astfel ca

$$X_{N(u)+1} + \ldots + X_n > v$$

şi luăm $L'_v = X_{N'}$. Dacă $R_{u+v} > R_u$, atunci $N(u+v) = N'$ şi deci $L'_v = X_{N(u+v)} \geqslant R_{u+v}$. Prin urmare, are loc (27) şi urmează că

$$cMR_c^p \leqslant \int_0^c [MR_t^p + ML_{c-t}^p]\,dt.$$

Combinînd această ultimă inegalitate cu (25) şi (26), obţinem

$$cMR_c^p - \frac{(p+2)M(X^+)^{p+1}}{(p+1)\mu}\,[c + (MR_c^p)^{1/p}] + \frac{(p+2)(MR_c^p)^{(p+1)/p}}{p+1} \leqslant 0.$$

Expresia din membrul stîng este nenegativ dacă luăm

$$MR_c^p = (p+2)M(X^+)^{p+1}/(p+1)\mu.$$

Prin urmare, pentru toţi $c \geqslant 0$, MR_t^p nu este mai mare decît

$$(p+2)M(X^+)^{p+1}/(p+1)\mu.$$

În cazul variabilelor independente şi identic repartizate nenegative se poate aplica teorema 5 cu $p = 2$ şi extinde argumentul teoremei 4 pentru a obţine (cu R definit să fie MX^2/μ)

$$\left|\frac{1}{c}\int_A^{A+c} MR_t\,dt - \frac{1}{2}R\right| \leqslant \frac{1}{c}\left\{\frac{2MX^3}{3\mu} + \frac{R^2}{8}\right\} \text{ pentru toţi } A,\ c \geqslant 0.$$

Acum vom folosi relaţia (27) pentru a obţine margini superioare pentru coada repartiţiei variabilei R_t.

TEOREMA 6 (Lorden (1970)). *Dacă $X_1, X_2, \ldots$ sînt variabile aleatoare independente şi identic repartizate cu $MX = \mu > 0$ şi $M(X^+)^2 \leqslant r\mu < \infty$, atunci pentru toţi $t,\ z \geqslant 0$ avem*

$$P(R_t \geqslant z) \leqslant \mu^{-1} M[(2X - z)I_{\{X \geqslant z\}}]\left(\frac{t+r}{t+z}\right), \tag{28}$$

unde $I_{\{X \geqslant z\}}$ este funcţia indicator a mulţimii în care $X \geqslant z$.

Scanned with OKEN Scanner

Demonstrație. Aplicînd (27) și folosind același fel de argument ca în demonstrația teoremelor 3 și 5, avem

$$tP[R_t \geqslant z] \leqslant \int_0^t P[R_u \geqslant z]\,du + \int_0^t P[L_{t-u} \geqslant z]\,du =$$

$$= MN(t)\,M(X-z)^+ - M(R_t - z)^+ +$$

$$+ MN(t)\,M[XI\{X \geqslant z\}] - M[R_t I\{L_t \geqslant z\}] \leqslant$$

$$\leqslant MN(t)\,M[(2X-z)I\{X \geqslant z\}] - M[R_t I\{R_t \geqslant z\}] \leqslant$$

$$\leqslant \mu^{-1}(t+R)\,M[(2X-z)I\{X \geqslant z\}] - zP[R_t \geqslant z],$$

folosind teorema 3 pentru a estima $MN(t)$.

O indicație asupra formei lui (28) în cazul variabilelor nenegative ne-aritmetice provine din faptul că

$$M[(2X-z)\,I\{X \geqslant z\}]/\mu < M(2X-z)^+/\mu,$$

care este de două ori $\lim\limits_{t\to\infty} P\left[R_t \geqslant \frac{1}{2}z\right]$. Are loc egalitatea dacă $X \equiv \mu$, $z = \mu$ și t este întreg multiplu de μ.

Observație. În teoria reînnoirii, R_t poartă numele de *timpul de așteptare residual* la epoca t și în cazul nenegativ, nearitmetic are aceeași limită ca $Q_t = 1 - S_{N(t)-1}$ care poartă numele de *timp de așteptare risipit*. Indicăm cum se pot folosi rezultatele asupra lui R_t pentru a arăta că au loc în cazul nenegativ pentru Q_t. Folosind aceeași notație ca în obținerea lui (27), observăm că

$$Q'_v \leqslant \max(R_u, L_{u+v}), \tag{29}$$

unde $Q'_v = v - [X_{N(u)+1} + \ldots + X_{N'-1}]$ și este repartizat ca Q_v, considerînd cazurile $N(u+v) < N'$ și $N(u+v) \geqslant N'$.

Prin urmare pentru toți b, $z \geqslant 0$, avem

$$bP[Q_v \geqslant z] \leqslant \int_0^b P[R_u \geqslant z]\,du + \int_v^{b+v} P[L_u \geqslant z]\,du \leqslant$$

$$\leqslant MN(b+v)M\,[(2X-z)I\{X \geqslant z\}] \text{ pentru toți } v \geqslant 0.$$

Împărțind prin b și făcînd $b \to \infty$, obținem că

$$P[Q_v \geqslant z] \leqslant \mu^{-1} M[(2X-z)I\{X \geqslant z\}] \tag{30}$$

rezultat similar cu al teoremei 6.

Pentru (29) este necesar restricția la variabilele nenegative.

Pentru variabile nenegative, teoremele 3 și 5 au loc cu Q_t în locul lui R_t. În demonstrația teoremei 3 se folosește relația

$$Q'_v \leqslant R_u + Q_{u+v},$$

Scanned with OKEN Scanner

care implică

$$bMQ_v \leqslant \int_0^b MR_u\,du + \int_v^{b+v} MQ_u\,du \leqslant \int_0^{b+v} ML_u\,du \leqslant MN(b+v)MX^2,$$

şi concluziile urmează împărţind la b şi făcînd $b \to \infty$. Teorema 5 poate fi demonstrată fie printr-un argument ce foloseşte (29), sau prin integrare directă, folosindu-se (30) pentru a estima probabilităţile cozilor. Deoarece $L_t = R_t + Q_t$, pentru cazul nenegativ, avem

$$\sup_{t \geqslant 0} ML_t \leqslant 2MX^2/\mu$$

şi se obţin estimaţii pentru momente şi probabilităţile cozilor repartiţiei lui L_t.

Acum considerăm testul raportului de verosimilităţi nesfîrşit. Robbins, Sobel şi Starr studiind teste nesfîrşit au continuat experimentul indefinit (cu o probabilitate prestabilită) cînd ipoteza nulă este adevărată şi au oprit experimentul numai dacă se accepta ipoteza alternativă. Metoda lor este mai eficace în verificarea ipotezei privind media variabilei normale. Lorden (1973) a cercetat raportul de verosimilităţi generalizat pentru teste nesfîrşite pentru familiile Koopman-Darmois. Deoarece testele sînt echivalente cu T.S.R.P. unilaterale, se obţine o margine superioară a valorii medii a volumului selecţiei. Pentru familia Koopman-Darmois cu un parametru, Wong (1968) a arătat că probabilităţile erorilor tind către zero că $c \ln c^{-1}$ (cînd $c \to 0$) pentru T.S.R.P. unilaterale, $c (c < 1)$ fiind costul fiecărei observaţii. Lorden (1973) obţine o margine explicită care este de ordinul $c \ln c^{-1}$.

Fie $X_1, X_2, \ldots,$ variabile aleatoare independente şi identic repartizate avînd densitatea

$$f(x;\ \theta) = \exp\,[\theta x - b(\theta)] \text{ pentru } \theta \in (\underline{\theta}, \bar{\theta}) \tag{31}$$

în raport cu o măsură σ-finită nedegenerată. Vom cere ca timpi de oprire N să satisfacă

$$P(N < \infty \,|H_0) < \gamma \text{ pentru } 0 < \gamma < \frac{1}{3} \tag{32}$$

unde

$$H_0 : \theta = \theta_0 \text{ şi } H_1 : \theta > \theta_0.$$

Fără a pierde din generalitate presupunem că $b(0) = 0$. Fie $S = X_1 + \ldots + X_n$, $n = 1, 2, \ldots$ şi observăm că :

$$\ln\left[\prod_1^n \{f(X_i;\ \theta)/f(X_i;\ 0)\}\right] = \theta S_n - nb\,(\theta), \tag{33}$$

astfel ca T.S.R.P. unilateral pentru

$$f(x,\ 0) \text{ faţă de } f(x;\ \theta),\ \theta > 0$$

Scanned with OKEN Scanner

este dat de : oprim de îndată ce :

$$S_n > [\ln \alpha^{-1} + nb(\theta)]/\theta \tag{34}$$

pentru probabilitatea erorii de ordinul 1 $\alpha (0 < \alpha < 1)$ prestabilită [am luat $\beta = 0$ în $A = (1 - \beta)/\alpha$]. Funcţia $b(\cdot)$ este necesar convexă şi infinit derivabilă în $(\underline{\theta}, \bar{\theta})$ care nu trebuie să fie întreg spaţiul natural al familiei de densităţi considerate aici.
Avem

$$M_\theta(X) = b'(\theta),\ D^2_\theta\ (X) = b''(\theta)$$

$$M_\theta\{\ln [f(X;\ \theta)/f(X;\ 0)]\} = \theta b'(\theta) - b(\theta) = I(\theta), \tag{35}$$

$$D^2_\theta\{\ln [f(X,\ \theta)/f(X;\ 0)]\} = \theta^2 b''(\theta).$$

Definim un test al raportului de verosimilităţi nesfîrşit pentru verificarea ipotezei

$$H_0 : \theta = 0 \text{ faţă de } H_1 : \bar{\theta} > \theta \geqslant \theta_1 > 0$$

cu timpul de oprire $N(\theta_1, \alpha)$: cel mai mic $n \geqslant 1$ (sau ∞ dacă nu există un n) astfel ca

$$S_n > \inf_{\theta_1 \leqslant \theta < \bar{\theta}} \left[\frac{\ln \alpha^{-1}}{\theta} + n\, \frac{b(\theta)}{\theta} \right]. \tag{36}$$

Pentru alternativa $\theta \leqslant \theta_2 < 0$, $N(\theta_2, \alpha)$ poate fi definit similar. (36) este echivalentă cu

$$\sup_{\theta_1 \leqslant \theta \leqslant \bar{\theta}} [\theta S_n - nb(\theta)] > \ln \alpha^{-1}. \tag{37}$$

În cazul $b'(\theta_1) \leqslant \bar{X}_n < b'(\theta)$, supremum este atins în $q(\bar{X}_n)$ unde q este inversa funcţiei crescătoare b'. În acest caz (37) este echivalentă cu

$$\bar{X}_n q(\bar{X}_n) - b(q(\bar{X}_n)) > (\ln \alpha^{-1})/n. \tag{38}$$

În cazul $\bar{X}_n < b'(\theta_1)$, supremum este atins în θ_1.

TEOREMA 7. (Lorden (1973)). *Dacă* $\hat{N} = N(\theta_1, \alpha)$ *cu* $\alpha = \gamma/3[I(\theta_1)^{-1} + 1]^2 \ln \gamma^{-1}$, *atunci* $\hat{N}$ *satisface* (32) *şi*

$$M_\theta\ (\hat{N}) \leqslant \frac{\ln \gamma^{-1} + \ln \ln \gamma^{-1}}{I(\theta)} + 2\, \frac{\ln\{3^{1/2}\ [I(\theta_1)^{-1} + 1]\}}{I(\theta)} + \frac{\theta^2 b''(\theta)}{[I(\theta)]^2} + 1 \tag{39}$$

pentru toţi θ *în* $[\theta_1, \bar{\theta}]$. *Dacă* N *satisface* (32), *atunci*

$$M_\theta(\hat{N}) \geqslant (\ln \gamma^{-1})/I(\theta) \text{ pentru } \theta \neq 0. \tag{40}$$

Scanned with OKEN Scanner

Demonstrație. Marginea inferioară din (40) rezultă din inegalitatea lui Wald pentru T.S.R.P. făcînd $\beta \to 0$ în inegalitate. Inegalitatea (39) urmează din faptul că

$$(41) \qquad M_\theta\, N(\theta_1,\ \alpha) \leqslant \frac{\ln \alpha^{-1}}{I(\theta)} + \frac{\theta^2 b''(\theta)}{[I(\theta)]^2} + 1 \text{ pentru } \theta \text{ în } [\theta_1,\ \overline{\theta}]$$

în baza alegerii lui α în teoremă. Deoarece $M'_0 N(\theta_1, \alpha)$ nu este mai mare decît valoarea medie a timpului pînă ce are loc (34) care este mărginită de membrul drept al relației (41) (din ecuația lui Wald și teorema 3 [Observăm că teorema 3 stabilește că media „excesului față de margine $= S_n^* -$ $- \ln \alpha^{-1} = \sum_1^n Y_i - \ln \alpha^{-1}$" este cel mult momentul de ordinul doi al lui

$$Y = \ln [f(X;\ \theta)/f(X;\ 0)]$$

împărțind prin primul moment al lui Y].

Teorema este demonstrată dacă arătăm că alegerea lui α este suficientă pentru ca $\hat{N}$ să satisfacă (32). Pentru a determina inferior lui (36) observăm că derivata în raport cu θ a cantității din paranteza patrată este

$$(42) \qquad \theta^{-2}[-\ln \alpha^{-1} + \theta b'(\theta) - b(\theta)] = \theta^{-2}[nI(\theta) - \ln \alpha^{-1}],$$

care este nenegativă pe $[\theta_1, \overline{\theta}]$ dacă $nI(\theta_1) \geqslant \ln \alpha^{-1}$. Astfel, pentru $n > \ln \alpha^{-1}/I(\theta_1)$ inferiorul este atins în θ_1 și deci

$$P[\ln \alpha^{-1}/I(\theta) \leqslant N < \infty \,|H_0] \leqslant$$

$$(43) \qquad \leqslant P\left[S_n > \frac{\ln \alpha^{-1}}{\theta_1} + n\frac{b(\theta_1)}{\theta_1} \text{ pentru } n \geqslant 1 \,|H_0\right] \leqslant \alpha,$$

ultima inegalitate provenind din marginea superioară a probabilităților erorilor din T.S.R.P. al lui Wald.

Pentru $n < \ln \alpha^{-1}/I(\theta_1)$, poate fi ales un șir $\{\theta_k\}$ în care este atins inferiorul în (36) și probabilitatea ca în (36) să avem inegalitate strictă este limita probabilităților ca (34) să aibe loc pentru $\theta = \theta_k$. Probabilitățile anterioare sînt cel mult α (din marginea superioară a lui Wald) și astfel

$$(44) \qquad P\left(S_n > \inf_{\theta_1 < \theta < \overline{\theta}} \left[\frac{\ln \alpha^{-1}}{\theta} + n\frac{b(\theta)}{\theta}\right] \middle| H_0\right) \leqslant \alpha$$

sau echivalent

$$(45) \qquad P(\hat{N} = n \,|\, H_0) \leqslant \alpha.$$

Din (43) și (45) avem :

$$(46) \qquad P(\hat{N} < \infty \,|\, H_0) < \alpha\left[\frac{\ln \alpha^{-1}}{I(\theta_1)} + 1\right] < \alpha[\ln \alpha^{-1}][I(\theta_1)^{-1} + 1]$$

deoarece $\ln \alpha^{-1} > \ln \gamma^{-1} > 1$.

Scanned with OKEN Scanner

Deoarece

$$\frac{\gamma \ln \{3[I(\theta_1)^{-1}+1]^2\gamma^{-1}\ln\gamma^{-1}\}}{3[I(\theta_1)^{-1}+1]\ln\gamma^{-1}} \leqslant \frac{2\gamma \ln \{3^{1/2}[I(\theta_1)^{-1}+1]\}}{3[I(\theta_1)^{-1}+1]} +$$

$$+ \frac{\frac{3}{2}\gamma \ln \gamma^{-1}}{3[I(\theta_1)^{-1}+1]\ln\gamma^{-1}} \leqslant \frac{2\alpha}{3^{1/2}\,e} + \frac{\alpha}{2} \leqslant \alpha$$

(folosind $\ln x < x^{1/2}$ şi $\ln x/x \leqslant 1/e$ pentru $x \geqslant 1$) alegerea $\alpha = \gamma/3[I(\theta_1)^{-1}+1]^2 \ln \gamma^{-1}$ este suficientă pentru a face membrul drept al relaţiei (46) mai mic decît γ.

Observaţii. i) Făcînd $\theta_1 \to 0$ cînd $\gamma \to 0$ [de exemplu, luăm $I(\theta_1)^{-1} = \ln \gamma^{-1}$] se poate obţine o clasă de procedee $\hat{N}(\gamma) = N(\theta_1(\gamma), \alpha(\gamma))$ astfel că pentru toţi $\theta > 0$ există un $E(\theta)$ astfel că

$$M_0\hat{N}(\gamma) - \frac{\ln\gamma^{-1}}{I(\theta)} \leqslant \frac{3\ln\ln\gamma^{-1}}{I(\theta)} + E(\theta) \tag{47}$$

pentru toţi $\gamma < \exp[-1/I(\theta)]$. Deoarece $0 = b(0) = b(\theta) - \theta b'(\theta) + \frac{1}{2}\theta^2 b''(\xi)$ pentru $0 < \xi < \theta$ şi b'' este continuă,

$$I(\theta) = \theta b'(\theta) - b(\theta) \simeq \frac{1}{2} b''(0)\theta^2$$

ca $\theta \to 0$, astfel că alegerea lui θ_1 este $\theta_1 \sim \text{const}\ (\ln\gamma^{-1})^{-1/2}$ cînd $\gamma \to 0$.

ii) Testul nesfîrşit $(N(\theta_1, \alpha)$ are $M_\theta N = \infty$ pentru $\theta > 0$ apropiat (în termeni de informaţie) de θ decît de θ_1. În unele aplicaţii aceasta poate fi acceptată şi intervalul θ pozitivi unde se întîmplă aceasta poate fi privit ca o zonă de indiferenţă. Totuşi, dacă dorim să considerăm procedee care satisfac

$$M_\theta N < \infty \text{ pentru toţi } \theta > 0,$$

atunci se pot folosi combinaţii de forma

$$N^* = \min_k N(\theta_k, \alpha_k) \text{ unde } \theta_k \to 0$$

şi

$$\alpha_k = \gamma 2^{-k}/3[I(\theta_k)^{-1}+1]^2 \ln(\gamma^{-1}2^k)$$

astfel ca

$$P(N^* < \infty \,|\, H_0) \leqslant \gamma(2^{-1} + 2^{-2} + 2^{-3} + \ldots) = \gamma.$$

Dacă γ este înlocuit prin $\gamma/2$, atunci are loc (39) şi au loc inegalităţi similare pentru θ în (θ_{k+1}, θ_k), $k = 1, 2, \ldots$ De asemenea, pentru N^* au loc margini de forma (47). Marginile de stopare pentru N^* pot fi calculate cînd n creşte, trecînd de la $N(\theta_k, \alpha_k)$ la $N(\theta_{k+1}, \alpha_{k+1})$,

$$\inf_{\theta_{k+1} \leqslant \theta \leqslant \theta_k} \left[\frac{\ln \alpha_{k+1}^{-1}}{\theta} + n\,\frac{b(\theta)}{\theta} \right] < \frac{\ln \alpha_k^{-1}}{\theta_k} + n\,\frac{b(\theta)}{\theta_k}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Presupunînd că dorim să verificăm ipoteza

$$\theta < 0 \text{ față de } \theta > 0$$

cu probabilitățile erorilor mai mici decît γ și β. Un procedeu este să oprim experimentul în $\widetilde{N} = \min(N_1^*, N_2^*)$ unde

$$N_1^* = \min_k N(\theta_k, \alpha_k) \text{ cu } \theta_k \downarrow 0 \text{ și}$$

$N_2^* = \min_k N(-\theta_k, \alpha_k')$ unde α_k' este definit folosind β în locul lui γ. Dacă $\theta < 0$ sau $\theta > 0$ este ales după cum N_2^* respectiv N_1^* oprește primul experimentul, atunci

(48) $P(\text{oprim și decidem } \theta > 0 \mid \theta) \leqslant \gamma$ pentru toți $\theta \leqslant 0$ și

(49) $P(\text{oprim și decidem } \theta < 0 \mid \theta) \leqslant \beta$ pentru toți $\theta \geqslant 0$.

Pentru $M_\theta \widetilde{N}$ pentru $\theta \neq 0$ au loc margini superioare de forma (46) și pot fi comparate cu marginea inferioară a lui Wald (1947), p. 197)

$$I(\theta) M_\theta N \geqslant (1-\beta)\ln[(1-\beta)/\gamma] + \beta \ln[\beta/(1-\gamma)] \geqslant$$

$$\geqslant (1-\beta)\ln \gamma^{-1} + (1-\beta)\ln(1-\beta) + \beta \ln \beta \geqslant$$

$$\geqslant (1-\beta)\ln \gamma^{-1} - \ln 2$$

[deoarece $(1-x)\ln(1-x) + x \ln x$ are valoarea minimă, $-\ln 2$ în $x = \frac{1}{2}$] pentru $\theta > 0$ (și are loc o margine analoagă pentru $\theta < 0$) care este satisfăcută de timpul de stopare N a oricărui test care satisface (47) și (48). Omiterea lui $\theta = 0$ în (48) și (49) este numai o slăbire aparentă a acestor cereri, deoarece după teorema convergenței dominate, $P(N \leqslant n \mid \theta)$ este continuă în θ pentru fiecare n și făcînd $n \to \infty$ că $P(N < \infty \mid \theta)$ este inferior semicontinuă.

Lorden (1973) a obținut următorul rezultat

TEOREMA 8 (Lorden (1973)). *Avem*

(50) $$P(N < \infty \mid H_0) \leqslant \alpha + \alpha(\ln \alpha^{-1})^{1/2} \int_{\theta_1}^{\overline{\theta}} [b''(\theta)/2\pi I(\theta)]^{1/2} \, d\theta.$$

Demonstrație. Presupunem că $\overline{\theta}$ aparține la spațiul natural al parametrilor și $I(\overline{\theta}) < \ln \alpha^{-1}$. Fie $m \geqslant 1$ cel mai mare întreg astfel ca $mI(\overline{\theta}) \leqslant \ln \alpha^{-1}$ și fie E cel mai mic întreg astfel ca $EI(\theta_1) \geqslant \ln \alpha^{-1}$. Pentru $\theta > 0$, fie $N(\theta)$ cel mai mic n (sau ∞ dacă nu există un astfel de n) astfel că are loc (34). În definiția lui $N(\theta_1, \alpha)$, (36) inf. este atins cînd $m < n < E$ în soluția θ_n a ecuației $nI(\theta) = \ln \alpha^{-1}$, deoarece derivata (48), trece de la valori negative la valori pozitive în θ_n. Deci, dacă

$$N(\theta_1, \alpha) = n > m,$$

Scanned with OKEN Scanner

atunci $N(\theta_n) \leqslant n$ și deoarece $N(\theta_1, \alpha) \leqslant N(\theta_a)$ în orice caz $(\theta_n \in (\theta_1, \bar{\theta}))$, $N(\theta_n) = n$. Astfel

$$P_\theta(N(\theta_1, \alpha) = n) \leqslant P_\theta(N(\theta_n) = n) \text{ pentru } E > n > m. \tag{51}$$

Dacă $n \leqslant m$, derivata, (48) este nepozitivă pe $[\theta_1, \theta)$ deoarece $nI(\bar{\theta}) \leqslant \ln \alpha^{-1}$, și deci inf. este atins în $\bar{\theta}$. Prin urmare,

$$P_\theta(N(\theta_1, \alpha) \leqslant m) = P_\theta(N(\bar{\theta}) < m). \tag{52}$$

Dacă $n \geqslant E$, derivata (48) este nenegativă pe $[\theta_1, \theta)$, inf. este atins în θ_1 și, raționînd ca în (51)

$$P_\theta(E \leqslant N(\theta_1, \alpha) < \infty) \leqslant P_\theta(E \leqslant N(\theta_1) < \infty). \tag{53}$$

Pentru toți n și $\theta > 0$

$$P_\theta(N(\theta) = n) = \int_{[N(\theta)=n]} f_0(x_1) \ldots f_0(x_n) d\mu^n \leqslant \tag{54}$$

$$\leqslant \int_{[N(\theta)=n]} \alpha f_\theta(x_1) \ldots f_\theta(x_n) d\mu^n = \alpha P_\theta (N(\theta) = n)$$

deoarece $N(\theta) = n$ numai dacă $f_0(x_1) \ldots f_0(x_n) \leqslant \alpha f_\theta(x_1) \ldots f_\theta(x_n)$.

Combinînd (51)—(54)

$$P_0(N(\theta_1, \alpha) < \infty) \leqslant \alpha P_{\bar{\theta}}(N(\bar{\theta}) \leqslant m) + \alpha P_{\theta_1}(E \leqslant N(\theta_1) < \infty) +$$

$$+ \alpha \sum_{n=m+1}^{E-1} P_{\theta_n}(N(\theta_n) = n). \tag{55}$$

După Wald (1947), cînd θ_n este valoarea adevărată și α este mic, $N(\theta_n)$ este aproximativ repartizată normal cu media $\ln \alpha^{-1}/I(\theta_n) = n$ și dispersia

$$\frac{(\ln \alpha^{-1}) D^2_{\theta_n} (\ln (f_{\theta_n}(X)/f_0(X)))}{(M_{\theta_n} \ln (f_{\theta_n}(X)/f_0(X)))^3} = \frac{\ln \alpha^{-1} \theta_n^2 b''(\theta_n)}{I(\theta_n)^3}.$$

Aceasta sugerează aproximațiile :

$$P_{\theta_n}(N(\theta_n) = n) \simeq \frac{I(\theta_n)^{3/2}}{\theta_n (2\pi b''(\theta_n) \ln \alpha^{-1})^{1/2}} \tag{56}$$

și similar,

$$P_{\bar{\theta}}(N(\bar{\theta}) \leqslant m) \simeq \frac{1}{2} \text{ și } P_{\theta_1}(E \leqslant N(\theta_1) < \infty) = \frac{1}{2}. \tag{57}$$

Scanned with OKEN Scanner

Privind n ca o variabilă continuă pe intervalul de la $(\ln \alpha^{-1})/I(\bar{\theta}) \simeq m$, pînă la $(\ln \alpha^{-1})/I(\theta_1) \simeq E$, cu $n\, I(\theta_n) \equiv \ln \alpha^{-1}$, (56) şi (57) dau următoarea modificare a lui (55)

$$(58) \qquad P_0(N < \infty) \leqslant \alpha + \alpha \int_{\ln\alpha^{-1}/I(\bar{\theta})}^{\ln\alpha^{-1}/I(\theta_1)} \frac{I(\theta_n)^{3/2}}{\theta_n (2\pi b''(\theta_n) \ln \alpha^{-1})^{1/2}}\, \mathrm{d}n.$$

Luînd $\theta = \theta_n$ din relaţia $I(\theta_n) = (\ln \alpha^{-1})/n$ obţinem

$$\theta_n b''(\theta_n)\, \mathrm{d}\theta_n = -\frac{\ln \alpha^{-1}}{n^2}\, \mathrm{d}n = -\frac{I(\theta_n)^2}{\ln \alpha^{-1}}\, \mathrm{d}n,$$

astfel că

$$P_0(N < \infty) \leqslant \alpha + \alpha\, (\ln \alpha^{-1})^{1/2} \int_{\theta_1}^{\bar{\theta}} \left(\frac{b''(\theta)}{2\pi I(\theta)} \right)^{1/2} \mathrm{d}\theta$$

ceea ce demonstrează teorema.

COROLAR. *Dacă* θ *este media unei variabile normale cu dispersia unitate, atunci* (50) *devine*

$$(59) \qquad P(N < \infty | H_0) \leqslant \alpha[1 + (\ln \alpha^{-1}/\pi)^{1/2} \ln (\bar{\theta}/\theta_1)].$$

§ 3. Testul raportului de verosimilităţi pentru problema a k sélecţii

În acest paragraf prezentăm rezultatele lui Lorden (1972) la problema a k selecţii.

Fie $X_1, X_2, \ldots$ variabile aleatoare independente identic repartizate avînd densitatea

$$f(x;\theta) = \exp\, [\theta x - b(\theta)], \underline{\theta} < \theta < \bar{\theta}$$

în raport cu o măsură σ-finită nedegenerată. Ca şi în paragraful anterior $b(\cdot)$ este necesar convexă şi infinit derivabilă pe $(\underline{\theta}, \bar{\theta})$ care nu trebuie să fie întreg spaţiul natural al familiei.
De asemenea

$$M_\theta(X) = b'(\theta) \text{ şi } D^2_\theta(X) = b''(\theta).$$

Fie $S_n = X_1 + \ldots + X_n$, $n = 1, 2, \ldots$ şi definim logaritmul funcţiei de verosimilitate

$$L_n(\theta) = \theta S_n - n b(\theta).$$

Pentru orice n şi S_n, logaritmul funcţiei de verosimilitate este o funcţie strict concavă de θ şi deci este fie monotonă pe $(\underline{\theta}, \bar{\theta})$ sau are un maxim unic în $\hat{\theta}$, estimatorul de verosimilitate maximă pentru θ. În ultimul caz, $b'(\hat{\theta}) = S_n/n$. Dacă logaritmul funcţiei de verosimilitate este monoton

Scanned with OKEN Scanner

pe $(\underline{\theta}, \overline{\theta})$, luăm $\hat{\theta} = \hat{\theta}$ sau $\theta = \underline{\theta}$ după cum $L_n(\theta)$ este crescătoare sau descrescătoare. În oricare din cazuri, notăm supremum lui $L_n(\theta)$ pentru $\underline{\theta} < \theta < \overline{\theta}$ prin $L_n(\hat{\theta})$.

Problema statistică este specificată de $s+1$ $(s \geqslant 2)$ intervale:

$$H_1 : (\theta_0, \theta_1], H_2 : [\theta_1, \theta_2], \ldots, H_{s+1} : [\theta_s, \theta_{s+1})$$

unde $\underline{\theta} = \theta_0 < \theta_1 < \ldots < \theta_{s+1} = \overline{\theta}$ împreună cu $k \geqslant 2$ decizii şi cererea

(60) P_θ (decizie j) $\leqslant \alpha_{ij}$ pentru toţi $\theta \in H_i$ $(i = 1, \ldots, s+1; j = 1, \ldots, k)$,

unde α_{ij} aparţine la $(0, 1]$ şi satisface presupunerile:

I) $$\underline{\alpha} = \min \alpha_{ij} \leqslant \frac{1}{3}$$

II) $$\max_j \min (\alpha_{ij}, \alpha_{i+1,j}) = 1 \text{ pentru } i = 1, \ldots, s.$$

Presupunerea I face $(\ln)^2 \alpha^{-1} > 1$ (o convenţie). Presupunerea II este o *condiţie de tip separare de ipoteze* ce asigură că ipotezele H_i adiacente au cel puţin o decizie corectă împreună ($(\ln)^2 = \ln \ln$). Definim

(61) $$\overline{\alpha} = \max \{\alpha_{ij} | \alpha_{ij} < 1\} \text{ şi } r = \ln \overline{\alpha} / \ln \underline{\alpha} \geqslant 1.$$

Marginile obţinute în demonstraţia teoremei pot fi alese să depindă de valorile lui $\alpha_{ij} < 1$ numai prin $\underline{\alpha}$ şi r, sau echivalent $\overline{\alpha}$ şi r. La obţinerea marginilor, în teoremă, care sînt uniforme pe $(\underline{\theta}, \overline{\theta})$ este necesar ca, de exemplu, în T.S.R.P. unilateral pentru θ_2 faţă de θ apropiat de $\underline{\theta}$, selecţie suplimentară datorită *depăşirii marginei* să fie mărginită uniform în θ. Pentru satisfacerea condiţiilor de acest tip o condiţie suficientă este următoarea presupunere

III) $(\theta - \theta_1)^2 b''(\theta) / [(\theta - \theta_1) b'(\theta) - (b(\theta) - b(\theta_1))]^2$ este mărginită cînd $\theta \to \underline{\theta}, \overline{\theta}$. Observăm că în presupunerea III se poate înlocui θ_1 prin orice punct în $(\underline{\theta}, \overline{\theta})$. Pentru $\theta, \theta' \in (\underline{\theta}, \overline{\theta})$ definim informaţia

(62) $$I(\theta, \theta') = M_\theta \{\ln [f(X; \theta)/f(X; \theta')]\} = (\theta - \theta') b'(\theta) - (b(\theta) - b(\theta')).$$

Avem

$$D_\theta^2 \{\ln [f(X; \theta)/f(X; \theta')]\} = (\theta - \theta')^2 b''(\theta),$$

astfel ca presupunerea III priveşte raportul dispersiei statisticii $\ln \{f(X; \theta)/f(X; \theta')\}$ la patratul mediei sale cînd θ este valoarea adevărată a parametrului θ. Deoarece raportul este continuu, III este implicată de

III') $\underline{\theta}$ şi $\overline{\theta}$ aparţin interiorului spaţiului natural al parametrilor familiei Darmois-Koopman.

Dacă θ este media unei variabile normale cu dispersia cunoscută, tunci III este satisfăcută cu $\underline{\theta} = -\infty$, $\overline{\theta} = \infty$. De asemenea, presupune-

Scanned with OKEN Scanner

rea III este adevărată cînd $(\underline{\theta}, \overline{\theta})$ este luat ca întreg spaţiul parametric în cazul repartiţiilor Bernoulli, Poisson şi exponenţială negativă.

Înainte să enunţăm teorema, este necesar să definim testul raportului de verosimilitate şi să examinăm structura sa. Pentru $\gamma_{ij} \in (0, 1)$ specificat satisfăcînd presupunerile I şi II, testul raportului de verosimilităţi $(\hat{N}, \hat{\delta})$ constă într-o regulă de decizie terminală $\hat{\delta}$ şi un timp (sau o variabilă) de stopare $\hat{N} = \min_j \max_i \hat{N}_{ij}$, unde $\hat{N}_{ij}$ este cel mai mic n (sau ∞ dacă nu există un n) astfel ca

$$L_n(\hat{\theta}) \geqslant \sup_{H_i} L_n(\theta) + \ln \gamma_{ij}^{-1}, \tag{63}$$

şi δ este cel mai mic j astfel ca $N = \max_i N_{ij}$. Observăm că pentru j fixat, valorile lui i astfel ca $\gamma_{ij} = 1$ nu joacă rol deoarece (63) are loc întotdeauna. De asemenea, din concavitatea funcţiei $L_n(\cdot)$

$$\hat{\theta} \in H_i \text{ şi deci } \sup_{H_i} L_n(\theta) = L_n(\hat{\theta})$$

sau altfel supremum funcţiei $L_n(\cdot)$ sub H_i este atins într-un punct apropiat de $\hat{\theta}$, un punct de sfîrşit.

Structura şi performanţa testului raportului de verosimilităţi apar dacă cercetăm comportarea asimptotică a $M_\theta(\hat{N})$ cînd $\gamma = \min \gamma_{ij} \to 0$ în cazul unde $\gamma_{ij} \leqslant 1$ (ce se aplică în problema în care $\overline{\alpha} = \underline{\alpha}$). Fixăm θ aparţinînd interiorului lui H_m. Din (63) urmează că $\hat{N}$ opreşte experimentul de îndată ce pentru unii j cu $\gamma_{mj} = 1$

$$L_n(\theta) \geqslant \max_{i:\gamma_{ij}<1} [L_n(\psi_i) + \ln \gamma_{ij}^{-1}], \tag{64}$$

unde ψ_i este punctul de sfîrşit al ipotezei H_i apropiat de θ. Acum, dacă toţi γ_{ij} ce apar în (64) sînt egali cu $\underline{\gamma}$, teorema 3.3 (Lorden 1967) implică că

$$I(\theta) M_\theta(\hat{N}) \leqslant \ln \underline{\gamma}^{-1} + 0(\{\ln \gamma^{-1}\}^{1/2}) \text{ cînd } \gamma \downarrow 0 \tag{65}$$

unde

$$I(\theta) = \max_{j:\gamma_{mj}<1} \min_{i:\gamma_{ij}<1} I(\theta, \psi_i). \tag{66}$$

Dacă θ este punctul comun de sfîrşit al ipotezelor H_m şi H_{m+1}, remarca anterioară se aplică cu (64) şi (66) restrînse la j astfel încît $\gamma_{mj} = \gamma_{m+1,j} = 1$. Avem

$$\underline{I} = \min_{\underline{\theta} \leqslant \theta \leqslant \overline{\theta}} I(\theta) > 0.$$

Minimul este atins în virtutea continuităţii funcţiei $I(\cdot, \theta_i)$ pentru fiecare $i = 1, \ldots s$ şi este clar că $I(\theta)$ este descrescătoare pe H_1 şi crescătoare pe H_{s+1}. Determinarea lui $\underline{I}$ într-o problemă specificată este simplă deoa-

Scanned with OKEN Scanner

rece $I(\theta)$ este alternativ crescătoare și descrescătoare, cu extrem local în valorile lui θ astfel ca

$$I(\theta,\ \psi_{i_1}) = I(\theta,\ \psi_{i_2})$$

relație care este echivalentă cu

$$b'(\theta) = [b(\psi_{i_1}) - b(\psi_{i_2})]/(\psi_{i_1} - \psi_{i_2})$$

(i_1 și i_2 fiind aleși să minimizeze i în (65) pentru diferiții j). Ca o consecință a teoremei 9, în cazul probabilităților erorilor egale, obținută alegînd (N, δ), $(\hat{N}, \hat{\delta})$, inegalitatea (65) devine egalitate. Rădăcina pătrată din (65) este de ordin de mărime mai mare decît diferența dintre $M_\theta(N)$ și minimul atins. În cazul $s = 2$ [Schwarz (1962) și Wong (1968)] testele secvențiale ale raporturilor de verosimilități sînt trunchiate. În fapt

$$\hat{N} \leqslant [\underline{I}^{-1} \ln \underline{\gamma}^{-1}] + 1 \text{ cu probabilitatea unu,} \tag{67}$$

unde, aici, $[x]$ reprezintă cel mai mare întreg $\leqslant x$. În cazul în care toți γ_{ij} ($\gamma_{ij} < 1$) sînt egali, (67) urmează din faptul că dacă

$$n > \underline{I}^{-1} \ln \gamma^{-1} \text{ și } \hat{\theta} \in (\underline{\theta},\ \overline{\theta}), \text{ atunci } S_n = nb'(\hat{\theta})$$

și deci, pentru toți θ

$$L_n(\hat{\theta}) - L_n(\theta) = n[(\hat{\theta} - \theta)b'(\hat{\theta}) - (b(\hat{\theta}) - b(\theta))] = nI(\hat{\theta},\ \theta). \tag{68}$$

Astfel, $L_n(\hat{\theta})$ depășește fiecare $L_n(\psi_i)$ în (64) prin $nI(\hat{\theta},\ \psi_i)$ care este cel puțin $n\underline{I}$, deci mai mare decît $\ln \gamma^{-1}$ și suficient pentru (64). Dacă $\hat{\theta} = \underline{\theta}$, atunci $S_n \leqslant nb'(\theta_1)$ cînd $L_n(\theta_1) - L_n(\theta) \geqslant nI(\theta_1, \theta)$ pentru $\theta > \theta_1$ și (64) este satisfăcut pentru $\theta = \theta_1$ precum și dacă $\hat{\theta} = \theta_1$. Cazul $\hat{\theta} = \overline{\theta}$ este analog. Dacă $\gamma_{ij} < 1$ nu sînt toți egali, dacă-i reducem pe toți la $\underline{\gamma}$ nu descreștem $\hat{N}$ astfel ca și în acest caz (67) este adevărată.

Pentru demonstrația teoremei 9 avem nevoie de două egalități: Prima este dată în

LEMA 1 (Wald (1947)). *Presupunem că N_1 și N_2 sînt timpii de oprire pentru $X_1, X_2, \ldots$ astfel ca*

$$P_{\theta'}(N_1 < \infty) \leqslant \alpha < 1 \text{ și } P_\theta(N_2 < \infty) \leqslant \beta \leqslant 1.$$

Dacă $I(\theta,\ \theta') = M_\theta\{\ln [f(X;\ \theta)/f(X;\ \theta')]\} > 0$, *atunci*

$$I(\theta,\ \theta')M_\theta\{\min(N_1 N_2)\} \geqslant$$

$$\geqslant (1 - \beta) \ln [(1 - \beta)/\alpha] + \beta \ln [\beta/(1 - \alpha)] \geqslant \tag{69}$$

$$\geqslant (1 - \beta) \ln \alpha^{-1} - \ln 2$$

Scanned with OKEN Scanner

şi

$$I(\theta,\ \theta')M_\theta(N_1) \geqslant \ln \alpha^{-1}. \tag{70}$$

Ultima inegalitate în (69) rezultă din faptul că $(1-\alpha)\ln(1-x) + x\ln x$ are, în $x = \frac{1}{2}$, valoarea minimă $-\ln 2$. Relaţia (70) poate fi obţinută din prima inegalitate din (69) luînd $N_2 = +\infty$ şi făcînd $\beta \downarrow 0$.

A doua inegalitate este necesară în cazul în care $I(\theta,\ \theta')$ este mică şi este dată în

LEMA 2 (*Lorden (1972)*). *Dacă* $P_{\theta'}(N < \infty) \leqslant \alpha$ *şi* $I(\theta,\ \theta') > 0$, *atunci pentru toţi* $\varepsilon > 0$

$$\begin{aligned} &M_\theta\{\ln \alpha^{-1} - (I(\theta,\ \theta') + \varepsilon)N\}^+ \leqslant \\ &\leqslant e^{-1} + (2\varepsilon)^{-1} D_\theta^2 \{\ln (f(X;\ \theta)/f(X;\ \theta'))\}, \end{aligned} \tag{71}$$

unde $x^+ = x$ *dacă* $x > 0$ *şi* $x^+ = 0$ *dacă* $x < 0$.

Demonstraţie. Fie $m = \ln \alpha^{-1}/[I(\theta,\ \theta') + \varepsilon]$. Avem:

$$\begin{aligned} &\int\limits_{\{N<m\}} \ln [f(x_N;\ \theta)/f(x_N;\ \theta')]\, dP_\theta - \int\limits_{\{N<m\}} (I(\theta,\ \theta') + \varepsilon)N\, dP_\theta \leqslant \\ &\leqslant M_\theta \sup_{n \geqslant 0} \{\ln [f(X_n;\ \theta)/f(X_n;\ \theta')] - n(I(\theta,\ \theta') + \varepsilon)\} \leqslant \\ &\leqslant (2\varepsilon)^{-1} D_\theta^2\{\ln [f(X;\ \theta)/f(X;\ \theta')]\}, \end{aligned} \tag{72}$$

unde ultima inegalitate este dată de Kingman (1962) şi stabileşte că rătăcirea aleatoare cu media negativă are supremum mediu cel mult 1/2 din raportul dispersiei sale la valoarea absolută a mediei sale (Pentru rezultat se cere ca să existe momentul absolut de ordinul trei; totuşi pentru familia Darmois-Koopman există toate momentele). Fie $f(x_n,\ \theta)$ densitatea comună a variabilelor $X_1, \ldots, X_m$. Atunci după inegalitatea lui Jensen

$$\begin{aligned} &M_\theta\{\ln [f(X_N;\ \theta')/f(X_N;\ \theta)|\ N < m]\} \leqslant \\ &\leqslant \ln M_\theta[f(X_N;\ \theta')/f(X_N;\ \theta)]|N < m] \end{aligned} \tag{73}$$

şi folosind relaţii de forma $dP_{\theta'} = [f(x_N;\ \theta')/f(x_N;\ \theta)]\, dP_\theta$,

$$\begin{aligned} &P_\theta(N < m)M_\theta[\{f(X_N;\ \theta')/f(X_N;\ \theta)\}|N < m] = \\ &= \sum_{n=1}^{m-1} \int\limits_{\{N=n\}} (f(x_N;\ \theta')/f(x_N;\ \theta))\, dP_\theta = \\ &= \sum_{n=1}^{m-1} \int\limits_{\{N=n\}} dP_{\theta'} = P_{\theta'}(N < m) \leqslant \alpha. \end{aligned} \tag{74}$$

Multiplicînd ambii membri ai relaţiei (73) prin $P_\theta(N < m)$ şi aplicînd (74), obţinem :

$$\int_{\{N<m\}} \ln [f(x_N;\ \theta')/f(x_N;\ \theta)]\, dP_\theta \leqslant$$

$$\leqslant P_\theta\ (N < m) \ln (\alpha/P_\theta(N < m)) \leqslant \tag{75}$$

$$\leqslant \int_{\{N<m\}} \ln \alpha\, dP_\theta + e^{-1}$$

deoarece $x \ln x^{-1} \leqslant e^{-1}$ pentru $x \geqslant 0$. Rezultatul dorit se obţine adunînd (72) şi (75).

Are loc

TEOREMA 9 (Lorden (1972)). *Există un* $D \geqslant 1$ *astfel că testul secvenţial al raportului de verosimilităţi* $(\hat{N}, \hat{\delta})$ *cu*

$$\gamma_{ij} = \begin{cases} \alpha_{ij}/D \ln \underline{\alpha}^{-1} & \text{dacă } \alpha_{ij} < 1 \\ 1 & \text{dacă } \alpha_{ij} = 1 \end{cases} \tag{76}$$

satisface (60) *şi care ar fi* α_{ij} *ce satisface presupunerile* I *şi* II. *Fie* $n(\theta)$ *infimum lui* $M_\theta N$ *după toate testele* (N, δ) *pentru care are loc* (60). *Cînd sînt satisfăcute presupunerile* I—III, *există o funcţie crescătoare* $E(\cdot)$ *pe* $(1, \infty)$ *astfel ca*

$$M_\theta \hat{N} - n(\theta) \leqslant E(r)\ (\ln)^2 \alpha^{-1} \text{ pentru toţi } \theta \in (\underline{\theta}, \bar{\theta}) \tag{77}$$

unde $r = \ln \bar{\alpha}/\ln \underline{\alpha}$.

Pentru demonstraţie a se vedea Lorden (1972) teorema 1, pag. 1418.

Observaţii i) Demonstraţia teoremei 9 este adevărată (cu margini uşor mai largi) dacă restricţia asupra lui (N, δ) este slăbită multiplicînd toţi α_{ij} care sînt $\leqslant 1$ prin k, cu alegerea lui $(\hat{N}, \hat{\delta})$ neschimbată. Această observaţie este suficientă să arate că are loc o teoremă similară dacă problema de verificat este reformulată cu (60) înlocuit de

$$\sum_{j \in J_i} P_\theta(\text{deciziei } j) \leqslant \alpha_i \text{ pentru toţi } \theta \in H_i,\ i = 1, \ldots, s+1, \tag{60'}$$

unde J_i este submulţimea deciziilor *incorecte* pentru H_i (ce corespunde la mulţimea de j cu $\alpha_{ij} < 1$ în formularea originară) deoarece (60') este mai puternică decît (60) cu $\alpha_{ij} = \alpha_i$ pentru $j \in J_i, = 1$ pentru $j \notin J_i$, însă mai slabă decît (60) cu $\alpha_{ij} = \alpha_i/k$ pentru $j \in J_i, = 1$ pentru $j \notin J_1$. Cînd $s = 2$, cele două formulări sînt identice.

ii) O definiţie naturală a lui $\hat{N}$ este cel mai mic n astfel ca, pentru j, (63) are loc pentru toţi i. Această versiune a lui $\hat{N}$ cere o selecţie de volum mai mare, deoarece (63) nu poate avea loc simultan pentru toţi i la tim-

Scanned with OKEN Scanner

pul $n = \max_i \hat{N}_{ij}$. Totuşi, spre deosebire de $\hat{N}$ iniţial, ia decizia de stopare numai pe baza statisticii suficiente (n, S_n). Lorden (1972) afirmă că teorema 9 are loc pentru această modificare a lui $\hat{N}$, însă este necesară o estimaţie suplimentară pentru marginea mediei timpului, după N_0 pentru versiunea lui N_0 definită de (64) pentru stopare.

iii) O altă alternativă a probabilităţii erorii (60) este

$$P_{\theta_i}(\text{deciziei } j) \leqslant \alpha_{ij} \quad (i = 1, \ldots, s,\ j = 1, \ldots, k), \tag{60''}$$

care nu restrînge probabilităţile deciziilor cînd $\theta \neq \theta_1, \ldots, \theta_s$.

Teorema are loc cu condiţia ca $\hat{N}$ să fie schimbat definind $\hat{N}_{ij}$ ca cel mai mic n astfel încît

$$L_n(\hat{\theta}) \geqslant L_n(\theta_i) + \ln \gamma_{ij}^{-1}.$$

O altă rafinare a demonstraţiei teoremei 9 conduce la următorul rezultat

TEOREMA 10. (Lorden (1972)). *În presupunerile* (I) *şi* (II) *pentru fiecare* $\theta \in (\underline{\theta}, \bar{\theta})$ *există un* E_θ *astfel încît*

$$I(\theta)(M_\theta \hat{N} - n(\theta)) \leqslant (\ln)^2 \underline{\alpha}^{-1} + ((\ln)^2 \underline{\alpha}^{-1})^{1/2} E_\theta, \tag{78}$$

cu condiţia ca $\bar{\alpha} = \underline{\alpha}$.

Următorul rezultat dă optimalitatea testului secvenţial al raportului de verosimilităţi.

TEOREMA 11 (Lorden (1972)). *În presupunerile* (I), (II) şi (III'), *există un* $E^*(r)$ *astfel că orice procedeu care satisface* (60) *are valoarea medie a volumelor de selecţie, pentru toţi* $\theta \in (\underline{\theta}, \bar{\theta})$, *> ca ale testului secvenţial al raportului de verosimilităţi cu* $\gamma_{ij} = E^*(r)\ \alpha_{ij}$ *cînd* $\alpha_{ij} < 1$ *şi egal cu unu cînd* $\alpha_{ij} = 1$.

Pentru demonstraţie a se vedea Lorden (1972) teorema 3, p. 1424.

§ 4. Teste nesfîrşite şi aproximaţii ale probabilităţilor erorilor

Testul secvenţial al raportului de verosimilităţi pentru cazul $s = 2$ poate fi descris după cum urmează:

Oprim experimentul şi respingem $\theta \leqslant \theta_1$ cînd pentru prima oară

$$L_n(\hat{\theta}) \geqslant L_n(\theta_1) + \ln \gamma_1^{-1} \text{ şi } \hat{\theta} > \theta_1 \tag{79}$$

şi oprim experimentul şi respingem $\theta \geqslant \theta_2$ cînd pentru prima oară

$$L_n(\hat{\theta}) \geqslant L_n(\theta_2) + \ln \gamma_2^{-1} \text{ şi } \hat{\theta} < \theta \tag{80}$$

unde γ_1 şi γ_2 sînt alese pentru a face probabilităţile erorilor mai mici decît, α, β prestabilite.

Scanned with OKEN Scanner

Criteriul (75) pentru respingerea ipotezei $\theta \leqslant \theta_1$ defineşte ceea ce se numeşte un test nesfîrşit al ipotezei $\theta \leqslant \theta_1$ faţă de alternativa $\theta > \theta_1$.

Prototipul pentru testele nesfîrşite este T.S.R.P. unilateral: „respingem f_0 cînd $f_0/f \leqslant A$".

Testele nesfîrşite sînt studiate de Lorden (1973).

După cum un T.S.R.P. obişnuit este obţinut prin aplicarea simultană a două T.S.R.P. unilaterale, tot aşa testul secvenţial al raportului de verosimilităţi pentru $s = 2$ este obţinut prin aplicarea a două teste nesfîrşite, unul definit de (79) şi (80). Testele rapoartelor de verosimilităţi pentru problema celor k-decizii sînt echivalente cu aplicarea a k teste nesfîrşite simultane, unul pentru fiecare decizie şi cu oprirea experimentului de îndată ce unul dintre ele opreşte experimentul. Această reducere la teste nesfîrşite este importantă pentru următoarele motive:

— mai întîi este un mod de aplicare a testului secvenţial al raportului de verosimilităţi şi de calculare a marginilor de stopare;

— în al doilea rînd urmează aproximarea probabilităţilor erorilor.

În cazul T.S.R.P. aproximaţiile lui Wald ale probabilităţilor erorilor diferă numai prin factorii $1 - \alpha$ şi $1 - \beta$ de aproximaţiile probabilităţilor erorilor pentru fiecare dintre T.S.R.P. implicate. Din (67) există o margine superioară E a numărului de observaţii. Astfel, N fiind variabila aleatoare de stopare, probabilitatea erorii sub θ_1 a testului definit de (79) şi (80) este cel mult $P_{\theta_1}(N \leqslant E)$. În cele ce urmează dăm o aproximaţie a probabilităţilor de acest tip.

Presupunem că $\bar{\theta}$ aparţine spaţiului natural al parametrilor şi $I(\bar{\theta}, \theta_1) < \ln \gamma_1^{-1}$. Fie $m \geqslant 1$ cel mai mare întreg astfel:

$$mI(\bar{\theta}, \theta_1) \leqslant \ln \gamma_1^{-1},$$

Pentru $n > m$, definim θ_n^* ca situaţia în $\theta \in (\theta_1, \bar{\theta})$ a ecuaţiei $nI(\theta, \theta_1) = \ln \gamma_1^{-1}$. De asemenea, fie $N(\theta)$ cel mai mic n (sau ∞ dacă un astfel de n nu exista) astfel ca

$$L_n(\theta) \geqslant L_n(\theta_1) + \ln \gamma_1^{-1} \tag{81}$$

(79) este echivalentă cu

$$S_n \geqslant \inf_{\theta_1 < \theta < \bar{\theta}} \left[\frac{\ln \gamma_1^{-1}}{\theta - \theta_1} - n \frac{b(\theta) - b(\theta_1)}{\theta - \theta_1} \right] \tag{82}$$

şi pentru $n > m$ infimum este atins în θ_n^*. Din aceasta şi din faptul că prin definiţia $N \leqslant N(\theta_n^*)$, urmează că $N = n > m$ numai dacă $N(\theta_n^*) = n$. Prin urmare

$$P_{\theta_1}(N = n) \leqslant P_{\theta_1}(N(\theta_n^*) = n) \text{ pentru } n > m. \tag{83}$$

Dacă $n \leqslant m$, infimum în (82) este atins în $\bar{\theta}$ astfel ca

$$P_{\theta_1}(N \leqslant m) = P_{\theta_1}(N(\bar{\theta}) \leqslant m). \tag{84}$$

Avem

$$P_{\theta_1}(N(\theta) = n) \leqslant \gamma_1 P_{\theta}(N(\theta) = n) \text{ pentru toţi } \theta > \theta_1,\ n. \tag{85}$$

Scanned with OKEN Scanner

Din (83)—(85) avem

$$(86)\qquad P_{\theta_1}(N \leqslant E) \leqslant \gamma_1 \left\{ P_0(N(\bar{\theta}) \leqslant m) + \sum_{n=m+1}^{E} P_{\theta_n^*}(N(\theta_n^*) = n) \right\}.$$

Cînd θ_n^* este adevărată şi γ_1 este mic, $N(\theta_n^*)$ este repartizat aproximativ normal cu media $\ln \gamma_1^{-1}/I(\theta_n^*,\ \theta_1) = n$ şi dispersia

$$\frac{(\ln \gamma_1^{-1}) D^2_{\theta_n^*}(\ln [f(X;\ \theta_n^*)/f(X;\ \theta_1)])}{\{M_{\theta_n^*} \ln[f(X;\ \theta_n^*)/f(X;\ \theta_1)]\}^3} = \frac{(\ln \gamma_1^{-1})(\theta_n^* - \theta_1)^3 b''(\theta_n^*)}{[I(\theta_n^*,\ \theta_1)]^3}$$

(rezultat obţinut de Wald (1947))

Aceasta sugerează aproximaţiile

$$(87)\qquad P_{\theta_n^*}(N(\theta_n^*) = n) \simeq \frac{[I(\theta_n^*,\ \theta_1)]^{3/2}}{(\theta_n^* - \theta_1)[2\pi b''(\theta_n^*) \ln \gamma_1^{-1}]^{1/2}}$$

şi

$$(88)\qquad P_\theta(N(\bar{\theta}) \leqslant m) \simeq \gamma_1/2.$$

Privind n ca o variabilă continuă pe intervalul de la $(\ln \gamma_1^{-1})/I(\bar{\theta},\ \theta_1)$ la E, cu $nI(\theta_n^*,\ \theta_1) \equiv \ln \gamma_1^{-1}$, din (87) şi (88) se obţine următoarea aproximaţie pentru marginea superioară (86)

$$(89)\quad P_{\theta_1}(N \leqslant E) \leqslant \frac{\gamma_1}{2} + \gamma_1 \int_{(\ln \gamma_1^{-1})/I(\bar{\theta},\ \theta_1)}^{E} \frac{[I(\theta_n^*,\ \theta_1)]^{3/2}}{(\theta_n^* - \theta_1)[2\pi b''(\theta_n^*) \ln \gamma_1^{-1}]^{1/2}}\, \mathrm{d}n.$$

Făcînd schimbarea de variabilă $\theta = \theta_n^*$ şi derivînd relaţia care defineşte θ_n^* se obţine:

$$(\theta_n^* - \theta_1) b''(\theta_n^*) \frac{\mathrm{d}\theta_n^*}{\mathrm{d}n} = -\frac{\ln \gamma_1^{-1}}{n^2} = -\frac{[I(\theta_n^*,\ \theta)]^2}{\ln \gamma_1^{-1}}$$

şi deci

$$(90)\qquad P_{\theta_1}(N \leqslant E) \simeq \frac{\gamma_1}{2} + \gamma_1 (\ln \gamma_1^{-1})^{1/2} \int_{\theta_E^*}^{\bar{\theta}} \left[\frac{b''(\theta)}{2\pi I(\theta,\ \theta_1)} \right]^{1/2} \mathrm{d}\theta.$$

În cazul $N(\theta,\ 1)$, (90) devine

$$(91)\qquad P_{\theta_1}(\text{resping}\,\theta \leqslant \theta_1) \simeq \gamma_1 \left[\frac{1}{2} + \pi^{-1} (\ln \gamma_1^{-1})^{1/2} \ln \frac{\bar{\theta} - \theta_1}{\theta_E^* - \theta_1} \right].$$

Lorden (1973), folosind rezultatele lui Anderson (1960), arată că are loc inegalitatea în (91).

Scanned with OKEN Scanner

Capitolul XXVI

TESTE NEPARAMETRICE

§ 1. Introducere

În orice problemă de statistică se dă o mulţime de observaţii. Acestea sînt valorile luate de o variabilă aleatoare X cu o repartiţie despre care avem o informaţie parţială. Presupunînd că informaţia dată este corectă, dorim să găsim procedee optime pentru analiza datelor şi obţinerea de inferenţe asupra aspectelor necunoscute ale repartiţiei acestei variabile. Valabilitatea oricărui procedeu statistic depinde de inferenţa pe care o credem corectă. Se ridică o întrebare naturală. Ce se întîmplă dacă aplicăm un procedeu optim (obţinut în presupunerea că informaţia avută este corectă) cînd informaţia nu este corectă. Considerînd un exemplu concret, observăm că cele mai multe procedee întîlnite în statistică sînt bazate pe presupunerea că repartiţia variabilei este normală. Această presupunere este făcută obişnuit pentru uşurarea obţinerii rezultatelor. Ce se întîmplă dacă aplicăm *teoria normală* în cazul în care nu există normalitatea. Pentru uşurinţă vom presupune că *volumul selecţiei este mare.*

Fie $X_1, X_2, \ldots, X_n$ o selecţie asupra unei variabile X cu media θ şi dispersia σ^2. Dacă variabila X este normală, atunci testul pentru verificarea ipotezei $H_0 : \theta = \theta_0$ este bazat pe statistica

$$t = \sqrt{n}(\bar{X}_n - \theta_0)/s_n \tag{1}$$

şi testul pentru verificarea ipotezei $H_0' : \sigma = \sigma_0$ este bazat pe statistica

$$V = (n-1)s_n^2/\sigma_0^2 . \tag{2}$$

Cum numitorul lui t din (1) converge în probabilitate către σ, repartiţia limită a lui t este aceeaşi ca a statisticii $\sqrt{n}(\bar{X}_n - \theta_0)/\sigma$ care (sub H_0) după teorema limită centrală, este $N(0, 1)$. Astfel pentru valori mari ale lui n, repartiţia lui t este independentă de forma repartiţiei populaţiei şi deci volumul testului t va fi aproximativ acelaşi ca pragul de semnificaţie, chiar cînd repartiţia variabilei X nu este normală. O astfel de proprietate este cunoscută sub numele de *robusteţe.* În general are loc

DEFINIŢIA 1. (Box (1953)). Un procedeu statistic este robust dacă rămîne neschimbat la presupunerile care-l privesc.

Astfel am stabilit că pentru valori mari ale lui n testul t este robust faţă de normalitate. Totuşi aspectul este complet diferit cînd facem inferenţe asupra lui σ^2. În acest caz repartiţia limită a statisticii V nu este inde-

Scanned with OKEN Scanner

pendentă de repartiţia variabilei X_i; depinde de oblicitatea (γ_2) a repartiţiei variabilei X_i.

Astfel efectul călcării presupunerii de normalitate este dăunător în inferenţe asupra dispersiei (pentru alte exemple se poate vedea Scheffé (1959), Kendall, Stuart (1968)) şi în general asupra unor parametri de interes (Box, Andersen (1955)). Există două procedee de lucru în lipsa presupunerii de normalitate.

Un procedeu constă în găsirea unei transformări asupra observaţiilor astfel încît presupunerea de normalitate să fie satisfăcută (aproximativ) caz în care procedeele optime bazate pe presupunerea de normalitate vor putea fi aplicate. O a doua posibilitate este să abandonăm în întregime procedeele teoriei normale şi să găsim procedee statistice care rămîn adevărate pentru o clasă largă de funcţii de repartiţie să spunem pentru toate funcţiile de repartiţie continui. Aceste procedee poartă numele de *procedee neparametrice* sau *procedee ale repartiţiilor libere.*

Deoarece, în general, schemele de calcul ce apar în studiul selecţiilor mici sînt complicate, se studiază performanţele acestor procedee pentru selecţiile de volum mare. Putem clasifica domeniul inferenţei neparametrice după cum urmează:

— teste de permutare
— estimarea funcţionalelor regulate de funcţii de repartiţie
— teoria rangurilor statisticilor de ordine
— teste de ajustare
— regiuni de încredere neparametrice.

Ideea de bază privind testele de permutare a fost dată de Fisher (1935). Pentru o tratare matematică riguroasă, citäm, printre alţii pe Pitman (1937 a, 1937 b, 1938), Scheffé (1943), Wald şi Wolfowitz (1944), Lehmann şi Stein (1949), Noether (1949), Hoeffding (1952) şi Hájek (1961).

Estimarea funcţionalelor regulate de funcţii de repartiţie a fost studiată de Halmoş (1946), Von Mises (1947) şi Hoeffding (1948).

Hoeffding (1948) dă o teorie elegantă a U-statisticilor, teorie dezvoltată printre alţii de Lehmann (1951 a, 1951 b), Sukhatame (1957, 1958 a, 1958 b) şi Sen (1965). Multe dintre testele şi estimaţiile neparametrice sînt bazate pe U-statistici, cele mai importante lucrări fiind ale lui Kendal (1938), Wilcoxon (1945), Mann şi Whitney (1947), Kruskal şi Wallis (1952), Sukhatame (1957, 1958 a, 1958 b), Tamura (1960). Teoria U-statisticilor nu se aplică la o clasă importantă de statistici neparametrice cum ar fi statisticile de rang, mai importante fiind testul Van der Waerden (1952/1953, 1953) şi testul scorurilor normale Fisher-Yates. Această clasă include de asemenea testele lui Mood (1950, 1954), testul semnului rangului al lui Wilcoxon (1949), testul Kruskal-Wallis (1952) şi testul scorurilor normale al lui Fraser (1957 a). O teoremă foarte elegantă privind repartiţia asimptotică a statisticilor de rang se datoreşte lui Chernoff şi Savage (1958). Această teoremă a fost extinsă în diferite direcţii, printre alţii, de Puri (1964), Klotz (1962), Capon (1961), Hodges şi Lehmann (1963), Puri şi Puri (1968, 1969), Puri şi Sen (1966, 1967, 1969 b).

Regiunile de încredere neparametrice au fost studiate, printre alţii, de Wilks (1941), Wald (1943), Tukey (1948) şi Fraser (1953).

În prima parte a acestui capitol vom prezenta teoria statisticilor de rang. Statisticile de rang au jucat şi joacă un rol important în dezvoltarea statisticii neparametrice. Metodele bazate pe statisticile de rang sînt simple şi nu sînt vulnerabile la erori grosolane. Ele ocupă un loc important în

Scanned with OKEN Scanner

teoria asimptotică a estimării şi verificării ipotezelor statistice avînd eficienţa asimptotică relativă foarte înaltă în multe modele importante.

Studiul repartiţiei asimptotice a statisticilor de rang în cazul nenul a fost iniţiată de Dwass (1955, 1956). Totuşi una dintre cele mai importante teoreme în această direcţie a fost dată de Chernoff şi Savage (1958). Aceşti autori au dezvoltat o nouă teoremă pentru normalitatea asimptotică a clasei statisticilor de rang pentru problema celor două selecţii în condiţii medii asupra repartiţiilor de selecţie. Folosind convergenţa slabă în spaţii metrice, Pyke şi Shorack (1968 a, 1968 b) reiau teorema lui Chernoff şi Savage. Hájek (1968) dă o teoremă limită generală pentru normalitatea asimptotică a clasei de statistici de rang cînd fiecare observaţie poate avea o repartiţie diferită. Rezultatele obţinute de Hájek au fost dezvoltate printre alţii în diferite direcţii de Hoeffding (1968), Jureckova (1969), Huskova (1969), Puri şi Sen (1969 b), Sen şi Puri (1969). Aceste rezultate privesc regresia şi vor fi expuse în vol. IV.

În continuare vom prezenta testul semnelor şi testele de permutare.

În ultima parte a capitolului vom prezenta cîteva teste neparametrice secvenţiale avînd puterea unu, teste de rang pentru alternative Lehmann şi teste de rang pentru poziţie.

§ 2. Unele aspecte ale teoriei statisticilor de rang

2.1. Problema celor două selecţii

Fie — $\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_m)$ $[\mathbf{Y} = (Y_1, \ldots, Y_n)]$ o selecţie asupra unei variabile avînd funcţia de repartiţie $F[G]$ absolut continuă,

$$— N = m + n, \quad \lambda_N = m/N$$

şi presupunem că pentru toţi N au loc inegalităţile

$$0 < \lambda_0 \leqslant \lambda_N \leqslant 1 - \lambda_0 < 1$$

pentru $\lambda_0 \leqslant \frac{1}{2}$ fixat,

— $F_m(x)$ $[G_n(x)]$ funcţia de repartiţie empirică a selecţiei $\mathbf{X}[\mathbf{Y}]$

— $H_N = \lambda_N F_m(x) + (1 - \lambda_N) \; G_n(x)$,

$H(x) = \lambda_N F(x) + (1 - \lambda_N) G(x)$,

$$— Z_{Ni} = \begin{cases} 1, \text{ dacă statistica de ordine de rang } i \text{ în selecţia} \\ X_1, \ldots, X_m, Y_1, \ldots, Y_n \text{ este un } X \\ 0, \text{ în rest} \end{cases}$$

Atunci cele mai multe dintre testele pentru verificarea ipotezelor

$$H_{0(2)} : F(x) = G(x)$$

Scanned with OKEN Scanner

sînt bazate pe statistici liniare de rang de forma

$$T_{N(2)} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{N} E_{Ni} Z_{Ni} \tag{3}$$

unde $E_{Ni}, i = 1, \ldots, N$ este o mulțime de constante.

Exemple

1) testul Wilcoxon cu

$$E_{Ni} = i \text{ sau } \frac{i}{N+1}$$

2) testul scorurilor normale (sau Fisher, Yates (1938), Hoeffding (1952), Terry (1952)) cu

E_{Ni} = valoarea medie a statisticii de ordine de rang i într-o selecție de volum N asupra unei variabile $N(0,1)$

3) testul lui Van der Waerden (1952/1953), (1953)) cu

$$E_{Ni} = \Phi^{-1}\left(\frac{i}{N+1}\right)$$

4) testul Ansari, Bradley (1960) cu

$$E_{Ni} = \left| \frac{i}{N+1} - \frac{1}{2} \right|$$

5) testul Mood (1954) cu

$$E_{Ni} = \left(\frac{i}{N+1} - \frac{1}{2}\right)^2$$

6) testul cu

$$E_{Ni} = \left\{\Phi^{-1}\left(\frac{i}{N+1}\right)\right\}^2$$

și

7) testul cu

E_{Ni} = rădăcina pătrată din valoarea medie a statisticii de rang i într-o selecție de volum N asupra unei variabile $N(0, 1)$.

Exemplele 1) la 3) sînt teste pentru poziție, 4) la 7) (dacă se presupune că $F(x)$ și $G(x)$ au aceeași mediană) sînt teste pentru scală.

În obținerea rezultatelor asimptotelor se folosește pentru $T_{N(2)}$ reprezentare echivalentă

$$T_{N(2)} = \int_{-\infty}^{\infty} J_N\left[\frac{N}{N+1} H_N(x)\right] dF_m(x) \tag{4}$$

unde

$$E_{Ni} = J_N\left[\frac{i}{N+1}\right].$$

J_N este definită numai în punctele $\frac{1}{N+1}, \ldots, \frac{N}{N+1}$; se poate extinde domeniul ei de definiţie la $(0, 1)$, făcînd să ia o valoare constantă pe $\left(\frac{i}{N+1}, \frac{i+1}{N+1}\right)$. Constanta K (folosită în cele ce urmează) este o constantă generică care poate depinde de J_N însă nu depinde de $F(x)$, $G(x)$, m, n, şi N. Presupunerile ce conţin o_p, O_p sînt uniforme în $F(x)$, $G(x)$, $H(x)$, şi $\lambda_N \in [\lambda_0, 1-\lambda_0]$ unde $\lambda_0 > 0$. Presupunem că funcţia J_N satisface următoarele presupuneri

A. $\lim_{N\to\infty} J_N = J(u)$ există pentru $0 < u < 1$ şi nu este constantă

B. $$\int_{-\infty}^{\infty}\left\{J_N\left[\frac{N}{N+1}H_N(x)\right] - J\left[\frac{N}{N+1}H_N(x)\right]\right\}dF_m(x) = o_p(N^{-\frac{1}{2}})$$

C. $$|J^{(i)}(u)| = \left|\frac{d^i J(u)}{du^i}\right| \leqslant K[u(1-u)]^{\delta-i-\frac{1}{2}},\ i = 0,1$$ şi δ o constantă pozitivă.

Cu

(5) $$\mu_N = \int_{-\infty}^{\infty} J[H(x)]dF(x),$$

(6) $$N\sigma_N^2 = 2(1-\lambda_N)\left\{\iint\limits_{-\infty<x<y<\infty} A(G,H)\,dF(x)\,dF(y) + \right.$$

$$\left. + \frac{1-\lambda_N}{\lambda_N}\iint\limits_{-\infty<x<y<\infty} A(F,H)\,dG(x)\,dG(y)\right\}$$

unde

(7) $$A(R,S) = R(x)\ [1-R(y)]\ J'[S(x)]J'[S(y)]$$

are loc

TEOREMA 1. (Chernoff, Savage (1958)). *În presupunerile* A, B şi C *şi pentru* F, G şi λ_N *fixate*

(8) $$\lim_{N\to\infty} P\left[\frac{T_{N(2)} - \mu_N}{\sigma_N} \leqslant t\right] = \int_{-\infty}^{t} n(x;\ 0,1)\,dx,$$ *cu condiţia* $\sigma_N \neq 0$

unde μ_N şi σ_N *sînt date de* (5) *şi respectiv* (6).

Scanned with OKEN Scanner

Demonstrație. Rescriem T_N ca

$$T_N = \mu_N + B_{1N} + B_{2N} + \sum_{i=1}^{4} C_{iN} \tag{9}$$

unde μ_N este dată de (5)

$$B_{1N} = \int_{-\infty}^{\infty} J[H(x)]\, \mathrm{d}\,[F_m(x) - F(x)] \tag{10}$$

$$B_{2N} = \int_{-\infty}^{\infty} [H_N(x) - H(x)]\, J'[H(x)]\, \mathrm{d}F(x) \tag{11}$$

$$C_{1N} = \frac{-1}{N+1} \int_{-\infty}^{\infty} H_N(x) J'\,[H(x)]\, \mathrm{d}F_m(x) \tag{12}$$

$$C_{2N} = \int_{-\infty}^{\infty} [H_N(x) - H(x)]\, J'\,[H(x)]\, \mathrm{d}[F_m(x) - F\,(x)] \tag{13}$$

$$C_{3N} = \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ J\left[\frac{N}{N+1} H_N(x) \right] - J[H(x) - \left(\frac{N}{N+1} H_N(x) \right) - \right.$$

$$\left. - H(x) J'\,[H(x)] \right\} \mathrm{d}F_m(x) \tag{14}$$

$$C_{4N} = \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ J_N \left[\frac{N}{N+1} H_N\,(x) \right] - J \left[\frac{N}{N+1} H_N(x) \right] \right\} \mathrm{d}F_m\,(x). \tag{15}$$

Teorema este demonstrată dacă arătăm că

i) μ_N este finită

ii) $C_{iN} = \mathrm{O}_p(N^{-\frac{1}{2}})$, $i = 1,2,3,4$ şi

iii) $B_{1N} + B_{2N}$ are la limită o repartiţie normală.

i) urmează din presupunerea C şi din faptul că

$$\mathrm{d}H(x) \geqslant \lambda_0 \mathrm{d}F(x)$$

iii) Integrînd B_{2N} prin părţi obţinem

$$B_{1N} + B_{2N} = (1 - \lambda_N) \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} B(x)\, \mathrm{d}\,[F_m(x) - F(x)] - \right.$$

$$\left. - \int_{-\infty}^{\infty} B^*\,(x)\, \mathrm{d}\,[G_n\,(x) - G(x)\,] \right\} \tag{16}$$

Scanned with OKEN Scanner

unde

$$B(x) = \int_{x_0}^{x} J'[H(y)]\,dG(y),\ B^*(x) = \int_{x_0}^{x} J'[H(y)]\,dF(y), \tag{17}$$

$$\lambda_N B^*(x) + (1 - \lambda_N)\, B(x) = J\,[H(x)] - J[H(x_0)],$$

x_0 este determinat arbitrar, să spunem de $H(x_0) = \frac{1}{2}$.

$B_{1N} + B_{2N}$ din (16) poate fi exprimat echivalent ca

$$B_{1N} + B_{2N} = (1 - \lambda_N) \left\{ \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m} [B(X_i) - MB(X)] - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} [B^*(Y_i) - MB^*(Y)] \right\} \tag{18}$$

unde M reprezintă media şi X şi Y au funcţia de repartiţie F şi respectiv G.

Membrul drept al relaţiei (18) este suma a 2 termeni independenţi fiecare fiind media aritmetică de variabile aleatoare independente cu media zero şi dispersia finită. Aplicînd teorema limită centrală urmează ca $B_{1N} + B_{2N}$ normată convenabil, este la limită repartizată normal. Teorema este demonstrată.

COROLARUL 1 (Chernoff, Savage (1958)). *Dacă sînt satisfăcute presupunerile teoremei* 1 *şi dacă* $F(x)$, $G(x)$ *şi* $\lambda_N(0 < \lambda_0 \leqslant \lambda_N \leqslant 1 - < 1)$ *sînt restrînse la o mulţime pentru care* $B(X)$ *şi* $B^*(Y)$ *au dispersii mărginite întotdeauna de* 0, *atunci are loc normalitatea asimptotică uniform în raport cu* $F(x)$, $G(x)$ *şi* λ_N.

În general, dacă $J(u)$ este monotonă şi $F(x)$, $G(x)$ şi λ_N sînt restrînse la mulţimea pentru care

$$|\,J'[H(x)]\,| > 0$$

are o măsură pozitivă în raport cu $F(x)$ şi $G(x)$, atunci $B(x)$ şi $B^*(Y)$ vor avea întotdeauna dispersia mărginită de 0.

Următoarea teoremă dă o condiţie suficientă simplă în care presupunerile A şi B au loc

TEOREMA 2. *Dacă* $J_N\left(\frac{i}{N+1}\right)$ *este valoarea medie a statisticii de ordine de rang* i *într-o selecţie de volum* N *asupra unor populaţii cu funcţia de repartiţie* $\psi(x) = J^{-1}(x)$, *atunci o condiţie suficientă în care au loc presupunerile* A *şi* B *este ca să aibe loc condiţia* C.

Pentru demonstraţie a se vedea Puri, Sen (1971).

Următoarele rezultate sînt folosite în studiul eficienţei asimptotice a testelor bazate pe statisticile $T_{N(2)}$.

Scanned with OKEN Scanner

COROLARUL 2 *(Problema poziției) Presupunem că*

— condițiile *corolarului* 1 *sînt satisfăcute cu* $G(x) = F(x - \theta N^{-\frac{1}{2}})$ *unde* $F(x)$ *nu depinde de* N.

— $\lambda_N \to \lambda (0 < \lambda < 1)$ *cînd* $N \to \infty$.

Atunci repartiția limită a statisticii $N^{1/2}\,[T_{N(2)} - \mu_N(\theta)]$ *unde*

$$\mu_N(\theta) = \int_{-\infty}^{\infty} J[\lambda_N F(x) + (1 - \lambda_N) F(x - \theta N^{-\frac{1}{2}})]\, dF(x)$$

este normală cu media 0 *și dispersia* $\frac{1-\lambda}{\lambda} A^2$ *unde*

$$A^2 = \int_0^1 J^2(x)\, dx - \left(\int_0^1 J(x)\, dx\right)^2 \tag{19}$$

COROLARUL 3 *(Problema scării). Dacă*

— *sînt satisfăcute condițiile corolarului* 1 *cu* $G(x) = F(x/1 + \sigma N^{-\frac{1}{2}})$ *unde* $F(x)$ *nu depinde de* N,

— $\lambda_N \to \lambda (0 < \lambda < 1)$ *cînd* $N \to \infty$

atunci repartiția limită a statisticii $N^{1/2}[T_{N(2)} - \mu_N(\sigma)]$ *unde*

$$\mu_N(\sigma) = \int_{-\infty}^{\infty} J\,[\lambda_N F(x) + (1 - \lambda_N) F(x/1 + \sigma N^{-\frac{1}{2}})\, dF(x)$$

este normală cu media 0 *și dispersia* $\frac{1-\lambda}{\lambda} A_1^2$, *unde*

$$A_1^2 = \begin{cases} 3 \textit{ pentru testul } \text{Van der Waerden } \textit{sau testul scorurilor normale} \text{ (exemplele 6 și 7)} \\ 48 \textit{ pentru testul } \text{Ansari-Bradley (exemplul 4)} \\ 180 \textit{ pentru testul } \text{Mood (exemplul 5).} \end{cases} \tag{20}$$

Considerăm aplicații ale teoremei 1 și 2 la teste pentru probleme de poziție și scară, prezentînd eficiența asimptotică a procedeelor neparametrice în raport cu procedeele frecvent folosite în teoria normală. În acest scop folosim conceptul de eficiență asimptotică introdus în XIII 7.1.

Mai întîi considerăm problema celor două selecții cu $G(x) = F(x - \theta)$. Statistica $[T_{N(2)} - \mu_N(\theta)]/\sigma_N(\theta)$ tinde către o variabilă $N(0, 1)$, cînd $N \to \infty$, unde

$$\mu_N(\theta) = \int_{-\infty}^{\infty} J\left[\frac{m}{N} F(x) + \frac{n}{N} F(x - \theta)\right] dF(x) \tag{21}$$

Scanned with OKEN Scanner

şi

$$\sigma_N^2(0) = \frac{nA^2}{mN}, \quad A^2 \text{ definit de (19).} \tag{22}$$

În teoria normală se foloseşte t bazat pe statistica

$$t = \sqrt{\frac{mn}{N}}\,(\bar{Y} - \bar{X}) \Big/ \sqrt{\frac{\sum(X_i - \bar{X})^2 + \sum(Y_i - \bar{Y})^2}{N-2}}, \tag{23}$$

unde

$$\bar{X} = \sum_{i=1}^{m} X_i / m, \quad \bar{Y} = \sum_{j=1}^{n} Y_j / n.$$

Presupunînd că există dispersia σ^2 a repartiţiei F, numitorul lui t converge în probabilitate către σ; astfel t este asimptotic echivalent cu

$$t^* = \sqrt{\frac{mn}{N}}\,(\bar{Y} - \bar{X})/\sigma \tag{24}$$

care asimptotic (pentru $N \to \infty$) este repartizată $N\left(\sqrt{\frac{mn}{N}}/\sigma,\ 1\right)$. Presupunînd că $\mu_N(\theta)$ se poate deriva sub semnul integrală, şi folosind (XIII. 146) obţinem

$$e_{T_{N(2)},t} = \sigma^2 B^2(F)/A^2. \tag{25}$$

Cazuri particulare

I. Fie $J(u) = u$; atunci statistica $T_{N(2)}$ se reduce la statistica W a lui Wilcoxon pentru două selecţii. În acest caz, din (24) obţinem

$$e_{w,t} = 12\,\sigma^2 \left(\int_{-\infty}^{\infty} f^2(x)\,dx\right)^2. \tag{26}$$

Hodges şi Lehmann (1956) au arătat că

— $e_{w,t} \geqslant 0{,}864$ pentru toate funcţiile de repartiţie absolut continui

— $e_{w,t} = \frac{3}{\pi} \simeq 0{,}955$ cînd F este funcţia de repartiţie a unei variabile $N(0,1)$

— $e_{w,t} = 1$ cînd F este rectangulară pe (0,1) şi

— $e_{w,t} > 1$ pentru multe funcţii F care nu sînt normale.

II. Fie $J(u) = \Phi^{-1}(u)$, atunci statistica $T_{N(2)}$ se reduce la statistica scorurilor normale (S) pentru două selecţii. În acest caz (25) devine

$$e_{s,t} = \sigma^2 \left(\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f^2(x)\,dx}{\varphi[\Phi^{-1}\{F(x)\}]}\right)^2. \tag{27}$$

Scanned with OKEN Scanner

Chernoff şi Savage (1958) a arătat, că, pentru orice funcţie F absolut continuă avînd momentul de ordinul doi finit, $e_{s,t} \geqslant 1$.

Gastwirth şi Wolff (1968) dau o demonstraţie simplă a acestui fapt. Mikulski (1963) a arătat că $e_{s,t} = 1$ numai dacă F este normală.

Atît testul Wilcoxon cît şi testul scorurilor normale sînt robuste şi comparate cu testul t au eficienţa asimptotică minim 0,864 şi respectiv 1.

Comparăm testul Wilcoxon cu testul scorurilor normale. Din (26) şi (27) urmează că

$$e_{w,s} = 12 \frac{\int_{-\infty}^{\infty} f^2(x)\,dx}{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f^2(x)dx}{\varphi\{\Phi^{-1}[F(x)]\}}}. \tag{28}$$

Hodges şi Lehman (1961) au arătat că

$$e_{w,s} \leqslant \frac{6}{\pi} \simeq 1{,}91 \text{ pentru toate } F.$$

Tabelul 1 (Hodges şi Lehmann (1962)) lămureşte unele aspecte privind alegerea dintre testul Wilcoxon şi testul scorurilor normale.

Tabelul 1

Densitatea	$e_{w,s}$
Rectangulară	0
Exponenţială	0
Normală	$\frac{3}{\pi} \simeq 0{,}95$
Logistică	$\frac{\pi}{3} \simeq 1{,}05$.
Dublu exponenţială	$\frac{3\pi}{8} \simeq 1{,}18$
Cauchy	1,43

Acum considerăm problema celor două selecţii cu $G(x) = F(x/\sigma)$. Atunci pentru verificarea ipotezei $\sigma = 1$ faţă de $\sigma > 1$, Mood (1954), Ansari şi Bradley (1960), Capon (1961) şi Klotz (1962) au considerat statistici de forma $T_{N(2)}$ (definită în (3)) luînd E_{Ni} ca în exemplele 5, 4, 7 şi respectiv 6.

Notînd prin B — statistica Ansari — Bradley,

M — statistica Mood,

N — statistica scorurilor normale a lui Capon sau Klotz şi

F — statistica teoriei normale

Scanned with OKEN Scanner

şi presupunînd că F are densitatea f, găsim eficacitatea testelor bazate pe aceste statistici ((XIII. 132) şi proprietatea B din teorema XIII. 29)

(29) statistica M : $\frac{720\,mn}{N}\left[\int_{-\infty}^{\infty}\left\{F(x)-\frac{1}{2}\right\}xf^2(x)\,dx\right]^2$;

(30) statistica B : $\frac{48\,mn}{N}\left[\int_{0}^{\infty}xf^2(x)\,dx-\int_{-\infty}^{0}xf^2(x)\,dx\right]^2$,

(31) statistica N : $\frac{2\,mn}{N}\left[\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{\Phi^{-1}(F)}{\varphi[\Phi^{-1}\{F\}]}\right)xf^2(x)\,dx\right]^2$,

(32) statistica F : $\frac{4\,mn}{N(2+\gamma_2)}$ unde $\gamma_2 = M[X-M(X)]^4-3$.

Tabelul 2 (Klotz (1961)) dă compararea eficienţilor pentru diferite densităţi ale statisticii M, B şi N.

Tabelul 2

Densitatea	$e_{B,N}$	$e_{M,N}$	$e_{B,M}$
Exponenţială	0	0	0,600
Rectangulară	0	0	0,806
Normală	0,608	0,760	0,800
Logistică	0,750	0,896	0,837
Dublu exponenţială	0,774	0,900	0,860
Cauchy	1,783	1,670	1,068

De asemenea, avem (Puri (1972)).

Tabelul 3

Densitatea	$e_{N,F}$	$e_{M,F}$	$e_{B,F}$
Normală	1,000	0,760	0,608
Rectangulară	—	1,000	0,60
Dublu exponenţială	—	1,08	0,94

2.2. Problema unei selecţii

Fie $X_1, X_2, \ldots, X_N$ N variabile aleatoare independente şi identic repartizate avînd funcţia de repartiţie $F(x)$ continuă. Fie $Z_{N\alpha} = 1$ dacă statistica de ordine de rang α corespunzătoare valorilor $|X_i|$, $i = 1, 2, \ldots, N$ este un X pozitiv şi $Z_{N\alpha} = 0$ în rest, $\alpha = 0\,1, \ldots, N$. Atunci cele mai multe teste pentru verificarea ipotezei

$H_0^{(1)}$: $F(x)$ este simetrică faţă de zero

Scanned with OKEN Scanner

sînt bazate pe statistici de forma

$$T_{N(1)} = \frac{1}{N} \sum_{\alpha=1}^{N} E_{N\alpha}^{(1)} Z_{N\alpha} \tag{33}$$

unde $E_{N\alpha}^{(1)} = J_{N(1)}\left(\frac{\alpha}{N+1}\right), \alpha = 1, \ldots, N$ sînt constante cunoscute.

Exemple

8) testul semnelor cu $E_{N\alpha}^{(1)} = 1, \alpha = 1, \ldots, N$

9) testul semnelor rangurilor al lui Wilcoxon cu $E_{N\alpha}^{(1)} = \frac{\alpha}{N+1}, \alpha = 1, \ldots, N$

10) testul Fisher-Yates sau testul scorurilor normale cu $E_{N\alpha}$ ca valoarea medie a statisticii de ordine de rang α într-o selecţie de volum N asupra unei variabile $\chi^2(1)$ şi

11) testul Van der Waerden cu

$$E_{N\alpha}^{(1)} = \chi^{-1}\left(\frac{\alpha}{N+1}\right),$$

unde $\chi^{-1}(u)$ este inversa unei variabile $\chi^2(1)$.

Ca în cazul celor două selecţii putem exprima $T_{N(1)}$ ca

$$T_{N(1)} = \int_0^\infty J_{N(1)}\left[\frac{N}{N+1} H_{N(1)}(x)\right] \mathrm{d}F_N(x) \tag{34}$$

unde : $F_N(x) =$ (numărul de $X_\alpha \leqslant x$, $\alpha = 1, \ldots, N)/N$ este funcţia de repartiţie de selecţie a variabilelor $X_1, \ldots, X_N$ şi

$H_{N(1)}(x) =$ (numărul de $|X_\alpha| \leqslant x$, $\alpha = 1, \ldots, N)/N$ este funcţia de repartiţie de selecţie a variabilelor $|X_1|, \ldots, |X_N|$.

Astfel

$$H_{N(1)}(x) = F_N(x) - F_N(-x) \text{ dacă } x \geqslant 0 \text{ şi } H_{N(1)}(x) = 0 \text{ în rest.} \tag{35}$$

Presupunem că funcţia $J_{N(1)}$ satisfac următoarele presupuneri

D. $\lim_{N\to\infty} J_{N(1)}(u) = J_{(1)}(u)$ există pentru $0 < u < 1$ şi nu este constantă

$$\text{E. } \int_0^\infty \left\{J_{N(1)}\left[\frac{N}{N+1} H_{N(1)}(x)\right] - J_{(1)}\left[\frac{N}{N+1} H_{N(1)}(x)\right]\right\} \mathrm{d}F_N(x) = o_p\left(N^{-\frac{1}{2}}\right)$$

$$\text{F. } |J_{(1)}^{(i)}(u)| = \left|\frac{\mathrm{d}^i J_{(1)}(u)}{\mathrm{d}u^i}\right| \leqslant K\,[u(1-u)]^{\delta - i - \frac{1}{2}}, \quad i = 0,1$$

şi δ este o constantă pozitivă.

Scanned with OKEN Scanner

Fie

(36) $H_{(1)}(x) = F(x) - F(-x)$ dacă $x \geqslant 0$ și $H_{(1)}(x) = 0$ în rest

(37) $$a_N = \int_0^\infty J_{(1)}[H_{(1)}(x)]\,\mathrm{d}F(x)$$

$$b_N^2 = \int_0^\infty J_{(1)}[H_{(1)}(x)]\,\mathrm{d}F(x) - \left[\int_0^\infty J_{(1)}[H_{(1)}(x)]\,\mathrm{d}F(x)\right]^2 +$$

$$+ 2\Bigg[\iint\limits_{0<x<y<\infty} H_{(1)}(x)[1 - H_{(1)}(y)]J'_{(1)}[H_{(1)}(x)]J'_{(1)}(H_{(1)}(y)\mathrm{d}F(x)\,\mathrm{d}F(y) -$$

$$- \iint\limits_{0<x<y<\infty} H_{(1)}(x)\,J'_{(1)}[H_{(1)}(x)]J_{(1)}[H_{(1)}(y)]\,\mathrm{d}F(x)\,\mathrm{d}F(y) +$$

$$+ \iint\limits_{0<x<y<\infty} J_{(1)}[H_{(1)}(x)]\,[1 - H_{(1)}(y)]J'_{(1)}(y)[H_{(1)}(y)]\,\mathrm{d}F(x)\,\mathrm{d}F(y)\Bigg].$$

Atunci

TEOREMA 3. *În presupunerile* D, E, *și* F

(39) $$\lim_{N\to\infty} P\,[N^{1/2}(T_{N(1)} - a_N)/b_N \leqslant t] = \Phi(t)$$

cu condiția $b_N = 0$.

Ideea principală a demonstrației constă în descompunerea statisticii $T_{N(1)}$ ca

(40) $$T_{N(1)} = a_N + B_{1N} + B_{2N} + \sum_{i=1}^{4} C_{iN}$$

unde a_N este dat de (37)

(41) $$B_{1N} = \int_0^\infty J_{(1)}[H_{(1)}(x)]\,\mathrm{d}[F_N(x) - F(x)]$$

(42) $$B_{2N} = \int_0^\infty [H_{N(1)}(x) - H_{(1)}(x)]\,J'_{(1)}[H_{(1)}(x)]\,\mathrm{d}F(x),$$

termenii C sînt ca (12) — (15) (cu H_N, H, F_m și J înlocuiți de $H_{N(1)}$, $H_{(1)}$, F_N și respectiv $J_{(1)}$ și intervalul de integrare 0 la ∞) și se procedează ca în teorema 1.

Observație. Convergența în (39) este uniformă în F.

Scanned with OKEN Scanner

COROLARUL 4. *Dacă*

i) *presupunerile teoremei 3 sînt satisfăcute şi*

ii) $F(x)$ *este înlocuită prin şirul de funcţii de repartiţie* $\{F_{(n)}(x)\}$, *unde*

$F_{(n)}(x)$ *este simetrică faţă de* $\frac{\theta}{N^{1/2}}$, θ *fiind real şi finit şi*

iii) $J_{N(1)}\left(\frac{\alpha}{N+1}\right)$ *este valoarea medie a statisticii de ordine de rang* α *într-o selecţie de volum* N *dintr-o populaţie cu repartiţia* $\psi(x)$ *unde*

$$\psi^*(x) = \begin{cases} \psi(x) - \psi(-x), & x \geqslant 0 \\ 0 \quad , & x < 0 \end{cases} \tag{43}$$

$\psi(x)$ *fiind simetrică faţă de* $x = 0$, *atunci*

$$\lim_{N\to\infty} \sigma_N^2 = \frac{1}{4}\int_0^1 J^2_{(1)}(u)\,du. \tag{44}$$

Demonstraţie. Este o consecinţă a teoremei 3.

Observaţie. Eficienţele sînt aceleaşi ca pentru testele corespunzătoare pentru două selecţii.

2.3. Problema celor c selecţii

Această problemă constă în următoarele. Fie $[X_{ij}, j = 1, \ldots, m_i, i = 1, \ldots, c]$ o mulţime de variabile aleatoare independente şi $F^{(i)}(x)$ funcţia de repartiţie a variabilei X_{ij}. Mulţimea ipotezelor admisibile este că fiecare $F^{(i)}(x)$ aparţine unei clase de funcţii de repartiţie Ω (în acest caz clasa funcţiilor de repartiţie continui). Ipoteza $H_0^{(c)}$ pe care o verificăm specifică că pentru fiecare i, $F^{(i)}(x)$ este un element al mulţimii Ω şi că

$$F^{(1)}(x) = \ldots = F_{(c)}(x) \text{ pentru toţi } x \text{ reali.} \tag{45}$$

Putem considera drept clasă a ipotezelor alternative ipotezei $H^{(c)}$ toate mulţimile $(F^{(1)}, \ldots, F^{(c)})$ care aparţin mulţimii Ω însă nu satisfac (45). Sîntem interesaţi în alternative de translaţie şi de scară. Fie

$$F^{(i)}(x) = F(x + \delta^{(i)}),\ i = 1, \ldots, c. \tag{46}$$

Atunci în alternativele de translaţie sîntem interesaţi în verificarea ipotezei

$$H_0^{(c)} : \delta^{(1)} = \ldots = \delta^{(c)} \tag{47}$$

Scanned with OKEN Scanner

față de alternativele

$\delta_i \neq \delta_j$ pentru cel puțin o pereche (i, j), $i \neq j = 1, \ldots, c$

Pentru problema de scară presupunem că

$$F^{(i)}(x) = F[(x - \mu)/\sigma^{(i)}], \; i = 1, \ldots, c \tag{48}$$

și sîntem interesați în verificarea ipotezei

$$H_0^{(c)s} : \sigma^{(1)} = \ldots = \sigma^{(c)} \tag{49}$$

față de alternativele

$\sigma^{(i)} \neq \sigma^{(j)}$ pentru cel puțin o pereche (i, j), $i \neq j = 1, \ldots, c$

Testele pentru problema celor c selecții pot fi considerate ca extensia testelor corespunzătoare pentru problema celor 2 selecții.

Fie $Z_{Ni}^{(j)} = 1$ dacă statistica de ordine de rang i într-o selecție de volum $N = \sum_{i=1}^{c} m_i$ provine din selecția j și în rest fie $Z_{Ni}^{(j)} = 0$, $i = 1, \ldots, N$, $j = 1, \ldots, c$.

Fie

$$T_N^{(j)} = \sum_{i=1}^{N} E_{Ni} Z_{Ni}^{(j)}/m_j, \; j = 1, \ldots, c, \tag{50}$$

unde $E_{Ni} = J_N\left(\frac{i}{N+1}\right)$, $i = 1, \ldots, N$ sînt numere date ce satisfac presupunerile A, B, C din paragraful 2.1 Atunci cele mai multe teste pentru ipoteza H_0 sînt bazate pe rangurile statisticilor de ordine de forma

$$\mathfrak{L}_N = \sum_{j=1}^{c} m_j[(T_N^{(j)} - \bar{E}_N)/A_N]^2 \tag{51}$$

unde

$$E_N = \sum_{i=1}^{N} E_{Ni}/N \text{ și } A_N^2 = \sum_{i=1}^{N} (E_{Ni} - \bar{E}_N)^2/(N-1). \tag{52}$$

Exemple

12) testul H — Kruskal-Wallis (1952)* obținut luînd $E_{Ni} = i/(N+1)$,

13) testul scorurilor normale pentru c selecții (Puri (1965) a)) obținut luînd E_{Ni} ca valoarea medie a statisticii de ordinul de rang i într-o selecție de volum N asupra unei repartiții $N(0, 1)$,

* se vedea și Puri (1965a)

Scanned with OKEN Scanner

14) testul Van der Waerden pentru c selecţii obţinut luînd

$$E_{Ni} = \Phi^{-1}\left(\frac{i}{N+1}\right);$$

15) testul Ansari-Bradley (Puri(1965 b) pentru c selecţii, cu

$$E_{Ni} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2N} - \left|\frac{1}{2} + \frac{1}{2N} - \frac{i}{N}\right|,$$

16) testul Mood pentru c selecţii (Puri (1965 b)) cu

$$E_{Ni} = \left(\frac{i}{N} - \frac{N+1}{2N}\right)^2,$$

17) testul cu $E_{Ni} = \left\{\Phi^{-1}\left(\frac{i}{N+1}\right)\right\}^2$ şi

18) testul (Puri (1956 b)) cu E_{Ni} ca rădăcină pătrată din valoarea medie a statisticii de ordine de rang i într-o selecţie de volum N asupra unei variabile $N(0,1)$.

Exemplele 12 la 14 sînt teste pentru ipoteza $H_0^{(c)T}$ în (47) şi 15 la 18 sînt teste pentru $H_0^{(c)S}$. Testul 12 este asimptotic optim cînd F este de tip logistic şi testele 13, 14 şi 18 sînt asimptotic optime cînd F este de tip normal. Toate aceste teste, pentru $c = 2$, se reduc la testele corespunzătoare pentru două selecţii.

Acum presupunem că $E_{Ni} = J_N\left(\frac{i}{N+1}\right)$, $i = 1, \ldots, N$ satisfac presupunerile A şi C din paragraful 2.1. şi presupunerea

$$\text{G.}\int_{-\infty}^{\infty}\left\{J_N\left[\frac{N}{N+1}H_{N(c)}(x)\right] - J\left[\frac{N}{N+1}H_{(c)}(x)\right]\right\}\mathrm{d}F_{m_i}(x) = 0_p(N^{-\frac{1}{2}}),$$

unde

$$H_{N(c)}(x) = \sum_{i=1}^{c}\frac{m_i}{N}F^{(i)}(x),\ H_c(x) = \sum_{i=1}^{c}\frac{m_i}{N}F^{(i)}(x), \tag{53}$$

şi

$F_{m_i}(x) =$ (numărul variabilelor $X_{ij} \leqslant x, j = 1, \ldots, m_i$) / m_i, $i = 1, \ldots, c$.

Atunci următoarele teoreme dau repartiţia asimptotică a statisticii $\mathfrak{L}_N$ sub şirul alternativelor de translaţie şi scară.

Scanned with OKEN Scanner

TEOREMA 4 (Puri (1964)) *Dacă*

i) *pentru toți* i, $\lim_{N\to\infty} \frac{m_i}{N} = s_i$ *există și* $0 < s_i < 1$, $i = 1, \ldots, c$

ii) *sînt satisfăcute presupunerile* A, C și G.

iii) $F^{(j)}(x) = F(x + \theta_j/\sqrt{N})$, $j = 1, \ldots, c$

iv) *sînt satisfăcute condițiile* lemei 7.2. (Puri (1964)),

atunci $\mathfrak{L}_N$ *are asimptotic o repartiție* $\chi^2(c-1, \Delta_{\mathfrak{L}})$, *unde*

$$\Delta_{\mathfrak{L}} = \sum_{\alpha=1}^{c} s_\alpha (\theta_\alpha - \bar{\theta})^2 [B(F)/A]^2 \tag{54}$$

$$\bar{\theta} = \sum_{\alpha=1}^{c} s_\alpha \theta_\alpha, \quad B(F) = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} J[F(x)]\right) \mathrm{d}F(x), \tag{55}$$

și

$$A^2 = \int_0^1 J^2(x)\,\mathrm{d}x - \left(\int_0^1 J(x)\,\mathrm{d}x\right)^2.$$

TEOREMA 5. *Dacă*

i) *sînt satisfăcute presupunerile* i), ii) *și* iv) *ale teoremei* 4

ii) $F^{(j)}(x) = F[(x-\mu)/\sigma_{(n)}^{(j)}] = F[(x-\mu)/(1 - t_j/\sqrt{N})]$, $j = 1, \ldots, c$

atunci $\mathfrak{L}_N$ *are asimptotic o repartiție* $\chi^2(c-1, \Delta_{\mathfrak{L}})$, *unde*

$$\Delta_{\mathfrak{L}} = \sum_{j=1}^{c} s_j (t_j - \bar{t})^2 [c(F)/A_1]^2, \tag{56}$$

$$\bar{t} = \sum_{j=1}^{c} s_j t_j \tag{57}$$

și

$$C(F) = \int_{-\infty}^{\infty} x \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \{\Phi^{-1}[F(x)]\}^2\, \mathrm{d}F(x), \quad A_1 = 1/\sqrt{3} \tag{58}$$

penru scorurile normale și statistica Van der Waerden (exemplele 17 și 18)

$$C(F) = \int_{-\infty}^{0} x f^2(x)\mathrm{d}x - \int_0^{\infty} x f(x)\,\mathrm{d}x, \quad A_1 = 1/\sqrt{48} \tag{59}$$

pentru statistica Ansary-Bradley (exemplul 15)

$$c(F) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\,[2F(x) - 1]\,\mathrm{d}F(x), \quad A_1 = 1/\sqrt{180} \tag{60}$$

pentru testul Mood (exemplul 16).

Scanned with OKEN Scanner

2.4. Alternative ordonate

a. În § 2.3. am considerat problema verificării ipotezei

$$H_0^{(c)} : \delta^{(1)} = \ldots = \delta^{(c)}$$

față de alternativa că nu toți $\delta^{(i)}$ sînt egali. Aceasta este cea mai generală formă de alternative și este baza celor mai multe lucrări în teoria neparametrică. În acest caz, este avantajos să folosim informația suplimentară, pentru a obține teste mai puternice. Astfel, adeseori, sîntem interesați în verificarea ipotezei $H_0^{(c)}$ în (47) față de alternative ordonate

(61) $\quad \delta^{(1)} \geqslant \ldots \geqslant \delta^{(c)}$ (cu cel puțin o inegalitate strictă).

Pentru cazul $c = 2$, avem un test unilateral, însă pentru $c > 2$ distincția între testele uni și bilaterale este dificilă. Testele pe care le prezentăm în acest subparagraf pot fi privite ca generalizări ale unor teste ale rangurilor ordonate unilaterale.

Pentru obținerea testului vom considera mai întîi selecțiile în perechi (deci $c(c-1)/2$ perechi). Fie $X_i = (X_{i1}, \ldots, X_{im_i})$. Fie $\xi_\nu^{(i,j)} = 1$ dacă statistica de ordine de rang ν în selecția combinată a selecțiilor i și j este un X_i și în rest fie $\xi_\nu^{(i,j)} = 0$. Fie $\eta_\nu^{(i,j)} = -1$, dacă statistica de ordine de rang ν în selecția combinată a selecțiilor i și j este un X_j și în rest fie $\eta_\nu^{(i,j)} = 0$. Fie

(62) $$h_{ij} = \tau_{ij}^{(i)} + \tau_{ij}^{(j)}$$

unde

(63) $$\tau_{ij}^{(i)} = \sum_{\nu=1}^{m_i+m_j} E_\nu^{(i,j)} \, \xi_\nu^{(i,j)}$$

și

(64) $$\tau_{ij}^{(j)} = \sum_{\nu=1}^{m_i+m_j} E_\nu^{(i,j)} \, \eta_\nu^{(i,j)}$$

unde $\{E_\nu^{(i,j)}, \ \nu = 1, \ldots, m_i + m_j, \ i < j\}$ sînt constante cunoscute (care au aceeași interpretare ca și constantele E_{Ni} din 2.3).

Atunci pentru verificarea ipotezei $H_0^{(c)T}$ față de alternativa ordonată (64) considerăm statistică (Puri (1965 b), (1965 c))

(65) $$V = \sum_{i=}^{c-1} \sum_{j=i+1}^{c} m_i \, m_j \, h_{ij}.$$

Testul bazat pe statistica V este o extensie, la mai multe grupuri, a clasei de procedee care sînt frecvent recomandate pentru a decide dacă două selecții pot fi considerate ca aparținînd aceleeași populații.

Exemplul 19. Cînd

$$E_\nu^{(i,j)} = \frac{\nu}{m_i + m_i}$$

Scanned with OKEN Scanner

testul descris anterior coincide cu testul lui Jonkheere (1954) care este o generalizare a testului unilateral al lui Wilcoxon. Cînd $c = 2$, statistica V este echivalentă cu statistica $T_{N(2)}$ (3) în problema celor două selecţii.

Următoarea teoremă dă repartiţia asimptotică a statisticii V sub şirul alternativelor de translaţie

$$H_N^{(c)T} : F_i(x) = F(x - \theta_i/\sqrt{N}),\ i = 1, \ldots, c. \tag{66}$$

TEOREMA 6 (Puri (1965 b)) *Pentru fiecare indice N, presupunem că*

$$\frac{m_i}{N} \to \rho_i \text{ cînd } N \to \infty,\ 0 < \rho_i < 1$$

şi că ipoteza $H_N^{(c)T}$ este adevărată. Atunci statistica $N^{-\frac{3}{2}} V$ are la limită o repartiţie normală cu media

$$\sum_{i<j} \rho_i \rho_j (\theta_j - \theta_i) B(F) \tag{67}$$

şi dispersia

$$\frac{1}{3}\left[\left(\sum_{i=1}^{c} \rho_i\right)^3 - \sum_{i=1}^{c} \rho_i^3\right] A^2 \tag{68}$$

unde $B(F)$ şi A^2 sînt date de (55).

Teoria normală competitorie testului V este bazată pe statistica

$$T = \sum_{i<j} \sum m_i m_j (\bar{X}_i - \bar{X}_j),\ \bar{X}_i = \sum_{\alpha=1}^{m_i} X_{i\alpha}/m_i. \tag{69}$$

Se stabileşte că dacă $\frac{m_i}{N} \to \rho_i\ (0 < \rho_i < 1)$ cînd $N \to \infty$ şi dacă este adevărată $H_N^{(c)T}$, atunci $N^{-3/2}\ T$ are la limită o repartiţie normală cu media $\sum\sum_{i<j} \rho_i \rho_j (\theta_j - \theta_i)$ şi dispersia

$$\frac{\sigma^2}{3}\left[\left(\sum_{i=1}^{c} \rho_i\right)^3 - \sum_{i=1}^{c} \rho_i^2\right]$$

unde $\sigma^2 = D^2(X_{i\alpha})$

b. Fie $X_{i\alpha}\ i = 1, \ldots, c;\ \alpha = 1, \ldots, n$ variabile aleatoare independente avînd funcţiile de repartiţie continui

$$F_{i\alpha}(x) = P[X_{i\alpha} \leqslant x] = F_i(x - b_\alpha),\ i = 1, \ldots, c;\ \alpha = 1, \ldots n \tag{70}$$

unde $b_1, b_2, \ldots, b_n$ sînt efectele de bloc. Trebuie să verificăm ipoteza

$$H_0^{(b)} : F_i(x) \equiv F(x) \text{ (necunoscută)},\ i = 1, \ldots, c \tag{71}$$

Scanned with OKEN Scanner

față de

$$H_1^{(b)} : F_1(x) \leqslant \ldots \leqslant F_c(x) \tag{72}$$

pentru cel puțin un $i = 1, \ldots, c$, are loc inegalitatea strictă $F_i(x) < F_{i+1}(x)$. Scriem

$$X^*_{uv,\alpha} = X_{uv} - X_{v\alpha},\ u < v = 1, \ldots, c;\ \alpha = 1, \ldots, n \tag{73}$$

și fie $G_{uv}(x)$ funcția de repartiție a variabilei $X^*_{uv,\alpha}$. Considerăm statistica

$$T^{(n)}_{uv} = n^{-1} \sum_{\alpha=1}^{n} E_{n\alpha} Z^{(n)}_{uv,\alpha}, \tag{74}$$

unde $Z^{(n)}_{uv,\alpha} = 1$ sau 0 după cum statistica de ordine de rang α în selecția $|X^*_{uv,i}|\ i = 1, \ldots, n$ este un X^* pozitiv sau negativ și $E_{n\alpha}$ este valoarea medie a statisticii de ordine de rang α într-o selecție de volum n asupra repartiției

$$\psi^*(x) = \begin{cases} \psi(x) - \psi(-x), & x \geqslant 0 \\ 0, & \text{în rest.} \end{cases} \tag{75}$$

Presupunem că ψ este simetrică față de zero. Atunci pentru verificarea ipotezei $H_0^{(b)}$ față de $H_1^{(b)}$, considerăm statistica

$$V_n^{(b)} = \sum_{u<v} \sum T^{(n)}_{uv}. \tag{76}$$

În presupunerile D, E și F ale paragrafului 4, $V_n^{(b)}$ convenabil normalizată are la limită (Puri, Sen (1968)) sub $H_0^{(b)}$ și $H_1^{(b)}$, o repartiție limită normală. În fapt, sub $H_0^{(b)}$.

$$n^{1/2}\left(V_n^{(b)} - \frac{1}{2} C_n^2 \int_0^1 J^*(x)\, dx\right)$$

are la limită o repartiție normală cu media zero și dispersia

$$\frac{1}{4} C_c^2 \left[A_1^2 + 2\{(c-2)/3\}\, \lambda_{J^*(F)}\right]$$

unde

$$A_1^2 = \int_0^1 J^2(x)\, dx,\ \lambda_{J^*(F)} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} J[G(x)]J[G(y)]\, dG^*(x, y). \tag{77}$$

[Aici $J(u) = \psi^{-1}(u)$ și $G^*(x, y)$ este funcția de repartiție comună corespunzătoare variabilelor $X^*_{uv,\alpha}$, $X^*_{uw,\alpha}$ $(u \neq v \neq w)$ cu repartițiile marginale $G(x)$ și respectiv $G(y)$].

Scanned with OKEN Scanner

Acum, deoarece $\lambda_{J^*(F)}$ depinde de funcţia de repartiţie F, dispersia statisticii $V_n^{(b)}$ depinde de F (chiar sub $H_0^{(b)}$). Astfel testul bazat pe $V_n^{(b)}$, nu este asimptotic repartiţie liberă. Pentru a obţine un test care asimptotic este repartiţie liberă, obţinem estimatorul consistent pentru $\lambda_{J^*(F)}$. În acest scop procedăm după cum urmează :

Fie $R_{uv,\alpha}$ rangul variabilei $X^*_{uv,\alpha}$ printre $X^*_{uv,1}, \ldots, X^*_{uv,n}$, $\alpha = 1, \ldots, n$; $1 \leqslant u \leqslant v \leqslant c$. Fie

$$\hat{\lambda}_J = 2\,[c(c-1)\,(c-2)]^{-1} \sum_{\substack{u=1 \\ u \neq v}} \sum_{\substack{v>s \\ u \neq s}} L^{(n)}_{u,v,s} \tag{78}$$

unde

$$L^{(n)}_{uv,s} = \frac{1}{n} \sum_{\alpha=1}^{n} E_{n,\,R_{uv};\,\alpha}\, E_{n,\,R_{uv,s}}, \quad u \neq v \neq s = 1, \ldots, c \tag{79}$$

$\hat{\lambda}_J$ este un estimator consistent invariant la translaţie pentru $\hat{\lambda}_{J^*(F)}$ (Puri, Sen (1968)). Astfel un test care să aibă asimptotic o repartiţie liberă poate fi bazat pe normalitatea asimptotică a statisticii

$$V_n^{(b)} = n^{1/2}\left[V_n^* - \frac{1}{2} C_n^2 \int_0^1 J^*(x)\,\mathrm{d}x\right] \Big/ \left[\frac{1}{4} C_n^2 \{A_1^2 + 2\,(c-2)/3\}\,\hat{\lambda}_J\right]^{1/2}, \tag{80}$$

folosind coada dreaptă ca regiune critică.

Testul raportului de verosimilităţi pentru problema considerată în acest paragraf este bazat pe statistica (Puri şi Sen (1968)).

$$t^{(b)} = \hat{\theta}/\hat{\sigma}_0 \tag{81}$$

unde

$$\hat{\theta} = [c(c^2-1)]^{-1} \sum_{u<v} (X_{u.} - X_{v.}),\ X_{u.} = \sum_{\alpha=1}^{n} X_{u\alpha}\, n \tag{82}$$

şi $\hat{\sigma}_0$ este estimaţia abaterii standard a statisticii θ.

Atunci sub şirul de alternative $H_{1n}^{(n)}$ care specifică

$$H_{1n}^{(b)} : G_{uv}(x) = G(x - k(v-u)\,n^{-\frac{1}{2}}),\ 1 \leqslant u, v \leqslant c \tag{83}$$

unde c este o constantă finită (presupunînd anumite condiţii de regularitate care permit derivarea sub semnul integrată)

$$e_{v^{(b)},t^{(b)}} = 2\,\sigma^2(c+1)\,B^2(G)/[3A_1^2 + 2(c-2)\,\lambda_J(F)], \tag{84}$$

unde

$$B(G) = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{d}{\mathrm{d}x} J\,[G(x)]\right) \mathrm{d}G(x),\ J(x) = \psi^{-1}(x) \tag{85}$$

A_1^2 şi $J_{\lambda(F)}$ = sînt date de (77) şi σ^2 este dispersia lui $X_{u\alpha}$.

Scanned with OKEN Scanner

Dacă $\psi(x)$ este repartiţia $N(0, 1)$, atunci (Puri, Sen (1968)) membrul drept al relaţiei (84) este $\geqslant 1$ pentru toate repartiţiile continui G. Deci folosirea scorurilor normale conduce la un test care este, asimptotic, cel puţin la fel de eficient ca testul raportului de verosimilităţi bazat pe statistica $t^{(b)}$ definită în (81).

§ 3. Testul semnelor

3.1. Testul semnelor pentru alternative unilaterale

Calitatea unui articol produs într-un proces de fabricaţie este măsurată de o caracteristică X. Pentru ca un articol să fie corespunzător X trebuie să depăşească o constantă dată u. Dorim să verificăm ipoteza

$$H : p \geqslant p_0,$$

unde $p = P\{X \leqslant u\}$ este probabilitatea ca un articol să fie defect. Fie $X_1, \ldots, X_n$ măsurătorile asupra a n articole, astfel că $X, X_1, \ldots, X_n$ sînt independente.

Orice repartiţie de pe dreapta reală poate fi caracterizată de p şi de repartiţiile probabilistice P_- şi P_+ ale caracteristicii X dat $x \leqslant u$ şi respectiv $X > u$. Dacă repartiţiile P_- şi P_+ au densităţile p_- şi p_+ (de exemplu în raport cu $\mu = P_- + P_+$), atunci densitatea de repartiţie comună corespunzătoare măsurătorilor $X_1, \ldots, X_n$ în punctul de selecţie $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ce satisface

$$x_{i_1}, \ldots, x_{i_m} \leqslant u < x_{j_1}, \ldots, x_{j_{n-m}}$$

este

$$p^m (1-p)^{n-m}\, p_-(x_{i_1}) \ldots p_-(x_{i_m})\, p_+(x_{j_1}) \ldots p_+(x_{j_{n-m}}).$$

Considerăm alternativa (p_1, P_-, P_+) cu $p_1 < p_0$. Atunci cea mai puţin favorabilă repartiţiei λ pe H atribuie probabilitatea 1 la repartiţia (p_0, P_-, P_+) deoarece aceasta apare că este apropiată de alternativa aleasă. Cu această alegere a lui λ, testul XIII. 37) devine

$$\phi_\lambda(x) = \begin{cases} 1, & \left(\frac{p_1}{p_0}\right)^m \left(\frac{q_1}{q_0}\right)^{n-m} > C, \\ 0, & \left(\frac{p_1}{p_0}\right)^m \left(\frac{q_1}{q_0}\right)^{n-m} < C, \end{cases}$$

şi deci după cum $m <$sau$> C$. Prin urmare testul respinge ipoteza H cînd numărul M de articole defecte este suficient de mic sau mai precis cînd $M < C$ şi cu probabilitatea γ cînd $M = C$ unde

$$P(M < C) + \gamma P(M = C) = \alpha \text{ pentru } p = p_0 \tag{86}$$

Scanned with OKEN Scanner

$M \sim Bi(n, p)$ şi deci repartiţia sa nu depinde de P_+ şi P_-. Ca o consecinţă, funcţia de putere a testului depinde numai de p şi este o funcţie descrescătoare de p, astfel că sub H îşi atinge maximul în $p = p$. Aceasta dovedeşte că λ este cel mai puţin favorabilă şi ϕ_λ este C.M.P. Deoarece testul este independent de alternativa particulară aleasă, el este U.C.M.P.

Exprimată în termeni de variabilele $Z_i = X_i - u$, statistica test M este numărul de variabile $\leqslant 0$ şi testul este testul semnelor. Acesta este un test neparametric deoarece este obţinut fără să se presupună o formă funcţională dată pentru repartiţia caracteristicii X.

Argumentul anterior se aplică, fără modificări, la cazul în care articolul este satisfăcător dacă X variază între anumite limite $u < X < v$. Mai general argumentul se aplică şi în situaţia în care X este un vector. Presupunem că un articol este satisfăcător numai cînd X variază într-o anumită mulţime S. Atunci probabilitatea unui articol defect este

$$p = P(X \in \bar{S}),$$

şi P_- şi P_+ reprezintă repartiţiile lui X dat că $X \in S$ şi respectiv că $X \in \bar{S}$. Ca mai înainte există un test U.C.M.P. pentru verificarea ipotezei $H : p \geqslant p_0$ şi se respinge ipoteza H cînd numărul de defecte M este suficient de mic, marginea testului fiind determinată de (86).

3.2. Testul semnelor pentru alternative bilaterale

În scopul stabilirii preferinţelor faţă de unul dintre produsele A sau B din masa consumatorilor se consideră o selecţie de volum n. Fiecărui consumator ales în selecţie i se atribuie semnul $+$ sau $-$ după cum este în favoarea produsului A sau a produsului B. Dacă notăm prin Y numărul total al semnelor $+$, atunci $Y \sim Bi(n, p)$. Ne propunem să verficăm ipoteza

$$p = 1/2$$

conform căreia nu există nici o diferenţă între preferinţele cumpărătorilor, faţă de alternativa $p \neq 1/2$.

Testul pentru verificarea acestei ipoteze este testul bilateral al semnelor care respinge ipoteza $p = 1/2$ pentru valori mari de cantităţi $\left| Y - \frac{1}{2} n \right|$. Conform celor din XIII 4.2. acest test este U.C.M.P. nedeplasat.

Adeseori consumatorii declară că nu sînt decişi asupra unuia dintre produsele A sau B. Dacă p_+, p_- şi p_0 reprezintă probabilitatea preferinţei pentru produsul A, B respectiv probabilitatea unui răspuns nedecis atunci numerele X, Y şi Z ale deciziilor în favoarea produsului A, B şi respectiv ale deciziilor indiferente urmează o repartiţie multinomială cu funcţia de frecvenţe

$$\frac{n!}{x!\,y!\,z!} p_+^x\, p_-^y\, p_0^z \quad (x + y + z = n) \tag{87}$$

şi ipoteza pe care trebuie s-o verificăm este

$$H : p_+ = p_-.$$

Scanned with OKEN Scanner

Funcţia de frecvenţe (87) se mai poate scrie

$$\frac{n!}{x!\,y!\,z!}\left(\frac{p_+}{1-p_0-p_+}\right)^x\left(\frac{p_-}{1-p_0-p_+}\right)^y\left(\frac{p_0}{1-p_0-p_+}\right)^z(1-p_0-p_+)^n.$$

Aceasta constituie o familie exponenţială cu

$$U = Y,\ T = Z,$$

$$\theta = \ln\frac{p_+}{1-p_0-p_+},\ v = \ln\frac{p_0}{1-p_0-p_+}.$$

Ipoteza H se poate scrie

$$H : p_+ = 1 - p_0 - p_+;$$

este echivalentă cu $\theta = 0$.

Prin urmare pentru verificarea ipotezei H există un test U.C.M.P. nedeplasat care este obţinut considerînd pe z ca fixat şi determinînd cel mai bun test nedeplasat condiţionat pentru verificarea ipotezei H, dat $Z = z$. Deoarece repartiţia variabilei Y condiţionată de z dat este $Bi(p, n-z)$ cu $p = p_+/(1-p_0-p_-)$, avem de verificat ipoteza $p = 1/2$ într-o repartiţie binomială cu $n - z$ probe, pentru care regiunea de respingere este

$$\left|Y - \frac{1}{2}(n-z)\right| > c(z).$$

Observaţie. Prin urmare testul U.C.M.P. nedeplasat se obţine neluînd în considerare numărul cazurilor în care nu este exprimată nici o preferinţă şi aplicînd testul semnelor la datele rămase.

Puterea testului depinde puternic de p_0 care guvernează repartiţia variabilei Z. Pentru valori mari ale probabilităţii p_0 numărul $n - z$ de probe în repartiţia binomială condiţionată poate fi mic şi testul va avea astfel putere mică. În acest caz acesta poate fi un avantaj deoarece o valoare a lui p_0 suficient de mare faţă de valoarea raportului p_+/p_- implică că populaţia ca un întreg este puternic indiferentă în raport cu produsele.

Testul condiţionat al semnelor anterior se aplică la orice situaţie în care observaţiile sînt rezultatul a n probe independente fiecare dintre acestea putînd fi un succes (+), un insucces (−), sau o indiferenţă.

Indiferenţele mai pot fi tratate asociind aleator fiecăreia (cu probabilitatea 1/2) semnul + sau − . Numărul Y' al semnelor + după ce indiferenţele au fost tratate este o variabilă $Bi(p', n)$ unde $p' = p_+ + \frac{1}{2}p_0$. Ipoteza H devine

$$H : p' = \frac{1}{2}$$

Scanned with OKEN Scanner

şi este respinsă cînd

$$\left| Y' - \frac{1}{2} n \right| > c,$$

unde probabilitatea de respingere este α cînd $p' = \frac{1}{2}$.

Acest test poate fi privit ca un test aleator bazat pe X, Y şi Z şi este nedeplasat pentru verificarea ipotezei H în forma iniţială deoarece

$$p_+ \text{ este } = \text{ sau } \neq p_- \text{ după cum } p' = \text{ sau } \neq 1/2.$$

Acest test este mai puţin puternic decît testul U.C.M.P. nedeplasat pentru această situaţie, astfel că înlăturarea aleatoare a indiferenţelor conduc la o pierdere de putere.

Adeseori, problema preferinţei apare între un produs standard şi produsul modificat sau un produs nou. Dacă fiecărui subiect i se cere să exprime preferinţa precis, ipoteza de interes este ipoteza unilaterală.

$$p_+ \leqslant p_-,$$

unde $+$ reprezintă preferinţa pentru modificare. Totuşi dacă se permite o exprimare de indiferenţă, ipoteza care trebuie verificată nu este

$$p_+ \leqslant p_- \text{ ci } p_+ \leqslant p_0 + p_-$$

deoarece modificarea este de interes numai dacă este preferată. După cum am văzut, testul semnelor unilateral care respinge cînd numărul de semne plus este mare este U.C.M.P. pentru această problemă.

În unele cercetări, subiectul este întrebat nu numai să exprime preferinţa ci să dea şi o evoluţie mai detaliată. Putem fi interesaţi în ipoteza conform căreia nu există nici o diferenţă în reacţia consumatorului la cele două produse. Formal, aceasta stabileşte că repartiţia scorurilor $X_1, \ldots$ $\ldots, X_n$ ce exprimă gradul de preferinţă a n subiecţi pentru produsul modificat este simetrică faţă de origine. Fără presupuneri suplimentare, pentru această problemă nu există un U.C.M.P. test.

Alternativ, ipoteza de interes poate continua să fie $H : p_+ = p_-$. Deoarece $p_- = P\{X < 0\}$ şi $p_+ = P\{X > 0\}$, ipoteza devine

$$H : P\{X > 0\} = P\{X < 0\}.$$

Simetria lui X nu este presupusă chiar dacă $P\{X < 0\} = P\{X > 0\}$. Dacă nu se face nici o presupunere privind repartiţia variabilei X, testul semnelor bazat pe numărul X-lor care sînt pozitivi şi negativi continuă să fie U.C.M.P.

Pentru a vedea aceasta, notăm că orice repartiţie a variabilei X poate fi specificată de probabilităţile

$$p_- = P\{X < 0\},\ p_+ = P\{X > 0\},\ p_0 = P\{X = 0\}$$

şi repartiţiile F_- şi F_+ ale lui X condiţionat de $X<0$ şi respectiv $X>0$ dat. Considerăm orice repartiţie F'_-, F'_+ fixate şi notăm prin $\mathcal{F}_0$ familia tuturor repartiţiilor cu

$$F_- = F'_-,\ F_+ = F'_+ \text{ şi } p_-,\ p_0, p_1 \text{ arbitrare.}$$

Orice test care este nedeplasat pentru verificarea ipotezei H în familia originală a repartiţiilor $\mathcal{F}$ în care F_- şi F_+ sînt necunoscute este de asemenea nedeplasat pentru verificarea ipotezei H în familia mai mică $\mathcal{F}_0$. Există un test U.C.M.P. ϕ_0 pentru H în $\mathcal{F}_0$; ϕ_0 este de asemenea nedeplasat pentru H în $\mathcal{F}$ şi este independentă de F'_-, F'_+. Fie ϕ orice alt test nedeplasat pentru H în $\mathcal{F}$ şi considerăm orice alternativă fixată care fără a pierde din generalitate poate fi presupusă ca aparţinînd la $\mathcal{F}_0$. Deoarece ϕ este nedeplasat pentru $\mathcal{F}$, el este nedeplasat pentru

$$p_+ = p_- \text{ în } \mathcal{F}_0;$$

puterea lui ϕ_0 faţă de o alternativă particulară este prin urmare cel puţin la fel de bună ca ϕ. Deci ϕ_0 este U.C.M.P. nedeplasat.

Pentru a determina testul U.C.M.P. pentru H în $\mathcal{F}_0$, fie f'_- şi f'_+ densităţile repartiţiilor F'_- şi F'_+ în raport cu o măsură μ. Densitatea comună a X-ilor în punctul $(x_1, \ldots, x_n)$ cu

$$x_{i_1}, \ldots, x_{i_r} < 0 = x_{j_1} = \ldots = x_{j_s} < x_{k_1}, \ldots, x_{k_m}$$

este

$$p_-^r\, p_0^s\, p_+^m f'_-(x_{i_1}) \ldots f'_-(x_{i_r}) f'_+(x_{k_1}) \ldots f'_+(x_{k_m}).$$

Mulţimea statisticilor (r, s, m) este suficientă pentru (p_-, p_0, p_+) şi repartiţia sa este dată de (87) cu

$$x = r,\ y = m,\ z = s.$$

Prin urmare testul semnelor este U.C.M.P. nedeplasat.

3.3. Testul semnelor în comparaţia pe perechi

În metoda comparaţiei pe perechi pentru verificarea ipotezei conform căreia un tratament are un efect pozitiv, materialul experimental constă din n perechi de subiecţi. Din fiecare pereche se alege la întîmplare un subiect pentru tratament în timp ce celălalt serveşte ca control. Fie X_i egal cu 1 sau 0 după cum în perechea i experimentul este favorabil subiectului tratat sau a celui de control şi fie $p_i = P(X_i = 1)$. Ipoteza conform căreia tratamentul nu are nici un efect este

$$H : p_i = 1/2 \text{ pentru } i = 1, \ldots, n$$

iar ipoteza alternativă

$$p_i > 1/2 \text{ pentru toţi } i.$$

Scanned with OKEN Scanner

Problema rămîne invariantă sub toate permutările de n variabile $X_1, X_2, \ldots, X_n$ şi un invariant maximal sub acest grup este numărul total de succese $X = X_1 + \ldots + X_n$. Repartiţia statistică X este dată de

$$P\{X = k\} = q_1 \ldots q_n \sum \frac{p_{i_1}}{q_{i_1}} \ldots \frac{p_{i_k}}{q_{i_k}},$$

unde $q_i = 1 - p_i$ şi unde sumarea se extinde asupra tuturor celor C_n^k alegeri de indici $i_1 < \ldots < i_k$. C.M.P. test invariant faţă de alternativa $(p_1' \ldots p_n')$ respinge H cînd

$$f(k) = \frac{1}{C_n^k} \sum \frac{p_{i_1}'}{q_{i_1}'} \ldots \frac{p_{i_k}'}{q_{i_k}'} > C.$$

Pentru a vedea că f este o funcţie crescătoare de k, notăm că $a_i = p_i'/q_i' > 1$ şi că

$$\sum_j \sum a_j a_{i_1} \ldots a_{i_k} = (k+1) \sum a_{i_1} \ldots a_{i_{k+1}}$$

şi

$$\sum_j \sum a_{i_1} \ldots a_{i_k} = (n-k) \sum a_{i_1} \ldots a_{i_k}.$$

În amîndouă ecuaţiile, a doua sumă din membrul stîng se extinde la toţi indicii $i_1 < \ldots < i_k$ în care nici unul nu este egal cu j, şi suma din membrul drept se extinde la toţi indicii $i_1 < \ldots < i_k$ şi respectiv $i_1 < \ldots < i_{k+1}$ fără nci o respingere. Atunci

$$f(k+1) = \frac{1}{C_n^{k+1}} \sum a_{i_1} \ldots a_{i_{k+1}} = \frac{1}{(n-k)C_n^k} \sum_j \sum a_j a_{i_1} \ldots a_{i_k} >$$

$$> \frac{1}{C_n^k} \sum a_{i_1} \ldots a_{i_k} = f(k),$$

ceea ce trebuia să arătăm. Indiferent de alternativa aleasă, testul respinge cînd $k > C$ şi deci este U.C.M.P. invariant. Dacă comparaţia i este considerată ca plus sau minus după cum X_i este 1 sau 0, se obţine testul semnelor.

§ 4. Teste de permutare

Fie $X_1, \ldots, X_m [Y_1, \ldots, Y_n]$ o selecţie asupra unei populaţii $N(\mu_1, \sigma^2)$ $[N(\mu_2, \sigma^2)]$. În XVI. 3 am văzut că testul t este U.C.M.P. nedeplasat pentru verificarea ipotezei

$$H : \mu_1 = \mu_2$$

faţă de ipoteza alternativă.

$$\mu_2 - \mu_1 = \Delta > 0.$$

Scanned with OKEN Scanner

În cele ce urmează vom considera această problemă fără presupunerea de normalitate şi anume $X_1, \ldots, X_m$ $[Y_1, \ldots, Y_n]$ este o selecţie asupra unei repartiţii cu densitatea $f(x)$ $[f(y - \Delta)]$ unde f este presupusă continuă a.p.t., însă în rest necunoscută. În această formulare neparametrică, densitatea de repartiţie comună corespunzătoare variabilelor de selecţie este

$$f(x_1) \ldots f(x_m) f(y_1 - \Delta) \ldots f(y_n - \Delta), f \in \mathfrak{F}, \tag{88}$$

unde $\mathfrak{F}$ este familia tuturor densităţilor de repartiţie care sînt continui a.p.t.

Dacă în populaţia din care considerăm selecţia sînt variaţii puternice, putem creşte sensibilitatea experimentului prin împărţirea populaţiei în mai multe subgrupe omogene; aceste subgrupe fiind definite de anumite caracteristici ca de exemplu vîrstă, sex. Atunci din subpopulaţia i se ia o selecţie de volum N_i, $i = 1, \ldots, c$, m_i servind ca control şi ceilalţi $n_i = N_i - m_i$ primind tratamentul. Dacă observaţiile în subgrupul i al unei astfel de *selecţii stratificate* sînt notate prin

$$(X_{i1}, \ldots, X_{im_i}; Y_{i1}, \ldots, Y_{in_i}) = (Z_{i1}, \ldots, Z_{iN_i})$$

atunci densitatea lui $Z = (Z_{11}, \ldots, Z_{cN_c})$ este

$$p_\Delta(z) = \prod_{i=1}^{c} [f_i(x_{i1}) \ldots f_i(x_{im_i}) f_i(y_{i1} - \Delta) \ldots f_i(y_{in_i} - \Delta)]. \tag{89}$$

Nedeplasarea testului ϕ pentru verificarea ipotezei

$$\Delta = 0 \text{ faţă de } \Delta > 0$$

implică că pentru toţi $f_1, \ldots, f_c$

$$\int \phi(z)\, p_0(z) dz = \alpha (dz = dz_{11} \ldots dz_{cN_c}) \tag{90}$$

Teorema 7. *Dacă $\mathfrak{F}$ este familia tuturor densităţilor de repartiţie f care sînt continui* a.p.t., *atunci* (90) *are loc pentru toate densităţile $f_1, \ldots, f_c \in \mathfrak{F}$ dacă şi numai dacă*

$$\frac{1}{N_1! \ldots N_c!} \sum_{z' \in S(z)} \phi(z') = \alpha \text{ a.p.t.} \tag{91}$$

unde: $S(z)$ este mulţimea punctelor obţinute din z permutînd pentru fiecare $i = 1, \ldots, c$ coordonatele z_{ij} $(j = 1, \ldots, N_i)$ în interiorul subgrupului i, în toate cele $N_1! \ldots N_c!$ moduri posibile.

Demonstraţie. Pentru a demonstra rezultatul pentru cazul $c = 1$, observăm că mulţimea statisticilor ordonate $T(z) = (Z^{(1)}, \ldots, Z^{(N)})$ este suficientă şi completă pentru $\mathfrak{F}$. Prin urmare condiţia necesară şi suficientă ca să aibe loc (90) este

$$M[\phi(z) \mid T(z)] = \alpha \text{ a.p.t.} \tag{92}$$

Scanned with OKEN Scanner

În acest caz ($c = 1$) mulțimea $S(z)$ constă în $N!$ puncte obținute din z prin permutarea coordonatelor, astfel încît

$$S(z) = \{z' : T(z') = T(z)\}.$$

Repartiția lui Z dată $T(z)$ atribuie probabilitatea $1/N!$ la fiecare dintre cele $N!$ puncte din $S(z)$. Astfel (92) este echivalentă cu

$$\frac{1}{N!} \sum_{z' \in S(z)} \phi(z') = \alpha \text{ a.p.t.} \tag{93}$$

ceea ce trebuia să demonstrăm.

DEFINIȚIA 2. Testele care satisfac (91) poartă numele de *teste de permutare*.

Vom determina testul care, supus la (91), maximizează puterea față de alternativa fixă (89) sau mai general față de alternativa cu densitatea $h(z)$ arbitrară și fixă.

Puterea testului ϕ față de o alternativă h este

$$\int \phi(z)\, h(z)\, dz = \int M[\phi(z) \mid t]\, dP^T(t).$$

Fie $t = T(z) = (z^{(1)}, \ldots, z^{(N)})$ astfel ca $S(z) = S(t)$. Media lui $\phi(Z)$ dat $T(z) = t$ este

$$\psi(t) = \frac{\sum_{z \in S(t)} \phi(z)\, h(z)}{\sum_{z \in S(t)} h(z)}$$

Prin urmare pentru a maximiza puterea lui ϕ supusă la (91) este necesar să maximizăm $\psi(t)$ pentru fiecare t supusă la această condiție. Prin urmare trebuie să determinăm o funcție ϕ, care supusă la

$$\sum_{z \in S(t)} \phi(z)\, \frac{1}{N_1! \ldots N_c!} = \alpha$$

să maximizeze

$$\sum_{z \in S(t)} \phi(z)\, \frac{h(z)}{\sum_{z' \in S(t)} h(z')}$$

După lema Neyman-Pearson, se obține aceasta respingînd H pentru acele puncte z din $S(t)$ pentru care raportul

$$\frac{h(z)\, N_1! \ldots N_c!}{\sum_{z' \in S(t)} h(z')}$$

Scanned with OKEN Scanner

este mare. Astfel cel mai puternic test este dat de funcţia critică

$$\phi(z) = \begin{cases} 1, & h(z) > C[T(z)] \\ \gamma, & h(z) = C[T(z)] \\ 0, & h(z) < C[T(z)]. \end{cases} \tag{94}$$

Pentru a aplica testul, cele $N_1 ! \ldots N_c !$ puncte din fiecare mulţime $S(z)$ sînt ordonate după valorile densităţii h. Ipoteza este respinsă pentru cea de a k valoare în ordinea mărimii şi cu probabilitatea γ pentru cea de a $(k+1)$ valoare în ordinea mărimii, unde k şi γ sînt definite de

$$k + \gamma = \alpha N_1 ! \ldots N_c !.$$

Considerăm în particular alternativa (89). Cel mai puternic test de permutare depinde de Δ şi f_i şi prin urmare nu este U.C.M.P. Prezintă interes clasa alternativelor normale cu

$$f_i = n(\cdot, \mu_i, \sigma^2).$$

Cel mai puternic test faţă de aceste alternative, care tinde să fie independent de μ_i, σ^2 şi Δ este corespunzător cînd este suspectată normalitatea. Atunci poate fi convenabil să controlăm volumul testului la pragul α indiferent de forma densităţii f_i şi să avem un test nedeplasat pentru toate alternativele (89). Totuşi, este natural ca din clasa testelor ce satisfac aceste restricţii să facem o selecţie astfel ca să maximizăm puterea faţă de tipul de alternativă care se aşteaptă, adică faţă de alternativele normale.

Cu această alegere a lui f_i, (89) devine

$$h(z) = (\sqrt{2\pi}\,\sigma)^{-N} \exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^{c} \left(\sum_{j=1}^{m_i} (z_{ij} - \mu_i)^2 + \right.\right. \tag{95}$$
$$\left.\left. + \sum_{j=m_i+1}^{N_i} (z_{ij} - \mu_i - \Delta)^2 \right)\right].$$

Deoarece factorul $\exp\left[-\sum_i \sum_{j=1}^{N_i} (z_{ij} - \mu_i)^2 / 2\sigma^2 \right]$ este constant pe $S(t)$ testul (94) respinge H cînd

$$\exp\left(\Delta \sum_i \sum_{j=m_i+1}^{N_i} z_{ij} \right) > C[T(z)]$$

şi deci cînd

$$\sum_{i=1}^{c} \sum_{j=1}^{n_i} y_{ij} = \sum_{i=1}^{c} \sum_{j=m_i+1}^{N_i} z_{ij} > C[T(z)]. \tag{96}$$

Din cele $N_1 ! \ldots N_c !$ valori pe care această statistică le ia pe $S(t)$ numai $C_{N_1}^{n_1} \ldots C_{N_c}^{n_c}$ sînt distincte deoarece valoarea acestei statistici este aceiaşi

Scanned with OKEN Scanner

pentru orice două puncte z' și z'' pentru care $(z'_{i1}, \ldots, z_{im_i})$ și $(z''_{i1}, \ldots, z''_{im_i})$ sînt permutări pentru fiecare i a uneia în alta. Prin urmare vom respinge H pentru cea de-a k-a valoare și cu probabilitatea γ pentru cea de-a $(k+1)$-a valoare, unde

$$k' + \gamma' = \alpha C_{N_1}^{n_1} \ldots C_{N_c}^{n_c}.$$

Testul (96) este C.M.P. față de alternativele normale pentru toate testele care sînt nedeplasate și de prag α pentru verificarea ipotezei $H : \Delta = 0$ în familia (89) cu $f_1, \ldots, f_c \in \mathfrak{F}$. Pentru a completa demonstrația acestei presupuneri este necesar să dovedim că testul este nedeplasat față de alternativele (89). Vom arăta, mai general, că este nedeplasat față de toate alternativele pentru care $X_{ij} (j = 1, \ldots, m_i)$, $Y_{ik} (k = 1, \ldots, n_i)$ sînt independente cu funcțiile de repartiție F_i, respectiv G_i astfel încît Y_{ik} este stocastic mai mare decît X_{ij}, adică astfel încît

$$G_i(z) \leqslant F_i(z) \text{ pentru toți } z$$

Aceasta este o consecință a lemei

LEMA 1. (Lehmann (1959)). *Fie* $X_1, \ldots, X_m$; $Y_1, \ldots, Y_n$ *selecții asupra repartițiilor continui* F, G *și fie* $\phi(x_1, \ldots, x_m; y_1, \ldots, y_n)$ *o funcție critică astfel încît*

a) *valoarea sa medie este* α, $G = F$ *și*

b) $y_i \leqslant y'_i$ *pentru* $i = 1, \ldots, n$ *implică*

$$\phi(x_1, \ldots, x_m; y_1, \ldots, y_n) \leqslant \phi(x_1, \ldots, x_m; y'_1, \ldots, y'_n)$$

Atunci media $\beta = \beta(F, G)$ *a lui* ϕ *este* $\geqslant \alpha$ *pentru toate perechile de repartiții pentru care* Y *este stocastic mai mare decît* X; *ea este* $\leqslant \alpha$ *dacă* X *este stocastică mai mare decît* Y.

Demonstrație. Există funcțiile f și g și variabilele independente $V_1, \ldots, V_{m+n}$ astfel că funcțiile de repartiție ale variabilelor $f(V_i)$ și $g(V_i)$ sînt F și respectiv G și că $f(z) \leqslant g(z)$ pentru toți z.
Atunci

$$M\phi[f(V_1), \ldots, f(V_m); f(V_{m+1}), \ldots, f(V_{m+n})] = \alpha$$

și

$$M\phi[f(V_1), \ldots, f(V_m); g(V_{m+1}), \ldots, g(V_{m+n})] = \beta.$$

Deoarece pentru toți $(v_1, \ldots, v_{m+n})$

$$\phi([f(v_1), \ldots, f(v_m); f(v_{m+1}), \ldots, f(v_{m+n})] \leqslant$$

$$\leqslant \phi[f(v_1), \ldots, f(v_m); g(v_{m+1}), \ldots, g(v_{m+n})]$$

aceiași inegalitate are loc pentru mediile ambilor membrii și deci $\alpha \leqslant \beta$. Demonstrația pentru cazul în care X este stocastic mai mare decît Y este analoagă. Lema se generalizează de asemenea la c vectori $(X_{i1}, \ldots, X_{im_i}, Y_{i1}, \ldots, Y_{in_i})$ cu repartiția (F_i, G_i). Dacă media funcției ϕ este atunci α cînd $F_i = G_i$ și ϕ este nedescrescătoare în fiecare y_{ij} cînd

Scanned with OKEN Scanner

toate celelalte variabile sînt fixate, urmează ca mai înainte că media funcţiei ϕ este $\geqslant \alpha$ cînd variabilele aleatoare cu repartiţia G_i sînt stocastic mai mari decît acelea cu repartiţia F_i.

În aplicarea lemei la testul de permutare (96) considerăm cazul $c = 1$, argumentul în cazul generat fiind complet analog. Deoarece probabilitatea de respingere a testului (96) este α cînd $F = G$, este necesar numai că funcţia critică ϕ a testului satisface (b). Acum $\phi = 1$ dacă $\sum_{i=m+1}^{m+n} z_{j_i}$ depăşeşte $\sum_{i=m+1}^{m+n} z_{i_i}$ şi deci dacă diferenţele

$$\sum_{i=m+1}^{m+n} z_i - \sum_{i=m+1}^{m+n} z_{j_i}$$

sînt pozitive. Pentru o permutare particulară $(j_1, \ldots, j_{m+n})$

$$\sum_{i=m+1}^{m+n} z_i - \sum_{i=m+1}^{m+n} z_{j_i} = \sum_{i=1}^{p} z_{s_i} - \sum_{i=1}^{p} z_{r_i}$$

unde $r_1 < \ldots < r_p$ reprezintă acei întregi $j_{m+1}, \ldots, j_{m+n}$ care sînt $\leqslant m$ şi $s_1 < \ldots < s_p$ acei întregi $m+1, \ldots, m+n$ care nu sînt incluşi în mulţimea $(j_{m+1}, \ldots, j_{m+n})$. Dacă $\sum z_{s_i} - \sum z_{r_i}$ este pozitivă şi $y_i \leqslant y'_i$, adică $z_i \leqslant z'_i$ pentru $i = m+1, \ldots, m+n$, atunci diferenţa $\sum z'_{s_i} - \sum z_{r_i}$ este de asemenea pozitivă şi deci ϕ satisface (b).

Acelaşi argument arată de asemenea că probabilitatea de respingere a testului $\leqslant \alpha$ cînd densitatea variabilei este dată de (89) cu $\Delta \leqslant 0$.

Cu excepţia valorilor mici ale volumului selecţiei N_i, o aplicaţie exactă a testului de permutare (96) este imposibilă deoarece volumul de calcul devine foarte mare. În cazul $c = 1$, de exemplu, determinarea marginii regiunii critice $C[T(z)]$ cere găsirea mulţimii de indici $(j_1, \ldots, j_n)$ care dă cea mai mare valoare k a expresiei $\sum_{i=1}^{n} z_{j_i}$, unde k este cel mai mare întreg care nu depăşeşte αC_N^n. Dacă $\alpha = 0{,}05$, $k = 12$ pentru $m = n = 5$ însă depăşeşte 9000 pentru $m = n = 10$. Multiplicînd ambii membrii ai inegalităţii

$$\Sigma y_j > C[T(z)]$$

prin $[(1/m) + (1/n)]$ şi scăzînd $(\Sigma x_i + \Sigma y_j)/m$, regiunea de respingere pentru $c = 1$ devine

$$\bar{y} - \bar{x} > C[T(z)] \text{ sau } W = (\bar{y} - \bar{z}) \Big/ \sqrt{\sum_{1}^{N} (z_i - \bar{z})^2} > C[T(z)],$$

deoarece numitorul lui W este constant pe $S(z)$ şi deci depinde numai de $T(z)$. Aceasta este echivalentă cu

$$\frac{(\bar{y} - \bar{x}) \Big/ \sqrt{\frac{1}{m} + \frac{1}{n}}}{\sqrt{[\Sigma(x_i - \bar{x})^2 + \Sigma(y_j - \bar{y})^2]/(m+n-2)}} > C[T(z)]. \tag{97}$$

Prin urmare regiunea de respingere are aceeaşi formă cu a testului t în care marginea regiunii critice C_0 din (XVI.17) a fost înlocuită printr-una aleatoare. Dacă ipoteza este adevărată, astfel că Z_i sînt independente şi identic repartizate şi dacă $M|Z|^3 < \infty$ şi m/n este mărginit de 0 şi ∞ cînd m şi n tind la ∞, diferenţa dintre marginea aleatoare $C[T(z)]$ a reginii critice şi C_0 tinde la zero în probabilitate. Prin urmare, testul de permutare devine echivalent cu testul t dat de (XVI.17) — (XVI. 19). Urmează că, pentru selecţii de volum mare, testul de permutare poate fi aproximat prin testul t.

§ 5. Teste neparametrice secvenţiale cu puterea unu

Pentru oricare două funcţii de repartiţie F, G fie

$$D^+(F,G) = \sup_{-\infty<t<\infty} (F(t) - G(t)),\ D(F,G) = \sup_t |F(t) - G(t)|.$$

Fie $0 < \alpha < 1$ şi un întreg pozitiv m dat şi fie g orice funcţie continuă, pozitivă nedescrescătoare definită pentru $x \geqslant m$ şi astfel încît

i) $g(x) \leqslant x$,

ii) $g(x)/x$ este strict descrescător către zero cînd $x \to \infty$,

iii) $g(x)$ este concavă

iv) $\sum_{n=m}^{\infty} \exp\{-g^2(n)/(n+1)\} \geqslant \alpha$.

Familia

$$g(x) = [(x+1) + (a\ln x + \ln b)]^{1/2} \quad a,b \geqslant 1 \tag{98}$$

în cazul în care, a, b şi m au valori mari (convenabil alese) furnizează funcţii ce satisfac condiţiile (i) — (iv)

De exemplu, dacă $x \geqslant 1$ satisface

$$\alpha \exp(x-1) \geqslant x+1,$$

putem lua $a = 2$, $b = 1/\alpha(x^* - 1)$, $m = x^*$, unde x^* reprezintă cel mai mic întreg $\geqslant x$. În particular pentru $\alpha = 0{,}05$ putem lua în (98) $a = 2$, $b = 4$, $m = 4$.

Fie $h(x)$ inversa funcţiei $g(x)/x$ (pentru $0 < x < g(m)/m$). Fie X_1, X_2, ... variabile aleatoare independente cu aceiaşi funcţie de repartiţie F şi Y_1, Y_2 ... variabile aleatoare independente avînd aceiaşi funcţie de repartiţie G, $\{X_i\}$ şi $\{Y_j\}$ fiind variabile aleatoare independente. Fie $F_n(t)[G_n(t)]$ funcţia de repartiţie empirică a unei selecţii de volum n asupra unei variabile aleatoare $X(Y)$ avînd funcţia de repartiţie $F[G]$.

a) Considerăm ipoteza $H_1 : F(t) \leqslant G(t)$ pentru toţi t $(-\infty < t < \infty)$

Teorema 8. (Darling şi Robbins (1968 b). *Fie N cel mai mic $n \geqslant m$ astfel încît*

$$D^+(F_n, G_n) \geqslant g(n)/n$$

şi respingem ipoteza H_1 dacă şi numai dacă $N < \infty$. Atunci

$$P(\text{resp } H_1 \mid H_1 \text{ adev}) \leqslant \alpha,\ P(\text{resp } H_1 \mid H_1 \text{ falsă}) = 1 \tag{99}$$

Scanned with OKEN Scanner

Dacă H_1 este falsă și $D^+(F, G) = d > 0$ cu $d \leqslant g(m)/m$, atunci

$$M(N) \leqslant h\{d - [m/h(d)]\}. \tag{100}$$

Demonstrație: Pentru întregii $0 \leqslant r \leqslant n$, definim

$$A(r, n) = (n!)^2/(n - r)!\,(n + r)!. \tag{101}$$

Dacă F, G sînt funcții de repartiții arbitrare astfel încît are loc H_1, atunci se poate arăta că

$$P(D^+(F_n, G_n) \geqslant r/n) \leqslant A(r, n). \tag{102}$$

Dacă $F \equiv G$ este continuă, Gnedenko și Korolyuk (1951) au arătat că în (102) avem semnul egal. Dacă reprezentăm $\{X_i\}$ și $\{Y_i\}$ ca funcții de variabile independente repartizate uniform pe $(0, 1)$, atunci (102) este adevărată pentru F și G arbitrare satisfăcînd H_1.

Arătăm că

$$A(r, n) \leqslant \exp\,[-r^2/(n + 1)]. \tag{103}$$

Din Whittaker și Watson (1947), avem

$$-\ln A(r, n) = \int_0^1 [x^n (1 - x^r)(1 - x^{-r})/(1 - x) \ln x]\, dx,$$

și luînd $x = e^{-t}$ și folosind inegalitățile

$$\mathrm{ch}y - 1 \geqslant y^2/2 \text{ și } \mathrm{sh}y/y \leqslant e^y,\ y \geqslant 0,$$

din

$$-\ln A(r, n) = \int_0^\infty \exp\left[-\left(n + \frac{1}{2}\right) t\right] \frac{\mathrm{ch}rt - 1}{\mathrm{sh}(t/2)} \frac{dt}{t} \geqslant$$

$$\geqslant r^2 \int_0^\infty \exp\left[-\left(n + \frac{1}{2}\right) t - (t/2)\right] dt = r^2/(n + 1),$$

obținem (103).

Deci, notînd prin x^* cel mai mic întreg $\geqslant x$, avem

$$P(N < \infty \mid H_1) \leqslant \sum_{n=m}^{\infty} P(D^+(F_n, G_n) \geqslant g(n)/n) \leqslant \sum_{n=m}^{\infty} A(g(n), n) \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{n=m}^{\infty} \exp[-g^2(n)/(n + 1)] \leqslant \alpha, \tag{104}$$

ceea ce demonstrează prima parte din (99). A doua parte din (99) urmează din faptul că dacă H_1 este falsă, atunci

$$D^+(F_n, G_n) \to D^+(F, G) = d > 0$$

Scanned with OKEN Scanner

pentru $n \to \infty$ cu probabilitatea unu, în timp ce prin ipoteză $g(n)/n \to 0$, astfel că

$$P(N < \infty \mid H_1 \text{ falsă}) = 1.$$

Pentru a demonstra (100) presupunem pentru simplitate că t este un număr astfel că

$$F(t) - G(t) = d.$$

Repartiţia lui

$$n(F_n(t) - G_n(t))$$

este a lui

$$S_n = U_1 + U_2 + \ldots + U_n,$$

unde $\{U_i\}$ sînt variabile aleatoare independente identic repartizate cu

$$M(U_i) = d \text{ şi } |U_i| \leqslant 1.$$

Fie N' cel mai mic $n \geqslant m$ astfel că $S_n \geqslant g(n)$; atunci $N < N'$ şi

$$S_{N'} \leqslant \max(m, g(N') + 1) \leqslant m + g(N').$$

Avem $M(N') < \infty$ şi din inegalitatea lui Jensen, obţinem

$$dM(N') \leqslant m + g(M(N')) \tag{105}$$

ceea ce dă o margine superioară implicită pentru $M(N')$ şi deci pentru $M(N)$. Pentru a obţine o margine explicită pentru $M(N')$ observăm că ecuaţia

$$dx = m + g(x) \qquad (x \geqslant m) \tag{106}$$

are o rădăcină unică x_0 şi

$$M(N) \leqslant M(N') \leqslant x_0.$$

Dacă punem $x_0 = h(y_0)$, (106) devine

$$y_0 = d - m/h(y_0) \tag{107}$$

şi iterînd (107) obţinem

$$y_0 = d - [m/h(d - m/h(y_0))]$$

astfel că

$$y_0 \geqslant d - m/h(d) \tag{108}$$

şi deci

$$M(N) \leqslant x_0 \leqslant h\{d - m/h(d)\}$$

ceea ce completează demonstraţia teoremei 8.

Scanned with OKEN Scanner

b) Considerăm ipoteza $H_2 : F(t) = G(t)$ pentru fiecare $t(-\infty < t < \infty)$

TEOREMA 9. (Darling și Robbins (1968b)). *Fie N cel mai mic $n \geqslant m$ astfel că*

$$D(F_n, G_n) \geqslant g(n)/n$$

și respingem H_2 dacă și numai dacă $N < \infty$. Atunci

$$P(\text{resp } H_2 \mid H_2 \text{ adev}) \leqslant 2\alpha, \quad P(\text{resp } H_2 \mid H_2 \text{ falsă}) = 1. \tag{109}$$

Dacă H_2 este falsă și $D(F, G) = d > 0$ cu

$$d \leqslant g(m)/m,$$

atunci are loc (100).

Demonstrația teoremei 9 urmează o cale asemănătoare cu aceea a teoremei 8.

Se extinde teorema 9 pentru verificarea ipotezei

$$H_2' : D(F, G) \leqslant c$$

pentru orice $0 \leqslant c < 1$ dat.

c) Fie F_0 orice funcție de repartiție specificată și $H_3 : F(t) \leqslant F_0(t)$ pentru fiecare $-\infty < t < \infty$.

TEOREMA 10. *Fie N cel mai mic $n \geqslant m$ astfel încît*

$$D^+(F_n, F_0) \geqslant g(n)/n$$

și respingem H_3 dacă și numai dacă $N < \infty$. Atunci

$$P(\text{resp } H_3 \mid H_3 \text{ adev}) \leqslant 2^{3/2}\alpha, \quad P(\text{resp } H_3 \mid H_3 \text{ falsă}) = 1. \tag{110}$$

Dacă H_3 este falsă și $D^+(F, F_0) = d > 0$ cu $d \leqslant g(m)/m$, atunci are loc (110).

Demonstrație. Avem

$$P_{H_3}(D^+(F_n, F_0) \geqslant r/n) \tag{111}$$

$$\leqslant B(r, n) \equiv \sum_{j=r}^{n} C_n^j \frac{r}{n-j+r} \frac{(j-r)^j \, (n-j+r)^{n-j}}{n^n}.$$

Smirnov (1944) și Birnbaum și Tingey (1951) au arătat că dacă $F \equiv F_0$ este continuă, atunci în (111) are loc egalitate.

Ținînd seama de metoda de demonstrație a teoremei 8, este suficient să arătăm că

$$B(r, n) \leqslant 2^{3/2} \, A(r, n).$$

Avem

$$A(r, n) = \sum_{j=r}^{n} \frac{r}{2(n-j)+r} [C_{2j-r}^j \, C_{2(n-j)+r}^{n-j} / C_{2n}^n] \tag{112}$$

Scanned with OKEN Scanner

Fie R_j raportul termenilor de ordin j din (111) și (112). Demonstrația este terminată dacă arătăm că $R_j \leqslant 2^{3/2}$. Cu

$$a = [2(n-j)+r]/(n-j+r) = 2 - r/(n-j+r) \leqslant 2,$$

$$b(x;i) = (1+x^{-1})(1+2x^{-1}) \ldots (1+ix^{-1}), \quad c = (2n)!n!n^n,$$

avem

$$R_j = ac/b(j-r,j)\, b(n-j+r,\ n-j).$$

Acum

$$\ln b(x:i) \geqslant \int_0^i \ln(1+y/x)\mathrm{d}y = (x+i)\ln(1+ix^{-1}) - i,$$

$$b(x;i) \geqslant (1+ix^{-1})^{x+i}\ \mathrm{e}^{-i},$$

$$b(j-r;j)\, b(n-j+r;n-j) \geqslant$$

$$\geqslant [1+j(j-r)^{-1}]^{2j-r}[(1+(n-j)/(n-j+r)]^{2(n-j)+r}\mathrm{e}^{-n}.$$

Dacă punem

$$\gamma = 2j - r, \qquad \delta = 2(n-j) + r,$$

și ținem seama de inegalitatea

$$1 + x \leqslant \mathrm{e}^x,$$

găsim

$$b(j-r,j)\, b(n-j+r,\ n-j) \geqslant (1-r/\gamma)^{-\gamma}(1+r/\delta)^{-\delta}2^{2n}\mathrm{e}^{-n} \geqslant 2^{2n}\mathrm{e}^{-n}.$$

Folosind inegalitățile lui Stirling pentru factoriale:

$$R_j \leqslant ac\, 2^{-2n}\mathrm{e}^n \leqslant 2(2n)!\mathrm{e}^n/n!n^n\ 2^{2n} < 2^{3/2}$$

Observație H_3 poate fi verificată și prin generarea unui șir de variabile aleatoare independente identic repartizate cu funcția de repartiție F_0 și prin aplicarea teoremei 8.

d) Fie $\mathcal{G}$ clasa funcțiilor de repartiție închise sub metrica D; de exemplu $\mathcal{G}$ poate consta într-o singură funcție de repartiție F_0 sau mulțimea repartițiilor $N(\mu, \sigma^2)$ $(-\infty < \mu < \infty, 0 < \sigma^2 < \infty)$. Considerăm ipoteza

$$H_4 : F \in \mathcal{G}.$$

Fie

$$W_n = \inf_{G \in \mathcal{G}} D(F_n, G).$$

TEOREMA 11. (Darling și Robbins (1968 b)). *Fie N cel mai mic $n \geqslant m$ astfel încît $W_n \geqslant g(n)/n$ și respingem H_4 dacă și numai dacă $N < \infty$. Atunci*

(113) $\quad P(\text{resp } H_4 | H_4 \text{ adev}) \leqslant 2^{5/2}\alpha$ *și* $P(\text{resp } H_4 | H_4 \text{ falsă}) = 1.$

Scanned with OKEN Scanner

Dacă H_4 este falsă și

$$\inf_{G\in\mathcal{G}} D(F,G) = d > 0 \text{ cu } d \leqslant g(m)/m,$$

atunci (100) *este adevărată.*

Demonstrație. Presupunem că H_4 este adevărată. Atunci

$$P_{H_4}(W_n \geqslant r/n) \leqslant P_{H_4}(D(F_n, F) \geqslant r/n) \leqslant 2B(r,n) \leqslant 2^{5/2} A(r,n)$$

și demonstrația primei părți a relației (113) urmează ca în teorema 8. Dacă H_4 este falsă și

$$\inf_{G\in\mathcal{G}} D(F,G) = d > 0,$$

atunci pentru orice G în $\mathcal{G}$,

$$D(F_n, G) \geqslant D(F,G) - D(F_n, F) \geqslant d - D(F_n, F)$$

astfel că, pentru $n \to \infty$,

$$W_n \geqslant d - D(F_n, F) \to d$$

cu probabilitatea 1 și deci $P(N < \infty \mid H_4 \text{ falsă}) = 1$. Ca mai înainte, urmează presupunerile privind $M(N)$.

Observație i) Pentru valori mari ale lui x, $g(x)$ descrie comportarea lui $M(N)$ pentru d mici. Mai precis din (107) și (108) cînd $d \to 0$, avem

$$1 \geqslant y_0/d \geqslant 1 - m/g(h(d)) \to 1$$

astfel ca pentru $d \to 0$

$$y_0 \sim d \text{ și } M(N) \leqslant x_0 = h(y_0) \sim h(d).$$

Dacă $x \to \infty$

$$g(x) = c([x \ln x]^{1/2},$$

$h(x) \sim (c/x^2) \ln(1/x)$ cînd $x \to 0$ și deci cînd $d \to 0$.

$$M(N) = 0(d^{-2} \ln (1/d)).$$

ii) Nu putem avea (cînd $n \to \infty$)

$$g(x) = 0\,[(x \ln x)^{1/2}].$$

Pentru a construi teste de puterea 1, în locul teoremei 9 Robbins (1970) folosește o extensie a inegalității lui Wald (1947). În scopul obținerii unor rezultate limită Robbins (1970) înlocuiește rătăcirea aleatoare printr-un proces Wiener.

Scanned with OKEN Scanner

§ 6. Testul secvențial al semnului

Presupunem că $X[Y]$ are funcția de repartiție $F(x)$ $[G(y)]$. Ne propunem să verificăm ipoteza

$$H_0 : F = G,$$

față de alternativa

$$H_1 : F(x) \leqslant G(x) \text{ pentru toți } x.$$

Observăm secvențial perechile de observații

$$(X_1, Y_1), (X_2, Y_2), \ldots$$

Presupunem că $p = P(X < Y)$ este constantă de la un pas la altul. Atunci ipotezele pot fi înlocuite prin

$$H_0' : p = \frac{1}{2}$$

față de

$$H_1' : p > \frac{1}{2}.$$

Testul secvențial al semnului a fost propus de Hall (1965). Se reduc datele la semnele diferențelor $X_i - Y_i$, Aceasta poate fi justificată prin faptul că transformările monotone g_n aplicate la fiecare pas n sînt invariante. Datele reduse formează un șir Bernoulli cu probabilitatea succesului (semnul plus) p. Pentru datele Bernoulli se poate aplica T.S.R.P., iar raportul de verosimilitate la pasul n este acela al unei variabile $Bi(n, p)$. Pentru date normale acest test a fost propus de Armitage (1947).

§ 7. T.S.R.P., de rang bazate pe alternative Lehmann (Cazul a două selecții)

Alternativele neparametrice cunoscute ca alternativele lui Lehmann (1953) sînt date în termeni de puteri ale funcțiilor de repartiție în ipoteza nulă. De exemplu în cazul a două selecții dacă

$$H_0 : F = G,$$

alternativa Lehmann este dată de

$$\text{i) } H_1 : G = F^{\Delta}$$

sau

$$\text{ii) } H_1 : G = 1 - (1 - F)^{\Delta} \ (\Delta > 0)$$

sau

$$\text{iii) } H_1 : G = h(F)$$

astfel ca

$$h(0) = 0, \ h(1) = 1.$$

Scanned with OKEN Scanner

Fie $X_1, X_2, \ldots X_{n_1}$ ($Y_1, Y_2, \ldots Y_{n_2}$) o selecție asupra funcției de repartiție $F(G)$, $\{X_i\}$ și $\{Y_j\}$ fiind variabile aleatoare independente, iar F și G continui. Fie $s_1 < s_2 < \ldots < s_{n_2}$ rangurile variabilelor $Y_1, Y_2, \ldots$ $\ldots Y_{n_2}$ în selecția combinată de volum $n = n_1 + n_2$. Atunci $S = (s_1, s_2, \ldots s_{n_2})$ poartă numele de *ordinea rangurilor*. În alternativele Lehmann (1953) se poate obține o expresie explicită pentru probabilitatea ordinii rangurilor. Folosind acest rezultat Wilcoxon, Rhodes și Bradley (1963) dezvoltă două teste secvențiale ale rangurilor grupate, teste numite *testul secvențial al configurației rangurilor* (S.C.R.) și *testul secvențial al sumei rangurilor*. Pentru aceste două teste, se iau selecții de volum m, respectiv n cu observațiile ordonate în interiorul fiecărui grup. Deciziile se dau la sfîrșitul fiecărui grup; accept H_0, accept H_1 în i) sau luăm alt grup de observații. Aceste metode secvențiale sînt aplicații directe ale T.S.R.P. al lui Wald (1947). Testul configurației rangurilor depinde de statistica raportului probabilităților bazată pe probabilitățile configurației particulare ale observațiilor obținute ordonate; testul sumei rangurilor folosește suma rangurilor în interiorul selecției asupra lui Y și raportul probabilităților bazat pe probabilitățile pentru sumele rangurilor. Aceste procedee sînt ineficiente dacă nu se folosesc rangurile. Totuși teoria generală a T.S.R.P. are loc și pot fi calculate marginile aproximative, aproximațiile pentru funcțiile C.O. și numărul mediu de observații. Bradley, Martin și Wilcoxon (1965) într-un studiu Monte Carlo al testului secvențial al sumei rangurilor ajung la concluzia că acesta obținut pe baza alternativelor Lehmann dă rezultate bune pentru populații normale care diferă numai în poziție. Bradley, Merchant și Wilcoxon (1966) dau o versiune modificată a testului configurației rangurilor (testul S.M.C.R.). Pe scurt testul S.M.C.R. constă în următoarele: Presupunem că observațiile asupra variabilei $X(Y)$ sînt luate în grupe de cîte $m(n)$ și că nu sînt prezente efecte de grup și de bloc. Atunci la pasul t al unui astfel de proces, se ordonează mt valori X și nt valori Y. Atunci raportul de verosimilități este raportul probabilităților rangurilor $s_j^{(t)}$, $j = 1, 2, \ldots, nt$ care constituie rangurile a nt Y în ordonarea comună la pasul t. Raportul de verosimilități la pasul t este dat de

$$\frac{\Delta^{nt}[(m+n)\,t]!}{(s_1^{(t)}-1)!} \prod_{j=1}^{nt} \frac{\Gamma(s_j^{(t)} + j\Delta - j)}{\Gamma(s_{j+1}^{(t)} + j\Delta - j)}. \tag{114}$$

În cele ce urmează prezentăm unele rezultate obținute de Savage și Sethuraman (1966).

Fie $(X_1, Y_1), (X_2, Y_2), \ldots$, vectori independenți, identic repartizați avînd funcția de repartiție $H(.,.)$ cu funcțiile de repartiție marginile F și G. Dorim să verificăm ipoteza:

H_0: X și Y sînt independente și $G = F$

față de alternativa

H_1: X, Y sînt independente și $G = F^{\Delta}$ unde

$\Delta > 0$, $\Delta \neq 1$ este o constantă cunoscută.

La pasul n al experimentării, informaţia disponibilă este constituită din rangurile variabilelor $Y_1, \ldots, Y_n$ printre $(X_1, \ldots, X_n, Y_1, \ldots, Y_n)$. Selecţia combinată va fi notată prin

$$W_1, W_2, \ldots, W_{2n}$$

şi statisticile de ordine corespunzătoare prin

$$W_{n,1}, \ldots, W_{n,2n}.$$

Fie $F_n(G_n)$ funcţia de repartiţie empirică a variabilelor $X_1, X_2, \ldots, \ldots, X_n(Y_1, Y_2, \ldots, Y_n)$. Fie

$$s_1 < s_2 < \ldots < s_n$$

rangurile lui $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ în selecţia combinată ordonată. Statistică $(s_1, s_2, \ldots, s_n)$ este echivalentă cu $\{G_n(W_{ni}), i = 1, 2, \ldots, 2n\}$ care la rîndul lui este echivalentă cu $\{F_n(W_{ni}), G_n(W_{ni}), i = 1, \ldots, 2n\}$. Fie $Z_i = 1(0)$ dacă $W_{n,i}$ este un $Y(X)$, $i = 1, 2, \ldots, 2n$ şi $Z = (Z_{1n}, \ldots, Z_{2n})$.

LEMA 2. (Savage, Sethuraman (1966)). *Cu notaţiile anterioare*

$$P_{H_1}(s_1, \ldots, s_n) = \Delta^n (n!)^2 / n^{2n} \prod_{i=1}^{2n} \{F_n(W_{ni}) + \Delta G_n(W_{ni})\}. \tag{115}$$

Observaţie. Dacă în (115) luăm $\Delta = 1$, obţinem

$$P_{H_0}(Z = z) = P_{H_0}(s_1, \ldots, s_n) = 1/C_{2n}^n$$

rezultat care se mai poate obţine ţinînd seama că fiecare Z este, sub H_0, egal probabil şi C_{2n}^n reprezintă numă ul rangurilor ordonate posibile. Fie

$$\Lambda_n(\Delta, F_n, G_n) = P_{H_1}(s_1, \ldots, s_n)/P_{H_0}(s_1, \ldots, s_n) =$$

$$= \Delta^n (2n)!/n^{2n} \prod_{i=1}^{2n} [F_n(W_{ni}) + \Delta G_n(W_{ni})] \tag{116}$$

Deoarece produsul din membrul drept la relaţiei (116) este simetric în W_{ni}, se poate înlocui $W_{n\,i}$ prin W_i. Atunci T.S.R.P. bazat pe ranguri pentru H_0 faţă de H_1 este dat de:

Se iau observaţii dacă $B < \Lambda_n(\Delta, F_n, G_n) < A$,

Se acceptă H_0 dacă $\Lambda_n \leqslant B$,

Se respinge H_0 dacă $\Lambda_n \geqslant A$, $n = 1, 2, \ldots$

Fie N variabila de stopare pentru T.S.R.P. de mai sus şi fie

$$nS_n = \ln \Lambda_n(\Delta, F, G_n). \tag{117}$$

Atunci din(115) avem

$$S_n = \ln 4\Delta - 2 - T_n + 0((\ln n)/n), \tag{118}$$

Scanned with OKEN Scanner

unde

$$T_n = n^{-1} \sum^{2n} \ln [F_n(W_i) + \Delta G_n(W_i)].$$

De asemenea fie

$$\Omega_1(n) = \sup_x |F_n(x) - F(x)|, \qquad \Omega_2(n) = \sup_x |G_n(x) - G(x)|$$

și

$$\Omega(n) = \Omega_1(n) + \Omega_2(n). \tag{119}$$

Din teorema 1 (Sethuraman (1964)), pentru fiecare $\delta > 0$, există $\rho_1(\delta) < 1$ astfel încît pentru n suficient de mare

$$P(\Omega_i(n) \geqslant \delta) \leqslant \rho_1^n(\delta), \; i = 1, 2, \ldots \tag{120}$$

Deci, pentru n mare

$$P(\Omega(n) \geqslant \delta) \leqslant P(\Omega_1(n) \geqslant \delta/(1 + \Delta)) + P(\Delta\Omega_2(n) \geqslant$$

$$\geqslant \Delta\delta/(1 + \Delta)) \leqslant 2\rho_1^n(\delta/(1 + \Delta)) \leqslant \rho_2^n \quad (\rho_2 < 1). \tag{121}$$

Fie $V_1, V_2, \ldots, V_n$ variabile aleatoare independente identic repartizate cu $M(V_1)$ și funcția generatoare de momente finite în vecinătatea lui 0. Atunci, din teorema 1 (Chernoff (1952)), pentru fiecare $\varepsilon > 0$ și n suficient de mare.

$$P\left(\left|n^{-1} \sum_1^n V_i - M(V_1)\right| \geqslant \varepsilon\right) \leqslant \rho_3^n(\varepsilon) \quad \rho_3 < 1. \tag{122}$$

În (122) luăm $V_i = \ln(1 + (\delta/U_i))$, unde U_i este repartizată uniform pe [0, 1]. Funcția generatoare de momente a variabilei V_1 este finită pentru $\delta > 0$ și $t < 1$ și $M(V_1) \to 0$ cînd $\delta \to 0$. Astfel, din (122), dat $\varepsilon > 0$, putem găsi δ_0 astfel încît pentru n suficient de mare

$$P\left[n^{-1} \sum_1^n \ln(1 + (\delta_0/U_i)) \geqslant \varepsilon\right] < \rho_4^n(\rho_4 < 1). \tag{123}$$

Analog definim

$$T(\Delta, F, G) = \int \ln [F(x) + \Delta G(x)] \, [dF(x) + dG(x)] \tag{124}$$

și

$$S(\Delta, F, G) = \ln 4\Delta - 2 - T(\Delta, F, G). \tag{125}$$

Scanned with OKEN Scanner

LEMA 3. (Savage, Sethuraman (1966), (1967)). *Dat* $\varepsilon > 0$ *există* $\rho < 1$ *astfel încît, pentru* n *suficient de mare*

$$P(|T_n - T(\Delta, F, G)| \geqslant 3\varepsilon) < \rho^n. \tag{126}$$

LEMA 4. (Savage, Sethuraman (1966)). *Dat* $\varepsilon > 0$, *putem găsi un* $\rho < 1$ *astfel încît pentru* n *suficient de mare*

$$P\{|S_n - S(\Delta, F, G)| \geqslant 3\varepsilon\} \leqslant \rho^n. \tag{127}$$

TEOREMA 12. (Savage, Sethuraman (1966)). *Cu notaţiile anterioare fie* $S(\Delta, F, G) \neq 0$. *Atunci pentru* T.S.R.P., *bazat pe* $\Lambda_n(\Delta, F_n, G_n)$,
1) $P(N > n) < \rho^n$ *pentru* n *suficient de mare şi* $\rho < 1$
11) $P(N < \infty) = 1$
111) $M[\exp(tN)] < \infty$ *pentru* t *într-un interval* $(-\infty, \theta)$, $\theta > 0$.
Demonstraţie. Avem

$$P(N > n) \leqslant P\{B < \Lambda_n < A\}.$$

În continuare, dacă $S(\Delta, F, G) \neq 0$, din lema 4 pentru n suficient de mare, avem:

$$P(B < \Lambda_n < A) = P\{(\ln B)/n < S_n < (\ln A)/n\} \leqslant$$

$$\leqslant P\{|S_n - S(\Delta, F, G)| > \varepsilon\} < \rho^n, \quad (0 < \rho < 1)$$

ceea ce demonstrează 1). 11) şi 111) rezultă din 1)

LEMA 5.

1) $S(1, F, G) = 0$

11) $S(\Delta, F, h(F))$ *este independentă de* F

111) $S(\Delta, F, G) = S(1/\Delta, G, F)$

IV) $S(\Delta, F, F) < 0$ *pentru* $\Delta \neq 1$

V) $S(\Delta, F, F^\Delta) > 0$ *pentru* $\Delta \neq 1$

VI) $S(\Delta, F, F^\eta)$ *este strict crescătoare în* η *pentru* $\Delta > 1$.

VII) *Pentru fiecare* Δ, *există* $\eta(\Delta)$ *unic, variind între* 1 *şi* Δ, *satisfăcînd ecuaţia*

$$S(\Delta, F, F^\eta) = 0. \tag{128}$$

În continuare $\eta(\Delta) = 1/\eta(1/\Delta)$.

Savage şi Sethuraman (1966) au tabelat perechile de valori ale lui Δ şi η care satisfac (128). Dacă alternativa adevărată este de tip Lehmann cu exponentul η, atunci testul secvenţial al raportului probabilităţilor rangurilor ordonate (T.S.R.P.R.O.) nu se termină sigur.

Observaţie. Cu toate că teorema 12 stabileşte, în condiţii foarte generale incluzînd H_0 şi H_1, terminarea sigură a T.S.R.P.R.O., restricţia $S(\Delta, F, G) \neq 0$ nu pare a fi necesară pentru terminarea finită. Teorema

Scanned with OKEN Scanner

12 include posibilitatea ca perechea de variabile aleatoare X_i şi Y_i să fie formată din variabile independente. H_0 apare adeseori în lucrările de statistică neparametrică, iar H_1 este o ipoteză specială. Cazul general $H_1' : F \neq G$ nu poate fi abordat prin metoda folosită de Savage şi Sethuraman (1966). Metodele acestei lucrări se aplică la situaţii în care intervin selecţii deosebite, de exemplu selecţii care la fiecare pas au volume diferite sau în care din ficcare populaţie se iau mai multe observaţii (în loc de una) la fiecare pas (Bradley, Merchant, Wilcoxon (1966)). S-a cerut continuitatea funcţiilor F şi G pentru ca rangurile să fie unice şi pentru a se calcula o expresie explicită pentru probabilitatea rangurilor. Nu se cere pentru restul rezultatelor, în special pentru teorema 12, ca F şi G să fie continui.

Sethuraman (1970), extinzînd rezultatul lui Stein (1946), privind terminarea sigură a T.S.R.P. al lui Wald, ia în considerare anumite dependenţe, examinează T.S.R.P. rangurilor ordonate bazat pe Λ_n şi demonstrează că acest test se termină după un număr finit de observaţii cu probabilitatea unu şi că timpul de stopare are o funcţie generatoare de momente finite.

TEOREMA 13. (Sethuraman (1970)). *Fie*

$$I(x, z) = \begin{cases} 1, & x \leqslant z \\ 0, & x > z, \end{cases}$$

$$W(z) = F(z) + \Delta G(z)\,;\; W(x, y, z) = I(x : z) + \Delta I(y : z),$$

şi

$$V(X, Y) = -\ln [W(X)W(Y)] + \ln 4\Delta - 2 +$$

(129)

$$+ \int \frac{W(z) - W(X, Y : z)}{W(z)}\, \mathrm{d}(F(z) + G(z)).$$

Dacă $P(V(X, Y) < 0) > 0$, *atunci* T.S.R.P. *rangurilor ordonate bazat pe alternative Lehmann se termină după un număr finit de paşi şi are funcţia generatoare de momente finită.*

Observaţie. Condiţia Savage, Sethuraman (1966) $S(\Delta, F, G) \neq 0$ poate fi stabilită ca

(130) $$M[-\ln W(X)\, W(Y) + \ln 4\Delta - 2] \neq 0$$

Acum

$$M\left[\int \{W(z) - W(X, Y; z))/W(z)\}\, (\mathrm{d}F(z) + \mathrm{d}G(z))\right] = 0$$

Deci condiţia (130) este echivalentă cu

$$M[V(X, Y))] \neq 0.$$

Astfel, cazul care nu este acoperit de teorema 12 este cînd $M[V(X,Y)] = 0$. Comparînd acest caz neacoperit cu condiţia teoremei 13 avem

TEOREMA 14. *Dacă* $P(V(X, Y) = 0) \neq 1$, *atunci* T.S.R.P., *rangurilor ordonate bazat pe alternative Lehmann se termină după un număr finit de observaţii şi are funcţia generatoare de momente finită.*

Sethuraman (1970) obţine că pentru toate repartiţiile comune $H(x, y)$, $P(V(X, Y) = 0) < 1$ astfel că condiţia teoremei 14 nu este necesară. Ca un caz particular se obţine

LEMA 6. ((Sethuraman (1970)). *Dacă* X *şi* Y *sînt independente, atunci* $P(V(X, Y) = 0) < 1$.

Govindarajulu (1975) a considerat normalitatea asimptotică a T.S.R.P. rangurilor ordonate care se termină după un număr finit de observaţii în condiţii mai generale. În cele ce urmează vom prezenta aceste rezultate. Înainte de a considera normalitatea asimptotică a statisticii $S_n = n^{-1} \ln \Lambda_n$ facem observaţia

Observaţie. Dacă $F(G)$ are un număr finit sau numărabil de salturi, atunci $F(G)$ poate fi făcută continuă prin procesul de continuizare descris de Govindarajulu, Lecam, Raghavachari (1967). De asemenea, rangurile ordonate, cu probabilitatea unu, sînt bine definite cu condiţia ca F şi G să nu aibe discontinuităţi comune. Totuşi, $\Lambda_n(\Delta, F_n, G_n)$ este bine definită dacă X şi Y au valori egale. În consecinţă teoremele 12 şi 13 şi deci şi 14 sînt adevărate pentru F şi G arbitrare.

Considerăm clasa de statistici în care $S_n = n^{-1} \ln \Lambda_n(\Delta, F_n, G_n)$ este un caz special şi studiem repartiţia sa asimptotică, cînd clasa statisticilor este standardizată convenabil.

Fie

$$H(x) = (1 + \Delta)^{-1} F(x) + \Delta(1 + \Delta)^{-1} G(x) \tag{131}$$

şi

$$H_n(x) = (1 + \Delta)^{-1} F_n(x) + \Delta(1 + \Delta)^{-1} G_n(x). \tag{132}$$

Definim clasa statisticii T_n prin

$$T_n = n^{1/2} \left[\int J_n(H_n)(x)) \, dF_n(x) - \int J(H) \, dF \right], \tag{133}$$

unde $J_n(u)$ converge către $J(u)$ în măsură Lebesque şi
$J(u)$ este absolut continuă în u.

Observaţie. T_n diferă uşor de clasa statisticilor Chernoff-Savage deoarece H_n este o mixtură de F_n şi G_n şi nu funcţia de repartiţie empirică în selecţia combinată, adică

$$H_n \neq (n/2n) F_n + (n/2n) G_n.$$

Fie $f\{g\} \geqslant 1$ în formă de U şi integrabilă Lebesque (de părtat integrabilă).

Vom spune că $J \in \mathcal{S}$ dacă J este absolut continuă cu

$$|J'| \leqslant fg \text{ ori de cîte ori există.}$$

Atunci avem următoarea teoremă

Scanned with OKEN Scanner

TEOREMA 15. (Govindarajulu (1975)). *Dacă X şi Y sînt independente*

$$\lim_{n\to\infty} \sup_x |P(T_n/\sigma_n \leqslant z)) - \Phi(z)| = 0 \tag{134}$$

pentru fiecare $J \in \mathcal{S}$ şi pentru toate funcţiile F şi G cu condiţia ca $\sigma_n \neq 0$, unde

$$\sigma_n^2 = 2\Delta^2(1+\Delta)^{-2}\left\{\iint_{x<y} G(x)[1-G(y)]J'(H(x))J'(H(y)\mathrm{d}F(x)\mathrm{d}F(y) + \right.$$

$$\left. + \iint_{x<y} F(x)[1-[F(y)]J'(H(x))J'(H(y))\,\mathrm{d}G(x)\,\mathrm{d}G(y)\right\}. \tag{135}$$

F şi G pot să depindă de n; deci σ are indicele n. Presupunem că J nu este constantă.

COROLARUL 5. *Fie $\{J_k\}$ un şir astfel încît $J_k \in \mathcal{S}$ şi $J_k' \to J$ în măsură Lebesque. Fie $\{F_k, G_k\}$ un şir de perechi ce converg la perechea (F, G) în toate punctele de continuitate ale ultimei perechi. Atunci dacă $F = G$, $\sigma_n^2[F_k, G_k, J_k]$ converge uniform în n la*

$$2\Delta^2(1+\Delta)^{-2}\left\{\int_0^1 J^2(u)\mathrm{d}u - \left[\int_0^1 J(u)\,\mathrm{d}u\right]^2\right\}.$$

Ca un caz particular al teoremei 15 deducem normalitatea asimptotică a statisticii

$$S_n = \ln 4\Delta - 2 - n^{-1/2}\sum_1^{2n} \ln\{F_n(W_i) + \Delta G_n(W_i)\} + 0(n^{-1/2}).$$

Fie

$$W = F + \Delta G,\quad W_n = F_n + \Delta G_n.$$

Scriind $G_n = (W_n - F_n)/\Delta$ şi simplificînd obţinem:

$$S_n - S(\Delta,F,G) = (\Delta^{-1}-1)\left[\int[\ln W_n)\,\mathrm{d}F_n(x) - \int(\ln W)\,\mathrm{d}F(x)\right] -$$

$$-\Delta^{-1}\left[\int(\ln W_n)\,\mathrm{d}W_n - \int(\ln W)\,\mathrm{d}W\right] + 0(n^{-1/2}) =$$

$$= (\Delta^{-1}-1)\left[\int(\ln H_n)\,\mathrm{d}F_n(x) - \int(\ln H)\,\mathrm{d}F(x)\right] + 0(n^{-1/2}).$$

Atunci, avem

$$\lim_{n\to\infty}\sup_z |P\{n^{1/2}(S_n - S(\Delta, F, G))/\sigma_n^* \leqslant z) - \Phi(z)| = 0 \tag{136}$$

Scanned with OKEN Scanner

cu condiția ca $\sigma_n^* \neq 0$, unde

$$\sigma_n^{*2} = 2(1-A)^2\Big[\iint\limits_{x<y} \{G(x)(1-G(y))/W(x)W(y)\}\,\mathrm{d}F(x)\,\mathrm{d}F(y) + \tag{137}$$

$$+ \iint\limits_{x<y} \{F(x)(1-F(y))/W(x)W(y)\}\,\mathrm{d}G(x)\mathrm{d}G(y)\Big].$$

Observații i) Deoarece normalitatea asimptotică a statisticii S_n are loc chiar dacă $S(\Delta, F, G) = 0$, din ecuația (136) urmează că testul secvențial bazat pe S_n se termină cu probabilitatea unu chiar dacă $S(\Delta, F, G) = 0$. Totuși normalitatea asimptotică nu asigură că funcția generatoare de momente a variabilei de stopare N este finită. Avem

$$\sigma_n^*(F, F) = 2(1-\Delta)^2(1+\Delta)^{-2}\left\{\int_0^1 (\ln u)^2\,\mathrm{d}u - \left[\int_0^1 (\ln u)\mathrm{d}u\right]\right\} =$$

$$= 2(1-\Delta)^2(1+\Delta)^{-2}.$$

ii) Independent Sethuraman (1970) consideră normalitatea asimptotică a statisticii S_n și afirmă că este adevărată chiar dacă X și Y sînt dependente, σ_n fiind modificată considerînd covarianța dintre X și Y.

Are loc de asemenea următorul rezultat care implică că testul se termină după un număr finit de pași.

TEOREMA 16. (Govindarajulu (1975)). *Fie* $\{k\}$ *un șir de reguli de stopare și* $\{N_k\}$ *cu*

$$N_1 \leqslant N_2 \leqslant \ldots$$

șirul de variabile de stopare asociat cu $\{k\}$. *De asemenea, presupunem că există un șir nestaționar de numere pozitive* $\{n_k\}$, $n_1 \leqslant n_2 \leqslant \ldots$, $n_k \to \infty$ *cînd* $k \to \infty$ *și* $N_k/n_k \to 1$ *în probabilitate cînd* $k \to \infty$. *Definim*

$$T_k = n_k^{1/2}\left[\int J_{n_k}(H_{N_k})\,\mathrm{d}F_{N_k} - \int J(H)\,\mathrm{d}F\right]. \tag{138}$$

Atunci

$$\limsup_{k\to\infty}\ \sup_z\ |P\{T_k/\sigma_k \leqslant z\} - \Phi(z)| = 0.$$

pentru toate funcțiile F *și* G *și toate* $J \in \mathcal{S}$ *unde* $J_{n_k}(u) \to J(u)$ *pentru* $0 < u < 1$ *și* σ_k^2 *dat de* (135).

Demonstrația rezultă din teorema 15 și dintr-un rezultat al lui Anscombe (1952).

Scanned with OKEN Scanner

COROLARUL 6. *Dacă X și Y sînt independente și șirurile $\{k\}$, $\{n_k\}$ și $\{N_k\}$ sînt cele din teorema 16, atunci*

$$\lim_{k\to\infty} \sup_{z} |P\{n_k^{1/2}(S_k - S(\Delta, S, F, G))/\sigma_k \leqslant z\} - \Phi(z)| = 0 \tag{139}$$

unde σ_k^2 este dată de (135).

Exemplul 20 (În T.S.R.P. obișnuit fie $\mu = M(Z) = M[\ln f(x; \theta_1)/f(X; \theta_0)] > 0$ și $\{B_k, A_k)\}$ șirul de margini folosit. Atunci, din legea tare a numerelor mari, urmează că N_k converge cu probabilitatea 1 către

$$\begin{cases} (\ln A_k)/\mu, & \mu > 0, \\ (\ln B_k)\mu, & \mu < 0. \end{cases}$$

Berk și Savage (1968) au considerat problema secvențială a celor două selecții verificînd ipoteza

$$H_0 : G = F$$

față de alternativa

$$H_1 : F = \psi_1(K),\ G = \psi_2(K)$$

unde ψ_1 și ψ_2 sînt funcții de repartiție pe $[0, 1]$.

În fiecare dintre aceste ipoteze, repartiția rangurilor depinde numai de ψ corespunzător; deci se poate calcula Λ_n raportul de verosimilități pentru rangurile în cele două ipoteze. Se continuă selecția atîta timp cît Λ_n variază în intervalul (B, A), $0 < B < 1 < A < \infty$. Deoarece o transformare monoton crescătoare de date lasă rangurile Z invariante, putem presupune că toate observațiile sînt pe intervalul unitate. În particular, fie $H = (F + G)/2$ o funcție de repartiție uniformă. Justificarea acestei presupuneri a fost dată de Govindarajulu, Lecam, Raghavachari (1967) după cum urmează:

„Dacă funcția rămîne constantă pe anumite intervale, nici o observație nu va apărea în aceste intervale. Astfel aceste intervale pot fi înlăturate de pe dreaptă fără a afecta ordinea observațiilor. Aceasta conduce la o funcție de repartiție strict crescătoare care, printr-o transformare continuă crescătoare conduce la funcția de repartiție $H(x) = x$ a unei variabile uniforme. În acest caz măsura dF indusă de F posedă o densitate f în raport cu măsura Lebesque dH pe $[0,1]$. Atunci, fie f și g densitățile funcțiilor F și respectiv G. Definim clasa Ψ la care ψ aparține.

DEFINIȚIA 3. (Berk și Savage (1968)). Alternativa ψ este în Ψ dacă reprezentările f și g (pe $[0, 1]$) pot fi alese să satisfacă

i) f este cu variație mărginită

ii) Pentru δ suficient de mic

$$\{t : 0 < f(t) < \delta\}$$

este un interval (posibil vid) și

$$\{t : f(t) = 0\}$$

Scanned with OKEN Scanner

este o reuniune finită (posibil vidă) de intervale

iii) Există γ_j, $0 < \gamma_j < 1$ astfel încît

$$\lim_{\delta \to 0} \sup [\lambda[t : 0 < f < \gamma_j \delta]/\lambda\{t : 0 < f < \delta\}] = 1 - 2\alpha_j < 1,$$

unde λ reprezintă măsura Lebesque

În iii), dacă numărătorul se anulează, expresia o luăm zero. Condiţia iii) cere ca densităţile reprezentative să nu descrească rapid către zero. O condiţie folosită care implică iii) este

iii') există $\eta > 0$ astfel că în vecinătatea lui zero

$$\lambda\{t : 0 < f < \delta\}/\delta^{\eta}$$

este nedescrescătoare în δ[în iii'), iii) are loc pentru fiecare $0 < \gamma < 1$]. Condiţia iii') este esenţial o condiţie asupra raportului de verosimilităţi f/g şi poate fi stabilită pentru reprezentative arbitrare.

În presupunerea că $H = (F + G)/2$ este uniformă pe [0, 1], fie $U = FH^{-1}$ şi $V = GH^{-1}$ care au derivatele f şi respectiv g mărginite. Similar dacă F^* şi G^* sînt funcţiile de repartiţie ale variabilelor X şi Y, atunci se poate presupune că $H^* = (F^* + G^*)/2$ este uniformă pe [0,1] şi definim $U^* = F^*H^{*-1}$ şi $V = G^*H^{*-1}$. Presupunem că f şi g au histograme constante pe M intervalele definite de $0 = a_0 < a_1 < \ldots < a_M = 1$. Atunci expresia pentru Λ_n este

$$\Lambda_n(z) = (2n)! \int_{0<x_1<\ldots<x_{2n}<1} \prod_{1}^{2n} [f(x_i)]^{1-z_i} [g(x_i)]^{z_i} dx_i =$$

(140)

$$= \sum_{(k_1,\ldots,k_M)} (2n)! \prod_{1}^{M} f_j^{m_j} g_j^{m_j} / k_j!,$$

unde : f_j(respectiv, g_j) este aria de sub f (respectiv, g) pe (a_j, a_{j+1}) şi $n_j = k_j - m_j$ este suma a k_j z (în bucata j a lui z), atunci cînd este partiţionat în M bucăţi de lungime $k_1, k_2, \ldots,$ respectiv k_M.

Deoarece $\Sigma k_j = 2n$

(141)
$$\Lambda_n(z) = \sum_{(k_1,\ldots,k_M)}^{2n} \exp\left(\sum_{1}^{M} m_j \ln f_j + n_j \ln g_j \right).$$

Fie $V_n(t) = n^{-1} \sum_{1}^{[2nt]} Z_j$; $0 \leqslant t \leqslant 1$ şi $[x]$ cel mai mare întreg $\leqslant x$. Cu alte cuvinte, $V_n(t)$ este propoziţia elementelor din selecţia asupra lui Y care cad înainte de cuantila de ordin t în selecţia combinată. $U_n(t)$ este definită analog. Astfel,

$$U_n(t) + V_n(t) = [2nt]/n.$$

Scanned with OKEN Scanner

Fie

$$P_0 = 0,$$
$$P_j = (k_1 + \ldots + k_j)/2n,$$

şi

$$n_j/n = V_n(P_j) - V_n(P_{j+1}) = \Delta V_n(P_j).$$

Atunci

$$n^{-1} \ln \Lambda_n(z) \sim \max_{(k_1,\ldots,k_M)} \{n^{-1} C_{2n}^{k_1,\ldots,k_M} + \tag{142}$$
$$+ \sum_1^M [(\ln f_j)\, \Delta U_n(P_j) + (\ln g_j) \Delta V_n(P_j)]\} = I_n^1.$$

Fie

$$p_j = P_j - P_{j-1}$$

şi

$$i(p, U^*) = \Sigma[(\ln f_j)\Delta U^*(P_j) + (\ln g_j)\Delta V^*(P_j) - 2p_j \ln p_j], \tag{143}$$

$$i(U^*) = I^* = \sup \{i(P, U^*) : 0 \leqslant P_1 \leqslant \ldots \leqslant P_M = 1\}, \tag{144}$$

unde U^* este repartiţia transformată adevărată a lui X. Cu aceasta are loc

TEOREMA 17. (Berk şi Savage (1968)). *Presupunem că* (X_1, Y_1), (X_2, Y_2), *sînt vectori independenţi şi identic repartizaţi cu*

$$P(X = Y) = 0$$

şi avînd repartiţia marginală a lui $X(Y)$ *dată de* $F^*(G^*)$. *Atunci dacă* ψ *aparţine la o anumită clasă* ψ(definiţia 3), *există un număr real* I^* (*definit cu* (143)) *şi pentru toţi* $\delta > 0$, *există un* $\rho < 1$ *astfel încît pentru n suficient de mare,*

$$P^*(|n^{-1} \ln \Lambda_n(Z) - I^*| > \delta) < \rho^n,$$

unde P^* *reprezintă probabilitatea sub* (F^*, G^*).

Observaţie. Convergenţa statisticii $n^{-1}\Lambda_n(Z)$ către I^* asigură că funcţia generatoare de momente a timpului de stopare definit de T.S.R.P., bazat pe Λ_n este finită.

Dacă $\psi : G = F^\Delta$, I^* coincide cu $S(\Delta, F^*, G^*)$ obţinut de Savage şi Sethuraman.

Dacă I_i^* reprezintă valoarea limită a lui $n^{-1} \ln \Lambda_n(Z)$, sub $H_i (i = 0, 1)$, atunci $-\infty < I_0^* < 0 < I_1^*$ şi condiţiile teoremei 13 sînt satisfăcute de acest T.S.R.P.

§ 8. T.S.R.P. rangurilor pentru simetrie

Fie $V_1, V_2, \ldots$ variabile elementare independente şi identic repartizate, observate secvenţial şi avînd funcţia de repartiţia F continuă. Dorim să verificăm ipoteza

$$H_0 : F(v) + F(-v) = 1 \text{ pentru toţi } v, \tag{145}$$

Scanned with OKEN Scanner

sau cu alte cuvinte că F este simetrică faţă de zero.

Fie

$$H(v) = P(V \leqslant v \mid V > 0) = [F(v) - F(0)]/[1 - F(0)]$$

şi

$$G(v) = P(\mid V \mid \leqslant v \mid V < 0) = [F(0) - F(-v)]/F(0)$$

pentru $v \geqslant 0$, şi

$$H(v),\ G(v) = 0 \text{ pentru } v < 0.$$

Astfel

$$F(v) = \begin{cases} F(0)\ [1 - G(-v)], & v < 0 \\ H(v) + F(0)[1 - H(v)], & v \geqslant 0 \end{cases}$$

şi (145) se poate scrie

$$H_0 : H(v) = G(v) \text{ pentru toţi } v \text{ şi } F(0) = \frac{1}{2}$$

şi luăm

$$H_a : H(v) \neq G(v) \text{ pentru anumiţi } v.$$

Totuşi, sub H_a nu se pot obţine explicit probabilităţile rangurilor dorite. Presupunînd că

$H_a : H(v) = 1 - [1 - G(v)]^{\Delta}$, $v \geqslant 0$ cu $F(0) = \Delta/(1 + \Delta)$ la fiecare pas luînd selecţii în grupuri de volum fixat şi ordonînd valorile absolute ale observaţiilor în interiorul fiecărui grup la fiecare pas, Weed şi Bradley (1971) au propus două procedee secvenţiale, unul bazat pe configuraţia semnelor rangurilor în interiorul grupului şi altul bazat pe suma semnelor pozitive ale rangurilor în interiorul grupului.

Pentru a cerceta care model este mai corespunzător Weed şi Bradley (1971) intreprind un studiu Monte-Carlo. Alegerea lui $F(0)$ este făcută din dorinţa ca $f(v)$ să nu aibă discontinuitate în origine.

Parent (1965) defineşte rangul secvenţial şi rangul secvenţial al semnului.

Definiţia 4. Rangul secvenţial al lui V_n relativ la $V_1, V_2, \ldots, V_n$ este k dacă V_n este statistica de ordine de rang k în mulţimea $(V_1, V_2, \ldots, V_n)$.

Sînt $n!$ vectori ai rangului secvenţial

De exemplu, rangul secvenţial al lui V_1 este 1; rangul secvenţial al lui V_2 este 1 sau 2 etc. Atunci cînd $V_1, V_2, \ldots, V_n$ sînt variabile aleatoare independente identic repartizate, rangurile secvenţiale sînt independente cu repartiţia.

$$(146) \qquad P(Z_i = k) = 1/i,\ k = 1, 2, \ldots, i;\ i = 1, 2, \ldots, n$$

unde Z_i reprezintă rangul secvenţial al lui $V_i (i = 1, 2, \ldots, n)$.

Scanned with OKEN Scanner

DEFINIȚIA 5. (Parent (1965)). Rangul semnului secvențial al lui V_n relativ la $V_1, V_2, \ldots, V_n$ este produsul dintre rangul secvențial al lui $|V_n|$ relativ la $|V_1|, \ldots, |V_n|$ și semnul lui V_n.

La o selecție de volum n sînt posibili $2^2 n!$ vectori ai rangului semnului secvențial.

Parent (1965) arată că $|V|$ și semnul lui V sînt independente dacă și numai dacă

$$F(-v) = F(0)[1 - F(v) + F(-v)] \text{ pentru toți } v \geqslant 0 \tag{147}$$

Adică, $P(|V| \leqslant v \mid V > 0) = P(|V| \leqslant v \mid V < 0)$. Astfel, dacă $V_1, V_2, \ldots, V_n$ sînt independente și identic repartizate avînd funcția de repartiție F și cînd are loc (147), atunci rangurile semnului secvențial sînt independente. Condiția (147) este satisfăcută pentru variabilele aleatoare pozitive, negative și simetrice față de zero. Această condiție este satisfăcută de o clasă mare de repartiții. Dacă considerăm toate mulțimile măsurabile $E \subset [0, \infty]$ și definim $-E = \{x : -x \in E\}$, atunci condiția

$$P(V \in E) = kP(V \in -E), k \geqslant 0 \text{ pentru toate } E \tag{148}$$

asigură (147). Parent (1965) aplică rangul semnului secvențial la problema controlului. În acest scop folosește statistica

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} Y_i/i,$$

unde Y_i sînt rangurile semnelor secvențiale. De asemenea calculează $M(N)$ și tabelează valorile lui $M(N)$, σ_N cînd $V_i \sim N(\mu, 1)$.

Govindarajulu consideră alternativa

Modelul II

$$H_{a\,II} : H(v) = G^{\Delta}(v) \text{ pentru toți } v,\ \Delta > 0,\ \Delta \neq 1.$$

$$\Delta \text{ este specificat, } F(0) = \lambda_0,\ \lambda_0 \text{ specificat} \tag{149}$$

Weed (1968) a considerat alternativa

Modelul I

$$H_{a\,I} : H(v) = 1 - [1 - G(v)]^{\Delta} \text{ pentru toți } v,\ \Delta > 0,\ \Delta \neq 1.$$

$$\Delta \text{ specificat, } F(0) = \Delta/(1 + \Delta). \tag{150}$$

Observație. Dacă $X = -V$, $V < 0$ și dacă $Y = V$, $V \geqslant 0$, și dacă X și Y au funcțiile de repartiție condiționate G și respectiv H ce satisfac (149), atunci funcțiile de repartiție condiționate ale lui $-X$ și $-Y$, cu condiția ca $\lambda_0 = \Delta/(1 + \Delta)$, vor satisface (150).

În cele ce urmează prezentăm modelul II.

Fie $X_1, \ldots, X_m$ valorile absolute ale acelor V care sînt negativi și $Y_1, \ldots, Y_n$, V care sînt nenegativi ($m + n = t$).

Scanned with OKEN Scanner

Se observă $m \sim Bi(t,\ \lambda = F(0)),\ 0 < \lambda < 1$. Notăm prin $W_1, \ldots$ $\ldots, W_t$ selecţia combinată (de X şi Y-ci), iar prin

$$W_{t1},\ W_{t2},\ \ldots,\ W_{tt}$$

statisticile de ordine. Fie $G_m(H_n)$ funcţia de repartiţie empirică a variabilelor $X_1, \ldots, X_m (Y_1, \ldots, Y_n)$. Urmînd Savage (1959) fie

$$Z = (Z_1, \ldots, Z_t)$$

unde

$$Z_i = \begin{cases} 1, & W_{ti} \text{ corespunde la un } V \text{ negativ} \\ 0, & W_{ti} \text{ corespunde la un } V \text{ nenegativ} \end{cases}$$

De asemenea fie

$$(151)\quad \Lambda_t(\Delta,\ Z) = P_t(Z = z) \mid \Delta)/P_t(Z = z \mid \Delta = 1) = 2^t P_t(Z = z \mid \Delta)$$

unde z reprezintă o valoare specificată pentru rang. T.S.R.P. pentru verificarea ipotezei, H_0 faţă de $H_{a\mathrm{I}}$ sau $H_{a\mathrm{II}}$ este dat de:

accept H_0 dacă $\Lambda_t \leqslant B$

$$; \ t = 1,\ 2,\ \ldots$$

resping H_0 dacă $\Lambda_t \geqslant A$

continuăm dacă $B < \Lambda_t < A$,

unde $0 < B < 1 < A$ sînt constante (independente de t) convenabile. Fie T variabila de stopare pentru aceste T.R.S.P.

Lema 7. (Weed, Bradley, Gavindarajulu (1974)). *Avem*

$$(152)\quad \Lambda_t(\Delta,\ Z) = \begin{cases} 2^t t\,!\,\lambda_0^m(1-\lambda_0)^m \Delta^n \prod_{i=1}^{t} \{mG_m(W_i) + \\ \quad + \Delta n H_n(W_i)\}^{-1} \text{ pentru modelul II} \\ 2^t t\,!\,\{\Delta/(1+\Delta)\}^t \prod_{i=1}^{t} [m\{1 - G_m(W_i)\} + \\ \quad + \Delta n\{1 - H_n(W_i)\}^{-1} \text{ pentru modelul I} \end{cases}$$

Teorema 18. (Weed, Bradley, Govindarajulu (1974)) *Fie*

$$S_\lambda(\Delta,\ \lambda_0,\ G,\ H) = \ln 2 - 1 + \ln[\dot{\Delta}(1-\lambda_0)] -$$

153)

$$-\lambda \ln[\Delta(1-\lambda_0)/\lambda_0] - B_\lambda(\Delta,\ G,\ H),$$

Scanned with OKEN Scanner

unde

$$B_\lambda(\Delta,G,H) = \int_0^\infty \ln[\lambda G(v) + \Delta(1-\lambda)H(v)]\, d[\lambda G(v) + (1-\lambda)H(v)] =$$

$$= \lambda M_G\{\ln[\lambda G(X) + \Delta(1-\lambda)H(X)]\} + \tag{154}$$

$$+(1-\lambda)M_H\{\ln[\lambda G(Y) + (1-\lambda)H(Y)\}.$$

S_λ nu va fi egal cu zero, $0 < \lambda < 1$ și fie T numărul de pași înainte de terminarea (în modelul II) *a* T.S.R.P. *Atunci*

i) $P(T > t) < \rho^t$ *pentru* t *suficient de mare și* $0 \leqslant \rho < 1$,

ii) $P(T < \infty) = 1$;

iii) $M(e^{\theta T}) < \infty$ *pentru anumiți* θ *dintr-un interval* $(-\infty, \delta)$ $\delta > 0$.

Observații. i) Cînd H_0 sau $H_{a\,II}$ este adevărată, $S_\lambda(\Delta, \lambda_0, G, H) \neq 0$ cu condiția ca $\Delta \neq 1$ și/sau $\lambda_0 \neq \frac{1}{2}$ și T.S.R.P. se termină cu probabilitatea unu. De exemplu:

$$-\text{ sub } H_0, \text{ avem } H = G \text{ și } \lambda = \frac{1}{2} \text{ și}$$

$$S_{1/2}(\Delta,\lambda_0,G,G) = \frac{1}{2}\ln\,[16\,\Delta\lambda_0(1-\lambda_0)/(1+\Delta)^2]. \tag{155}$$

Cazul $\lambda = 0$ sau $\lambda = 1$ poate fi ușor cercetat. De asemenea sînt studiate proprietățile funcției $S_\lambda(\Delta, \lambda_0, G, H)$.

Cînd λ_0 nu este specificat, un procedeu rezonabil este de a înlocui λ_0 prin $\lambda_t = m/t$ și bazăm procedeul secvențial pe raportul de verosimilități rezultat. Acest T.S.R.P. rangurilor modificat va avea aceiași proprietate de terminare.

ii) m poate fi o variabilă hipergeometrică. Cu toate că în obținerea expresiei pentru $P(Z = z \mid \Delta)$ s-a presupus că F este continuă, expresia pentru $\Lambda_t(\Delta, Z)$ dată de (151) și concluziile teoremei 18 sînt adevărate chiar dacă F reprezintă o repartiție arbitrară deoarece F poate fi făcută continuă.

Este o *problemă deschisă* dacă este posibil să se extindă rezultatele lui Berk și Savage (1968) la situația unei selecții.

Miller (1970) a propus un test secvențial al semnului rangului pentru simetrie. Fie $X_1, X_2, \ldots$ un șir de variabile aleatoare independente și identic repartizate cu densitatea $f(x, \theta)$ care este simetrică față de θ. Dorim să verificăm ipoteza

$$H_0 : \theta = 0$$

față de alternativa

$$H_1 : \theta \neq 0.$$

Scanned with OKEN Scanner

Observație. Ipotezele privind poziția simetriei și simetria sînt o parte a presupunerii din H_0 și H_1. Testele acestor ipoteze vor diferi de testele dezvoltate în §. 4.

Fie

$$R_{n,i}, \text{ rangul lui } |X_i| \text{ printre } |X_1|, \ldots, |X_n|$$

și

S suma rangurilor pozitive ale X-lor. Cu alte cuvinte

$$S = \sum_{i=1}^{n} R_{n,i} \operatorname{sign}(X_i), \text{ unde } \operatorname{sign}(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x \leqslant 0 \end{cases}$$

Miller (1970) procedează după cum urmează:
continuă selecția atîta timp cît

i) $|S - n(n+1)/4| < z(\alpha, n_0)[n(n+1)(2n+1)/24]^{1/2}$ și

ii) $n < n_0$

Dacă nu este satisfăcută i) se acceptă H_1, fără continuarea experimentului.

Dacă nu este satisfăcută ii) (însă i) da) se acceptă H_0 fără continuarea experimentului.

n_0 și α sînt alese de cercetător. Acestea determină $z(\alpha, n_0)$ după cum urmează. Fie

$$Y_n = [S_n - n(n+1)/4][n(n+1)(2n+1)/24]^{-1/2}, \quad Y_{n_0} = \max_{1 \leqslant n \leqslant n_0} (|Y_n|).$$

Pentru marginea de respingere pentru $S_n - n(n+1)/4$ definită de

$$\pm\, y(\alpha, n_0)[n(n+1)(2n+1)/24]^{-1/2}$$

testul va decide în favoarea ipotezei H_1 dacă și numai dacă

$$Y_{n_0} \geqslant y(\alpha, n_0).$$

Astfel vom avea

$$P(Y_{n_0} \geqslant y(\alpha, n_0)) = \alpha.$$

Comportarea șirului $\{S_n\}$ pentru $n = 1, \ldots, n_0$ poate fi aproximată de un proces Wiener.

Miller (1970) face un studiu Monte-Carlo privind repartiția lui Y_{n_0} pentru diferite valori ale lui n_0 și obține valorile lui $y(\alpha, n_0)$. Acestea sînt prezentate în tabelul 4, unde k reprezintă volumul selecției pentru fiecare n_0.

Tabelul 4

α \ n_0	10	15	20	25	30	40	50	60
0.10	2,02	2,16	2,20	2,22	2.28	2,33	2,37	2,39
0,05	2,20	2,39	2,40	2,46	2,55	2,55	2,62	2,62
0,01	2,55	2,75	2,83	2,91	2,93	3,03	3,03	3,07
$k/10^3$	2	1	3	1	3	2	3	6

Scanned with OKEN Scanner

Trunchierea n_0, în special în problemele medicale, este dictată de limitarea de timp, bani, energie, pacienţi etc. Dacă S_n reprezintă suma rangurilor X-lor pozitivi printre valorile absolute X, atunci

$$S_n = S_{n-1} + \sum_1^n \text{sign}\,(X_i + X_n).$$

Miller (1970) cu ajutorul unor studii Monte-Carlo, tabelează puterea şi numărul mediu de observaţii ale procedeului său pentru alternative de translaţie a repartiţiei dublu-exponenţiale; ajunge la concluzia că puterea sa este rezonabilă şi valoarea medie a volumului selecţiei $\leqslant n_0$.

Groenveld (1971) propune un test secvenţial pentru verificarea simetriei considerată de Miller (1970). Groenveld presupune că densitatea

$$f(x,\ \theta) = f(x - \theta) \text{ unde } f(x) > 0 \text{ pentru toţi } x,$$

$$f(x) = f(-x),$$

$$f'(x) < 0 \text{ pentru } x > 0.$$

Pentru a verifica

$$H_0:\ \theta = \theta_0$$

faţă de

$$H_1:\ \theta = \theta_1 > \theta_0$$

se poate aplica T.S.R.P. calculînd

$$\Lambda_n = \prod_1^n \{f(X_i;\ \theta_1)/f(X_i;\ \theta_0)\}.$$

Testul secvenţial al lui Groenveld (1971) pentru aceste ipoteze este bazat pe numărul de cîte ori raportul

$$Z = \ln[f(X;\ \theta_1)/f(X;\ \theta_0)]$$

este pozitiv. Notăm această statistică prin T_n. Acest raport este pozitiv dacă şi numai dacă $X > (\theta_0 + \theta_1)/2 = \bar{\theta}$. În acest test secvenţial verificăm două valori alternative ale parametrului binomial p

$$H_0: p = p_0$$

faţă de

$$H_1:\ p = p_1,$$

unde

$$p_0 = P(X > \bar{\theta} |\ \theta_0) = P(X - \theta_0 > (\theta_1 - \theta_0)/2) = \int_\Delta^\infty f(x)\,dx,$$

Scanned with OKEN Scanner

şi

$$p_1 = P(X > \bar{\theta} \mid \theta_1) = P(X - \theta_1 > (\theta_0 - \theta_1)/2) = \int_{-\Delta}^{\infty} f(x)\, dx,$$

pentru $\Delta = (\theta_1 - \theta_0)/2$. Avem $p_0 + p_1 = 1$.

Prezintă importanţă compararea eficienţei testului secvenţial al semnului (T.S.S.) relativă la T.S.R.P. Cînd amîndouă testele au aceleaşi probabilităţi ale erorilor α şi β, atunci eficienţa relativă este

$$e = \frac{M(N)_{\text{T.S.R.P}}}{M(N)_{\text{T.S.S.}}}.$$

Folosind formulele aproximative ale lui Wald (1947) pentru $M(N)$ şi observînd că variabila aleatoare Z pentru T.S.S. este dată de

$$Z = \ln (p_1/p_0)^X [(1 - p_1)/(1 - p_0)]^{1-X}$$

unde

$$X : \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ p_0 & 1 - p_0 \end{pmatrix}$$

se obţine

$$e = \{p_0 \ln(p_1/p_0) + (1 - p_0) \ln [(1 - p_0)/(1 - p_1)]\}/M_{\theta_0}(Z),$$

unde

$$Z = \ln[f(X;\ \theta_1)/f(X;\ \theta_0)].$$

Rezultă aceiaşi valoare dacă θ_0 este înlocuit prin θ_1. Tabelul 5 dă valorile acestor eficienţe cînd X este normală sau Laplace (dublu exponenţială). Parametrul Δ este în termeni de abateri standard. Cele două

Tabelul 5

2Δ	Normala	Laplace
0,1	0,634	0,978
0,2	0,635	0,959
0,4	0,634	0,927
0,5	0,632	0,914
0,6	0,630	0,902
0,8	0,624	0,880
1.0	0.618	0,862

expresii din numărătorul şi numitorul lui e sînt funcţii de Δ şi de densitatea $f(x)$. În anumite condiţii de regularitate asupra lui $f(x)$, numărătorul şi numitorul pot fi dezvoltaţi în serie Tayler. Pentru e rezultă expresia

$$e = [-8f^2(0)\Delta^2 + 0(\Delta^3)]/[-2M\{f'(X)/f(X)\}^2\Delta^2 + 0(\Delta^3)].$$

Deci

$$\lim_{\Delta \to 0} e = 4f^2(0)/M[(f'/f)^2]$$

Scanned with OKEN Scanner

care este de asemenea eficienţa medianei ca estimator pentru θ relativ la cel mai bun estimator nedeplasat pentru θ (Fisz (1963)) şi este de asemenea eficienţa asimptotică a testului semnelor relativ la C.M.P.T. pentru ipoteza de simetrie dacă considerăm teste bazate pe selecţii de volum fixat (Hájek, Sidak (1967)). Am considerat acest T.S.S. dat de Groenveld (1971) deoarece pentru a calcula statistica T_n nu trebuie să cunoaştem forma funcţiei f. Valoarea lui p_0 depinde de repartiţia lui X. Totuşi testul peste fi aplicat alegînd o valoare a lui p_0 şi valorile lui A şi B (aproximaţiile lui Wald) astfel ca testul secvenţial binominal are erorile α şi β.

§9. T.S.R.P. rangurilor în cazul a c selecţii

Govindarajulu (1975) a extins rezultatele lui Savage şi Sethuraman (1966) la c selecţii, studiind normalitatea asimptotică.

Fie $(X_{1i}, X_{2i}, \ldots, X_{ci})$ $i = 1, 2, \ldots, n$ independente şi identic repartizate cu repartiţia comună H şi avînd repartiţiile marginale $F_1, F_2, \ldots, F_c$ care nu au discontinuităţi comune.

Ne propunem să verificăm ipoteza

$$H_0 : X_1, X_2, \ldots, X_c \text{ sînt independente şi}$$
$$F_1(x) = F_2(x) = \ldots = F_c(x) \text{ pentru toţi } x$$

faţă de ipoteza alternativă

$$H_1 : X_1, X_2, \ldots, X_c \text{ sînt independente şi}$$
$$F_i(x) = (F^*)^{\theta_i},\ F^* \text{ continuă},\ \theta_i > 0 \text{ este cunoscută}$$
$$(i = 1, 2, \ldots, c) \text{ şi cel puţin doi } \theta \text{ sînt diferiţi.}$$

Fie $W_1, \ldots, W_{cn}$ selecţia combinată şi

$$W_{n,1}, \ldots, W_{n,cn}$$

statisticile de ordine corespunzătoare. Fie $F_{i,n}(.)$ funcţia de repartiţie empirică a variabilelor $(X_{i1}, \ldots, X_{in})$ $(i = 1, 2, \ldots, c)$. În cele ce urmează definim c ordinea rangurilor.

DEFINIŢIA 6. *c ordinea rangurilor este definită de*

$$Z = (Z_1, \ldots, Z_{cn}),$$

unde $Z_i = j$ cînd $W_i = X_{jk}$ pentru $1 \leqslant k \leqslant n$.

Atunci se poate obţine probabilitatea lui Z sub H.

LEMA 8. (Govindarajulu (1975)). Avem

$$P(Z = z \mid H_1) = (n!)^c \prod_{i=1}^{c} \theta_i^n / n^{cn} \prod_{i=1}^{cn} \left\{ \sum_{k=1}^{n} \theta_k F_{k,n}(W_i) \right\}.$$

Deci

$$\Lambda_n(\theta, F_n) = P(Z = z \mid H_1) / P(Z = z \mid H_0) =$$

$$= (cn)! \prod_{1}^{n} \theta_i^n / n^{cn} \prod_{i=1}^{cn} \left[\sum_{k=1}^{n} \theta_k F_{k,n}(W_i) \right]. \tag{156}$$

Scanned with OKEN Scanner

Astfel definim T.S.R.P. pentru c ordinea rangurilor după cum urmează;

Dacă experimentul a ajuns la pasul n, adică a fost observat

$$(X_{1i}, \ldots, X_{ci}), \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

— facem cîte o observaţie asupra fiecăreia din cele c variabile dacă

$$B < \Lambda_n(\theta, F_n) < A,$$

— acceptăm H_0 dacă $\Lambda_n \leqslant B$,
— respingem H_0 dacă $\Lambda_n \geqslant A$,
unde $0 < B < 1 < A < \infty$ sînt constante convenabil alese.

Fie N variabila de stopare a T.S.R.P. descris anterior şi

$$(157) \quad S(\theta, F) = c \ln c - c + \sum_{i=1}^{c} \ln \theta_i - \int \ln \left[\sum_{k=1}^{c} \theta_k F_k(x) \right] \mathrm{d} \left(\sum_{1}^{c} F_k(x) \right).$$

Cu acestea are loc

TEOREMA 19. (Govindarajulu (1975)). *Dacă* $S(\theta, F) \neq 0$, *atunci*

i) $P(N > n) < \rho^n$ *pentru* n *suficient de mare şi* $0 < \rho < 1$,

ii) $P(N < \infty) = 1$,

iii) $M[\exp(tN)] < \infty$ *pentru* t *într-un interval* $(-\infty, \tau)$, $\tau > 0$.

Au fost studiate proprietăţi ale funcţiei $S(\theta, F)$, precum şi normalitatea asimptotică a statisticii $S_n = n^{-1} \ln \Lambda_n$.

TEOREMA 20. (Govindarajulu (1975)). *Fie* $\lambda_j = \theta_j \Big/ \sum_{1}^{c} \theta_i$. *Dacă* $X_1, \ldots, X_c$ *sînt independente şi* $0 < \lambda_j$ *pentru anumite* j; *atunci*

$$(158) \quad \lim_{n \to \infty} \sup_{z} |P[n^{1/2}(S_n - S(\theta, F))/\sigma_n \leqslant z] - \Phi(z)| = 0$$

pentru toate funcţiile $F_1, \ldots, F_c$, *unde*

$$\sigma_n^2 = 2 \iint_{x<y} [(1 - H(y))/H(y)] \mathrm{d} \left(\sum_{1}^{c} F_k(x) \right) \mathrm{d} \left(\sum_{1}^{c} F_k(y) \right) +$$

$$+ 2 \iint_{x<y} \left\{ \left[\sum_{k=1}^{c} F_k(x)(1 - F_k(y)) \right] \Big/ H(x)H(y) \right\} \mathrm{d}H(x)\mathrm{d}H(y) -$$

$$- 2 \sum_{k=1}^{c} \lambda_k \iint_{x<y} \{F_k(x)[1 - F_k(y)]/H(x)H(y)\} \mathrm{d} \left(\sum_{1}^{c} (F_k(x)) \right) \mathrm{d}H(y) -$$

$$- 2 \sum_{k=1}^{c} \lambda_k \iint_{x<y} \{F_k(x)[1 - F_k(y)]/H(x)H(y)\} \mathrm{d}H(y) \mathrm{d} \left(\sum_{1}^{c} F_k(y) \right),$$

Scanned with OKEN Scanner

unde

$$H(x) = \sum_{k=1}^{c} \lambda_k F_k(x).$$

§ 10. Teste secvențiale de rang pentru poziție

10.1. Introducere

Fie $\{X_i\}_{i\geq 1}$ un șir de variabile aleatoare independente și identic repartizate cu funcția de repartiție $F_\theta(x)$ absolut continuă, unde

$$F_\theta(x) = F(x-\theta),\ \theta \text{ necunoscut și } F \in \mathcal{F}_0, \tag{159}$$

$\mathcal{F}_0$ fiind clasa tuturor funcțiilor de repartiție absolut continui, simetrice față de zero pentru care există densitatea și derivatele sale aproape peste tot. Ne propunem să verificăm ipoteza

$$H_0 : \theta = \theta_0 \tag{160}$$

față de

$$H_1 : \theta = \theta_1 = \theta_0 + \Delta \tag{161}$$

unde θ_0 și $\Delta(>0)$ sînt necunoscute; și fără a micșora generalitatea, luăm $\theta_0 = 0$, în cele ce urmează lucrînd cu $X_i - \theta_0$, $i \geq 1$. T.S.R.P. al lui Wald (1947) se aplică la (160)—(161) cînd F este complet specificată. Bartlett (1946) și Cox (1963) extind T.S.R.P. asimptotic la testul secvențial al raportului de verosimilitățI cînd F este de o formă specifică conținînd un parametru nedorit, de exemplu δ. Pornind cu un volum de selecție $n_0(\Delta)$ inițial, moderat de mare, lucrînd cu statisticile raportului de verosimilitățI (la pasul n cu λ_n^* logaritmul raportului a două maxime de funcții de verosimilitățI sub două ipoteze (compuse) în (160)) și urmînd aceeași regulă de stopare ca T.S.R.P., Bartlett și Cox au arătat că în baza aproximării șirului $\{\lambda_n^*,\ n \geq n_0(\Delta)\}$ printr-un proces Wiener, testul secvențial al raportului de verosimilitățI are simptotic (cînd $\Delta \to 0$) toate proprietățile T.S.R.P. (corespunzător la cazul cînd δ este cunoscut). Atît pentru T.R.S.P. cît și pentru testul secvențial al raportului de verosimilitățI se presupune că F are o formă dată, lucru care în practică se întîmplă rar cînd forma adevărată și cea presupusă a funcției F nu sînt aceleași. Proprietățile acestor procedee, incluzînd optimalitatea lor, sînt probleme deschise. Aceste procedee nu sînt foarte robuste. În contextul neparametric, F este necunoscută și aparține la o clasă de funcții de repartiție ca $\mathcal{F}_0$ în (159). Sîntem interesați în studierea testului secvențial al raportului de verosimilitățI care este bazat pe statistici de rang robuste și care rămîne valabil pentru întreaga clasă $\mathcal{F}_0$.

Pentru statisticile rangurilor statisticilor de ordine, Sen, Ghosh (1971, 1973 a, b) și Sen (1974) studiază principiile de invarianță și convergența aproape sigură pentru procesele Wiener. Aceste rezultate dau mijloace pentru a studia diferite proprietăți ale testului secvențial al raportului de verosimilitățI.

Pentru fiecare $n(\geq 1)$ și $d(-\infty < d < \infty)$ real, fie

$$R_{ni}(d) = \frac{1}{2} + \sum_{j=1}^{n} c(|X_i - d| - |X_j - d|)$$

rangul lui $|X_i - d|$ printre

$$|X_1 - d|, \ldots, |X_n - d|,$$

unde

$$c(u) = \begin{cases} 1, & u > 0 \\ \frac{1}{2}, & u = 0 \\ 0, & u < 0 \end{cases}$$

Considerăm o mulțime de scoruri

$$J_n(i/(n+1)) = M(J(U_{ni}) \text{ sau } J(i/(n+1)), \quad i = 1, 2, \ldots, n,$$

unde

$$U_{n1} < \ldots < U_{nn}$$

sînt variabile aleatoare ordonate ale unei selecții de volum n asupra unde variabile uniforme pe (0, 1) și funcția scor este definită

$$J(u) = -g'(G^{-1}((1+u)/2))/g(G^{-1}((1+u)/2)), \tag{162}$$

$$0 \leqslant u < 1, \quad G \in \mathcal{F}_0,$$

unde G este nedegenerată și puternic unimodală; astfel ca $J(u)$ este crescătoare în $u: 0 \leqslant u < 1$. Exemple de G sînt funcțiile de repartiție normală și logistică; scorurile normale sînt cunoscute ca scoruri normale și Wilcoxon. Atunci

$$T_n(d) = \sum_{i=1}^{n} J_n((n+1)^{-1} R_{ni}(d))\, s(X_i - d), \quad s(u) = 2c(u) - 1, \tag{163}$$

sînt rangurile statisticilor de ordine. Sub H_0 cît și pentru alternative generale, Sen, Ghosh (1973 a, b) și Sen (1974) au studiat pentru aceste statistici principiile de invarianță. De asemenea, sub H_1 în (161) și pentru Δ mic, cînd $n \to \infty$

$$n^{-1}\nu^{-1} M_\Delta T_n(0) \to \Delta/\tau; \quad \tau = \nu/C(F), \tag{164}$$

unde

$$\nu^2 = \int_0^1 J^2(u)\,du, \quad C(F) = \int_0^\infty (d/dx)\, J(H(x))\, dH(x) \text{ și}$$

$$H(x) = F(x) - F(-x). \tag{165}$$

Deci dacă τ este cunoscut, se pot folosi rezultatele lui Dvoretzley, Kiefer, Wolfowitz (1953) asupra T.S.R.P. pentru procese Wiener pentru a construi teste secvențiale asimptotice bazate pe $\{T_n(0),\ n \geqslant n_0(\Delta)\}$. Prin urmare construim mai întîi un estimator puternic consistent pentru τ.

Scanned with OKEN Scanner

Cînd $\theta = 0$, $T_n(0)$ are o funcţie de repartiţie simetrică faţă de 0, şi pentru valori mari ale lui n,

$$n^{-1/2} T_n(0)/\nu$$

are asimptotic o repartiţie $N(0, 1)$. Deci pentru fiecare $\varepsilon > 0$, putem alege T_n astfel încît

$$(166) \quad P_0\{|T_n(\theta)| \leqslant T_{n,\varepsilon}\} = P_0\{|T_n(0)| \leqslant T_{n,\varepsilon}\} \to 1 - \varepsilon \text{ cînd } n \to \infty.$$

Atunci fie

$$(167) \quad \theta^*_{L,n} = \sup\{d : T_n(d) > T_{n,\varepsilon}\}, \quad \theta^*_{U,n} = \inf\{d : T_n(d) < -T_{n,\varepsilon}\};$$

$$(168) \quad C^*_n = 2T_{n,\varepsilon}/n(\theta^*_{U,n} - \theta^*_{L,n}); \quad \hat{\tau}_n = \nu/C^*_n.$$

Atunci (Sen, Ghosh (1971)) urmează că pentru $n \to \infty$, C^*_n (sau τ^*_n) converge a.s. către $C(F)$ (sau $\hat{\tau}_n$); de asemenea repartiţia lui C^*_n (sau $\hat{\tau}_n$) nu depinde de θ. Cu acestea scopul testului secvenţial al raportului de verosimilităţi poate fi formulat după cum urmează:

Corespunzător la intensitatea (α, β) prestabilită, considerăm două numere pozitive (A, B); $0 \leqslant B < 1 < A < \infty$, unde

$$A \leqslant (1 - \beta)/\alpha \text{ şi } B \geqslant \beta/(1 - \alpha).$$

Pornind cu o selecţie iniţială de volum $n_0 (= n_0(\Delta))$, continuăm selecţia luînd observaţii una cîte una atîta timp cît

$$(169) \quad b\nu^2 < \Delta C^*_m T_m(\Delta/2) < a\nu^2 (\text{unde } a = \ln A \text{ şi } b = \ln B);$$

dacă pentru prima oară (169) este violată pentru $m = n$ şi $\Delta C^*_n T_n(\Delta/2)$ este $\leqslant b\nu^2$ (sau $\geqslant a\nu^2$) acceptăm H_0 (sau H_1) în (160), (161); variabila de stopare corespunzătoare este notată prin $N_J(\Delta)$ astfel ca $N_J(\Delta) \geqslant n_0(\Delta)$.

10.2. Proprietăţi ale testului secvenţial al raportului de verosimilităţi

TEOREMA 21. (Sen, M. Ghosh (1974)). *Sub* (159) *şi pentru funcţia scor de pătrat integrabilă nedescrescătoare, pentru fiecare* θ *(fixat) şi* Δ

$$\lim_{n \to \infty} P_\theta\{N_J(\Delta) > n\} = 0,$$

adică procesul în (169) *se termină cu probabilitatea unu.*

Pentru studiul funcţiilor C.O. şi V.M.V.S. a testului secvenţial al raportului de verosimilităţi ne oprim la alternativele de poziţie. Aici, pentru justificări teoretice, considerăm cazul asimptotic cînd $\Delta \to 0$. Acesta este comparabil cu situaţia asimptotică în problema duală a intervalelor de încredere secvenţiale de lungime mărginită pentru θ (considerată de Chow, Robbins (1965)). Mai întîi, pentru $\Delta \to 0$, excesele depăşirii marginilor în T.S.R.P. sînt neglijabile, astfel că putem lua

(170) $e^a = A = (1-\beta)/\alpha$ şi $e^b = B = \beta/(1-\alpha)$; $0 < \alpha,\ \beta < \frac{1}{2}$.

În al doilea rînd, în comparaţie cu cererea lui Wald (1974) ca funcţia generatoare de momente a funcţiei

$$\ln \{f(X_i - \Delta)/f(X_i)\},$$

presupunem ca în Sen, Ghosh (1971) că

(171) $(0 \leqq) J'(u) \leqq K(1-u)^{-1},\ 0 \leqslant u < 1;\ 0 < K < \infty,$

care implică pentru $t_0 (> 0)$,

(172) $$M(t) = \int_0^\infty \exp\,[tJ(u)]\,du < \infty \text{ pentru toţi } t \leqslant t_0.$$

În al treilea rînd, V.M.V.S. a $N_J(\Delta)$ este $0(\Delta^{-2})$ cînd $\Delta \to 0$, şi pînă la prima aproximaţie, funcţiile C.O. şi V.M.V.S. nu sînt afectate de creşterea lui $n_0(\Delta)$ (cu $\Delta \to 0$), cu condiţia ca rata creşterii să fie înceată.

Pe de altă parte, ca în Bartlett (1946) şi Cox (1963), trebuie să avem un volum de selecţie de mărime moderată astfel ca să estimeze $C(F)$ prin C_n^* cu o acurateţe rezonabilă. Deci presupunem că pentru γ, $0 < \gamma \leqslant 1$,

(173) $$\lim_{\Delta \to 0} \{\Delta^\gamma n_0(\Delta)\} = \infty \text{ şi } \lim_{\Delta \to 0} \{\Delta^2 n_0(\Delta)\} = 0.$$

În final, pentru fiecare θ fixat ($\neq 0$), folosind convergenţa $T_p(\Delta/2)/n$ şi C_n^* (Sen, Ghosh (1971)), obţinem că C.O. şi testul secvenţial al raportului de verosimilităţi converg (cînd $\Delta \to 0$) la 0 sau 1 după cum $\theta < 0$ sau $\theta > 0$. Deci, în cazul asimptotic, presupunem că

(174) $$\theta = \phi\Delta,\ \phi \in I, \text{ unde } I = \left\{\phi : \left|\phi - \frac{1}{2}\right| \leqslant K_0\right\},$$

pentru $K_0 > \frac{1}{2}$. Putem observa că (170), (173) şi (174) sînt de asemenea conţinute în Bartlett (1946) şi Cox (1963).

Notînd prin $L_f^{(F)}(\phi, \Delta)$ C.O. şi testul secvenţial al raportului de verosimilităţi bazat pe $N_J(\Delta)$ în (169) cînd $\theta = \phi\Delta$ şi funcţia de repartiţie este F, avem

TEOREMA 22 (Sen, Ghosh M.(1974)). *În presupunerile făcute anterior pentru fiecare $\phi \in I$.*

(175) $$\lim_{\Delta \to 0} L_f^{(F)}(\phi, \Delta) = (A^{1-2\phi} - 1)/(A^{1-2\phi} - B^{1-2\phi}),\ \phi \neq \frac{1}{2}$$

$$= (\ln A)/(\ln A - \ln B) \qquad ,\ \phi \neq \frac{1}{2}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Deci asimptotic, C.O. şi testul secvenţial al raportului de verosimilităţi nu depind de $F(\in \mathcal{F}_0)$ şi funcţia scor $J(u)$, $0 \leqslant u < 1$, şi testul secvenţial al raportului de verosimilităţi are intensitatea (α, β) prestabilită. Adică, testul secvenţial al raportului de verosimilităţi este (asimptotic) consistent şi are o repartiţie liberă.

TEOREMA 23 (Sen, M. Ghosh (1974)). *În presupunerile anterioare, pentru fiecare* $\phi \in I$,

$$\lim_{\Delta \to 0} \{\Delta^2 M_0 [N_J(\Delta)]\} = \psi(\phi, \tau), \tag{176}$$

unde M_ϕ *se referă la media sub* $\theta = \phi\Delta$, *şi*

$$\psi(\phi, \tau) = [P(\phi) \ln B + \{1 - P(\phi)\} \ln A] \left[\tau^2 \Big/ \left(\phi - \frac{1}{2} \right) \right], \quad \phi \neq \frac{1}{2},$$

$$= - P'\left(\frac{1}{2}\right) \Big/ [\ln A - \ln B], \tag{177}$$

unde τ *este definiti* de (164),
$P(\phi)$ *este membrul drept al lui* (175), *şi*

$$P'\left(\frac{1}{2}\right) \text{ este } (\mathrm{d}/\mathrm{d}\phi) P(\phi) \text{ în } \phi = \frac{1}{2}.$$

Demonstraţia teoremelor. Teorema 21. După (169) avem (pentru $n \geqslant n_0(\Delta)$)

$$P\{N_J(\Delta) > n \,|\, \theta\} \leqslant P\{\nu^2 b/(\Delta C_n^*) < T_n(\Delta/2) < \nu^2 a/(\Delta C_n^*) \,|\, \theta\} =$$

$$= P\{\nu^2 b/(\Delta C_n^*) < T_n(\Delta/2 - \theta) < \nu^2 a/(\Delta C_n^*) \,|\, \theta = 0\}, \tag{178}$$

unde după Sen (1966) şi Jurečková (1969), C_n^* converge în probabilitate către $C(F)$ cînd $n \to \infty$. Cînd $\theta = \Delta/2$, demonstraţia urmează imediat observînd că sub $\theta = 0$, $n^{-\frac{1}{2}} T_n(0)$ este asimptotic $N(0, \nu^2)$. Pentru $\theta \neq \Delta/2$, normalitatea asimptotică a statisticii

$$n^{-\frac{1}{2}} [T_n(\Delta/2 - \theta) - M T_n(\Delta/2 - \theta)]$$

cere o condiţie adiţională şi anume ca dispersia sa să fie pozitivă.
Pentru fiecare δ real, sub $\theta = 0$, cînd $n \to \infty$ (Sen (1970)),

$$n^{-1} T_n(\delta) \xrightarrow[\text{a.s.}]{} \xi(\delta) = 2 \int_0^\infty J(F(x + \delta) - F(-x + \delta)) \, \mathrm{d}F(x + \delta) -$$

$$- \int_0^\infty J(u) \, \mathrm{d}u, \tag{179}$$

Scanned with OKEN Scanner

unde sub (159) și (162),

$$\xi(\delta)\begin{cases} <0, & \delta>0 \\ =0, & \delta=0 \\ >0, & \delta<0 \end{cases}$$

Deci demonstrația urmează din (178) și (179).

Următoarea lemă va fi considerată repetat în cele ce urmează

LEMA 9 (Sen, Ghosh (1971)). *Sub* (159) *și* (171), *pentru fiecare* $s>0$, *există constantele pozitive* (c_{s1}, c_{s2}) *și un întreg* n_s, *astfel ca pentru* $n \geqslant n_s$,

$$P\{|C_n^*/C(F)-1|>c_{s1}n^{-\frac{1}{4}}(\ln n)^3\} \leqslant c_{s2}n^{-s}. \tag{180}$$

Deci, $C_n^*/C(F) \xrightarrow[a.s]{} 1$ cînd $n \to \infty$.

TEOREMA 22. Pentru fiecare $\varepsilon>0$, fie

$$\begin{aligned} a_{\varepsilon,i} &= \ln A_{\varepsilon,i} = a[1+(-1)^i\varepsilon] \\ b_{\varepsilon,i} &= \ln B_{\varepsilon,i} = b[1+(-1)^i\varepsilon] \end{aligned} \quad i=1,2 \tag{181}$$

Presupunem că în procedeul secvențial din (169), înlocuim C_m^* prin $C(F)$, a prin $a_{\varepsilon,i}$ și b prin $b_{\varepsilon,i}$; variabilele de stopare corespunzătoare sînt notate prin $N_{J,\varepsilon}^{(ij)}(\Delta)$ și funcția C.O. prin $L_{J,ij}^{(F)}(\phi, \Delta)$, pentru $i, j = 1, 2$. Atunci, rescriind (169) ca

$$b\nu^2/C_m^* < \Delta T_m(\Delta/2) < a\nu^2/C_m^*,$$

obținem în virtutea lui (173), (174), lema 9 că pentru fiecare $\varepsilon>0$,

$$\lim_{\Delta\to 0} P_\phi\{N_{J,\varepsilon}^{(11)}(\Delta) \leqslant N_J(\Delta) \leqslant N_{J,\varepsilon}^{(22)}\} = 1 \text{ pentru toți } \phi \in I, \tag{182}$$

unde P_ϕ reprezintă probabilitatea calculată cu $\theta = \phi\Delta$ și de asemenea că pentru fiecare $\eta>0$, există $\Delta_0(>0)$ astfel ca

$$L_{J,21}^{(F)}(\phi, \Delta) - \eta \leqslant L_J^{(F)}(\phi, \Delta) \leqslant L_{J,12}^{(F)}(\phi, \Delta) + \eta \tag{183}$$

pentru toți $\Delta \leqslant \Delta_0$, $\phi \in I$.

Pentru $\phi = \frac{1}{2}$, $\{T_m(\Delta/2),\ m \geqslant n_0(\Delta)\}$ are aceeași repartiție ca $\{T_m(0),\ m \geqslant n_0(\Delta)\}$ sub $\theta = 0$. Din rezultatele lui Sen, Ghosh (1973 a) urmează că sub $\theta = 0$ cînd $n \to \infty$,

$$\nu^{-1}T_n(0) = W(n) + 0(n^{1/2}) \text{ a.s.}, \tag{184}$$

unde $\{W(t), t \geqslant 0\}$ este un proces Wiener standard. În consecință, folosind (184), rezultatele standard de mărginire pentru procesele Wiener, obținem că

$$\lim_{\Delta\to 0} L_{J,ij}^{(F)}\left(\frac{1}{2}, \Delta\right) = [\ln A_{\varepsilon,i}]/[\ln A_{\varepsilon,i} - \ln B_{\varepsilon,i}], \text{ pentru } i, j = 1, 2. \tag{185}$$

Scanned with OKEN Scanner

Deoarece ε şi η sînt arbitrare, din (181), (183) şi (185) urmează că

$$\lim_{\Delta\to 0} L_J^{(F)}\left(\frac{1}{2}, \Delta\right) = (\ln A)/[\ln A - \ln B]. \tag{186}$$

Pentru $\phi \neq \frac{1}{2}$, sub $\theta = \phi\Delta$, $\{T_m(\Delta/2),\ m \geqslant n_0(\Delta)\}$ are aceeaşi repartiţie ca $\left\{T_m\left(\left(\frac{1}{2} - \phi\right)\Delta,\ m \geqslant n_0(\Delta)\right\}\right.$ sub $\theta = 0$. Considerăm următoarea lemă

LEMA 10. *Sub* $\theta = 0$ (159) *şi* (171), *pentru fiecare* $\varepsilon > 0$, *există un* $c(\varepsilon)$ *pozitiv şi un* a_ε, *astfel ca pentru* $n \geqslant n_\varepsilon$

$$P\left\{n^{-1/2}\left|T_n\left(\left(\frac{1}{2} - \phi\right)\Delta\right) - n\xi\left(\left(\frac{1}{2} - \phi\right)\Delta\right) - W_n(\phi,\ \Delta)\right| > \varepsilon\right\} \leqslant$$

$$\leqslant c(\varepsilon)n^{-1-\delta}\ , \qquad \delta > 0 \tag{187}$$

unde $\xi(\cdot)$ *este definită de* (179), $W_n(\phi,\ \Delta) = \sum_{i=1}^{n} Z_i(\phi,\ \Delta)$ *şi* $Z_i(\phi,\ \Delta)$ *sînt variabile aleatoare independente şi identic repartizate cu media* θ *şi dispersia finită* $\nu^2(\phi,\ \Delta)$, *unde*

$$\lim_{\Delta\to 0} \nu^2(\phi,\ \Delta) = \nu^2, \text{ pentru toţi } \phi \in I. \tag{188}$$

Pentru demonstraţie a se vedea Sen, Ghosh (1974) p. 549—550.
După (179) avem

$$\lim_{\Delta\to 0}\left\{\Delta^{-1}\xi\left(\left(\frac{1}{2} - \phi\right)\Delta\right)\right\} = -\left(\frac{1}{2} - \phi\right) C(F) \text{ pentru toţi } \phi \in I. \tag{189}$$

Pentru şirul $\left\{W_n(\phi,\ \Delta) + n\xi\left(\left(\frac{1}{2} - \phi\right)\Delta\right),\ n \geqslant n_0(\Delta)\right\}$ se aplică rezultatele lui Wald şi din (187), (188) şi (189) obţinem

$$\lim_{\Delta\to 0} L_{J,ij}^{(F)}(\phi,\ \Delta) = [(A_{\varepsilon,i})^{1-2\phi} - 1]/[(A_{\varepsilon,i})^{1-2\phi} - (B_{\varepsilon,j})^{1-2\phi}] \tag{190}$$

$$\text{pentru } \phi\left(\neq \frac{1}{2}\right) \in I, \text{ şi } i, j = 1, 2.$$

Din nou, cu ε şi η arbitrari, din (181), (183) şi (190) urmează că pentru fiecare $\phi\left(\neq \frac{1}{2}\right) \in I$,

$$\lim_{\Delta\to 0} L_J^{(F)}(\phi,\ \Delta) = [A^{1-2\phi} - 1]/[A^{1-2\phi} - B^{1-2\phi}], \tag{191}$$

şi teorema 22 este demonstrată.

Scanned with OKEN Scanner

Pentru demonstrația teoremei 23 observăm mai întîi că $N_J(\Delta) \geqslant n_0(\Delta)$, astfel ca

$$(192)\quad M_\phi [N_J(\Delta)] = \Delta^2 n_0(\Delta) P\{N_J(\Delta) \geqslant n_0(\Delta)\} + \Delta^2 \sum_{n \geqslant n_0(\Delta)} P_\phi \{N_J(\Delta) > n\}$$

unde după (173), $\Delta^2 n_0(\Delta) \to 0$ cînd $\Delta \to 0$. De asemenea,

$$\begin{aligned} P_\phi\{N_J(\Delta) > n\} &= P_\phi\{N_J(\Delta) > n, |C_n^*/C(F) - 1| \leqslant \varepsilon\} + \\ &+ P_\phi\{N_J(\Delta) > n, |C_n^*/C(F) - 1| > \varepsilon\} = \\ &= P_\phi\{N_J(\Delta) > n, |C_n^*/C(F) - 1| \leqslant \varepsilon\} + \\ &+ 0(n^{-s}), \text{ după lema 8} \end{aligned} \qquad (193)$$

unde $s > 1$. Astfel, folosind (192), (193) și definițiile lui $N_J^{(11)}(\Delta)$ și $N_J^{22}(\Delta)$ date după (181), este suficient să arătăm că pentru fiecare $\varepsilon > 0$ există un $\eta > 0$, astfel ca

$$(194)\quad \lim_{\Delta \to 0} |\Delta^2 M_\phi [N_J^{(ii)}(\Delta)] - \psi(\phi, \tau)| < \eta \text{ pentru } i = 1, 2 \text{ și } \phi \in I.$$

Definim $M_\phi T_n(\Delta/2) = \mu(n, \phi, \Delta)$, $n \geqslant 1$, $\Delta > 0$ și $\phi \in I$. Atunci avem următoarea

LEMA 11. *Pentru fiecare* $\phi \left(\neq \frac{1}{2} \right) \in I$, *cînd* $\Delta \to 0$,

$$M_\phi [\mu(N_J^{(ii)}(\Delta), \phi, \Delta)] = \{M_\phi [N_J^{(ii)}(\Delta)]\} \left\{ \xi\left(\frac{1}{2} - \phi\right)\Delta + 0(\Delta) \right\}.$$

Pentru demonstrație a se vedea Sen, Ghosh (1974).

Reîntorcîndu-ne la demonstrația teoremei, observăm că în baza teoremei 2.1 a lui Sen (1974), sub $\theta = \phi\Delta$, $\{T_m(\Delta/2) - \mu(n, \phi, \Delta),\ n \geqslant 1\}$, este un martingal în raport cu șirul crescător de σ-cîmpuri și prin definiție, $n^{-1}T_n(d)$ este mărginit pentru toți n și fiecare d real.
Pentru acest martingal se verifică condițiile lemei 1 a lui Chow, Robbins, Teicher (1965) și deci obținem că:

$$(195)\qquad M_\phi [T_{N_J^{(ii)}(\Delta)}(\Delta/2)] = M_\phi \{\mu(N_J^{(ii)}(\Delta), \phi, \Delta)\},$$

pentru toți $\phi \in I$ și $i = 1, 2$.

Pe de altă parte neglijînd excesul depășirii marginilor (permise pentru $\Delta \to 0$), $T_{N_J^{(ii)}(\Delta)}(\Delta/2)$ poate lua numai două valori

$$b\nu^2[1 + (-1)^i\varepsilon]/\Delta C(F) \text{ și } a\nu^2[1 + (-1)^i\varepsilon]/\Delta C(F)$$

Scanned with OKEN Scanner

cu probabilităţile

$$L^{(F)}_{J,i}(\phi,\ \Delta) \text{ şi respectiv } 1 - L^{(F)}_{J(i)}(\phi,\ \Delta) \text{ pentru } i = 1, 2.$$

Deci cînd $\Delta \to 0$,

(196) $$\Delta M_\phi\,[T_{N^{(i)}_J(\Delta)}(\Delta/2)] \to$$

$$\to [1 + (-1)^i\varepsilon]\nu^2[bP(\phi) + a\{1 - P(\phi)\}]/C(F) \text{ după (175).}$$

De asemenea, după (189) şi lema 11, pentru $\phi \neq \frac{1}{2}$, cînd $\Delta \to 0$

(197) $$\Delta^{-1}M_\phi\,[N^{(i)}_J(\Delta)]\left[\xi\left(\left(\frac{1}{2} - \phi\right)\Delta\right) + 0(\Delta)\right] \to$$

$$\to -\left(\frac{1}{2} - \phi\right)C(F)M_\phi\,[N^{(i)}_J(\Delta)] + 0(1).$$

Din (196), (197) şi definiţia funcţiei $\psi(\phi,\ \tau)$ în (177), cînd $\Delta \to 0$, obţinem

(198) $$\Delta^2 M_\phi\,[N^{(i)}_J(\Delta)] \to [1 + (-1)^i\varepsilon]\psi(\phi,\ \tau) \text{ pentru } \phi\left(\neq \frac{1}{2}\right) \in I.$$

Deoarece ε este arbitrar, are loc (194) şi teorema este demonstrată pentru $\phi\left(\neq \frac{1}{2}\right) \in I$.

Demonstraţia anterioară nu are loc cînd $\phi = \frac{1}{2}$, lema 11 şi (197) neputînd fi folosite. Totuşi, notînd că $P(\phi)$, definit de (175) are o derivată continuă $P'(\phi)$ în $\phi = \frac{1}{2}$ şi considerînd şirul de valori ϕ, ca fiind $\frac{1}{2} \pm \varepsilon_r$, unde $\varepsilon_r \to 0$ cînd $r \to \infty$ şi folosind demonstraţia anterioară, obţinem din regula l'Hopital că

(199) $$\lim_{\Delta \to 0}\{\Delta^2 M_{\frac{1}{2}}\,[N_J(\Delta)]\} = -\tau^2 P'\left(\frac{1}{2}\right)\ln AB^{-1}.$$

Deci teorema este complet demonstrată.

10.3. Comparaţia testului secvenţial al rangurilor statisticilor de ordin cu testul secvenţial al raportului de verosimilităţi (în teoria normală) şi cu T.S.R.P. (Wald)

Cînd F din (159) este normală cu dispersia necunoscută σ^2, testul secvenţial al raportului de verosimilităţi Bartlett-Cox este bazat pe variabila de stopare $N_E(\Delta)$ definită în cele ce urmează

Fie $\bar{X}_n$ şi $s_n^2 = (n-1)^{-1}\sum_1^n (X_i - \bar{X}_n)^2$, $n \geqslant 2$. Atunci $N_E(\Delta)$ este ultimul întreg pozitiv ($\geqslant n_0(\Delta)$) pentru care inegalitatea

Scanned with OKEN Scanner

(200) $$bs_m^2 < m\Delta(\bar{X}_m - \Delta/2) < as_m^2 \quad (m \geqslant n_0(\Delta))$$

nu este adevărată, dacă pentru $N_E(\Delta) = n$,

$$n\Delta(\bar{X}_n - \Delta/2) \leqslant bs_n^2 \text{ (sau } \geqslant as_n^2)$$

acceptăm H_0 (sau H_1).

Sîntem interesaţi în proprietăţile testului cînd F nu este necesar normală.

Media de selecţie este un caz particular de U-statistică şi a fost studiată de Sen (1971). Putem stabili următoarele rezultate.

Mai întîi dacă F posedă moment de ordinul doi finit, testul secvenţial bazat pe $N_E(\Delta)$ se termină cu probabilitatea unu.

În al doilea rînd, funcţia C.O. a testului bazat pe $N_E(\Delta)$ concordă cu (175). Adică, testul secvenţial al rangurilor statisticilor de ordine (T.S.R.S.O.) este asimptotic neparametric pentru funcţiile de repartiţie cu momentul de ordinul doi finit. Pentru V.M.V.S. trebuie să presupunem că F are momentul absolut de ordinul r finit pentru $r > 4$. Atunci (din Sen (1973)) urmează că

(201) $$\lim_{\Delta \to 0} \{\Delta^2 M_\phi [N_E(\Delta)]\} = \psi(\phi, \sigma), \ \phi \in I,$$

unde $\psi(\phi, \sigma)$ este definit de (177) şi σ înlocuit prin τ.

Vom compara T.S.R.S.O. şi testul secvenţial al raportului de verosimilităţi cînd funcţia de repartiţie nu este necesar normală.

Pentru două procedee secvenţiale R şi Q pentru verificarea ipotezei H_0 faţă de H_1 cu (160)—(161), dacă $N_R(\Delta)$ şi $N_Q(\Delta)$ sînt variabilele de stopare corespunzătoare, şi dacă amîndouă au aceeaşi funcţie C.O. (specificată de (175)), atunci eficienţa asimptotică a lui Q relativă la R cînd $\theta = \phi\Delta$ şi F este funcţia de repartiţie adevărată este dată de

$$e(Q, R, \phi, F) = \lim_{\Delta \to 0} \{M_\phi N_R(\Delta)/M_\phi N_Q(\Delta)\} =$$

(202)

$$= \lim_{\Delta \to 0} \{[\Delta^2 M_{\phi|} N_R(\Delta)]/\Delta^2 M_\phi N_Q(\Delta)]\}.$$

Astfel din teorema 23 şi (201), eficienţa asimptotică a T.S.R.S.O. relativă la testul secvenţial al raportului de verosimilităţi în cazul normal cînd funcţia de repartiţie actuală este F şi $\theta = \phi\Delta$ este egală cu

(203) $$e(J, E, \phi, F) = \psi(\phi, \sigma)/\psi(\phi, \tau) = \sigma^2/\tau^2 = \sigma^2 C^2(F)/\nu^2,$$

pentru toţi $\varepsilon \in I$.

Acum (203) concordă cu eficienţa asimptotică relativă în sensul lui Pitman a testului rangurilor ordonate pentru poziţie în raport cu testul t (Chernoff, Savage (1958)). În particular cînd $J(u) = u$; $0 \leqslant u \leqslant 1$, (203) se reduce la

(204) $$e(W, E, \phi, F) = e(W, E, F) = 12\sigma^2 \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f^2(x) \mathrm{d}x \right)^2,$$

care este egală cu $3/\pi$ pentru F normală

Scanned with OKEN Scanner

$\geqslant 0{,}864$ pentru toţi F pentru care $\sigma^2 < \infty$, şi

> 1 pentru orice F care nu este normală.

Din nou, cînd g în (162) este luată ca densitatea normală adică folosim statisticile scoruri normale pentru TSRSO, (203) este mărginită inferior de 1, cînd marginea inferioară este atinsă dacă F este normală. Aceasta indică superioritatea asimptotică a TSRSO bazat pe statisticile scorurilor normale asupra teoriei normale a testului secvenţial al raportului de verosimilităţi cînd F nu este necesar normală.

Acum considerăm TSRP (Wald) cînd forma lui F este specificată. Fie

$$h(x) = -f'(x)/f(x), \quad -\infty < x < \infty,$$

şi presupunem că

i) $h(x)$ este de pătrat integrabilă (în raport cu măsura Lebesque) şi

ii) $h'(x)$ este uniform continuă în raport cu x $(-\infty < x < \infty)$

Atunci

$$I(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} [f'(x)/f(x)]^2 \, dF(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} h'(x) dF(x) < \infty. \tag{205}$$

TSRP este bazat pe variabila de stopare $N_\lambda(\Delta)$ definită ca cel mai mic întreg pozitiv (m) pentru care următoarea inegalitate este

$$b < \lambda_m < a \text{ unde } \lambda_m = \sum_1^m Z_i(\Delta) \tag{206}$$

$$Z_i(\Delta) = \ln \{f(X_i - \Delta)/f(X_i)\}, \qquad i \geqslant 1; \tag{207}$$

dacă pentru $N_\lambda(\Delta) = n$, λ_n este $\leqslant b$ (sau $\geqslant a$), acceptăm H_0 (sau H_1). Deoarece $Z_i(\Delta)$ sînt variabile aleatoare independente şi identic repartizate, şi după (207)

$$\begin{aligned} Z_i(\Delta) &= \ln \{f(X_i - \Delta/2 - \Delta/2)\} - \ln \{f(X_i - \Delta/2 + \Delta/2)\} = \\ &= h(X_i - \Delta/2) + \frac{1}{8}\Delta^2[h'(X_i - \Delta/2 - \gamma_1\Delta/2) - \\ &- h'(X_i - \Delta/2 + \gamma_2\Delta/2)] \end{aligned}$$

unde $0 < \gamma_1, \gamma_2 < 1$, din continuitatea uniformă a lui $h'(x)$, sub $\theta = \phi\Delta$ cînd $\Delta > 0$, avem

$$M_\phi Z_i(\Delta) = \Delta^2\left(\phi - \frac{1}{2}\right) I(f) + 0(\Delta^2) \quad \text{şi}$$

$$D_\phi^2 [Z_i(\Delta)] = \Delta^2 I(f) + 0(\Delta^2). \tag{208}$$

Scanned with OKEN Scanner

Deci, bazaţi pe aproximaţiile Wiener la $[\lambda_n - M\lambda_n,\ n \geqslant 1]$ (teorema 4.4 a lui Strassen (1967)) folosind rezultatele secţiunii 3 ale lui Dvoretzky, Kiefer, Wolfowitz (1953) urmează că funcţia C.O. a TSRP are aceeaşi formă limită (cînd $\Delta \to 0$) ca (175). După (208)

$$\lim_{\Delta \to 0} [\Delta^2 M_\phi\{N_\lambda(\Delta)\}] = \psi(\phi,\ [I(f)]^{-1}). \tag{209}$$

Prin urmare după teorema 23 şi (209), eficienţa asimptotică a TSRSO relativă la TSRP este

$$\begin{aligned} e(J, \lambda, \phi, F) &= \psi(\phi, [I(f)]^{-\frac{1}{2}})/\psi(\phi, \tau) = [I(f)\tau^2]^{-1} = \\ &= C^2(F)/[\nu^2 I(f)] = \rho^2 \\ &= \left(\int_0^1 J(u)\gamma(u)\,du\right)^2 \Big/ \left[\left(\int_0^1 J^2(u)\,du\right)\left(\int_0^1 \gamma^2(u)\,du\right)\right], \end{aligned} \tag{210}$$

unde $\gamma(u)$ este definită de (162) cu g înlocuit de f. Astfel, cînd $g = f$, adică $g = 1$, (210) este egal cu unu, astfel că dacă densitatea g în (162) are aceeaşi formă ca densitatea adevărată f, TSRSO bazat pe $N_J(\Delta)$ este asimptotic mai optim faţă de TSRP.

Scanned with OKEN Scanner

Capitolul XXVII

ESTIMARE SECVENȚIALĂ

§1. Formularea problemei estimării secvențiale prin intervale sau mulțimi

Natura generală a procedeului secvențial de estimare prin mulțimi poate fi descris după cum urmează :

Pentru orice întreg m pozitiv, considerăm mulțimea E_m a selecțiilor de volum m. Aceste mulțimi trebuie să satisfacă condițiile :

dacă selecția X_m aparține la E_m și dacă $X_{m'}(m' > m)$ aparține la $E_{m'}$, atunci X_m nu trebuie să fie egal cu selecția care constă în primele m observații din $X_{m'}$ (sau cu alte cuvinte proiecția lui $X_{m'}$ în R_m nu trebuie să fie X_m).

La orice punct de selecție X_m din E_m $(m = 1, 2, \ldots)$ asociem o submulțime $W(X_m)$ a spațiului parametrilor. Continuăm să facem observații asupra variabilei X pînă ce atingem o valoare n astfel încît X_n aparține la E_n. La această etapă oprim experimentul și stabilim că $W(X_n)$ conține punctul parametru adevărat, adică $W(X_n)$ este mulțimea de încredere rezultată din procedeul de estimare secvențial.

Astfel procedeul de estimare secvențială este determinat de mulțimile $E_1, E_2, \ldots$ și de funcția de mulțime $W(X)$ definită pentru toți X în $E_1, E_2 \ldots$ Alegerea mulțimilor $E_1, E_2, \ldots$ și a funcției $W(X)$ este o problemă importantă. Mai întîi impunem următoarele două condiții :

Condiția I. Mulțimea de încredere $W(X_n)$ ce a rezultat din estimația secvențială va satisface anumite cereri privind forma sa geometrică.

Condiția II. Mulțimea de încredere $W(X_n)$ va satisface inegalitatea

$$P(\theta \in W(X_n) | \theta) \geqslant 1 - \alpha.$$

Observație. Condiția I nu constituie o problemă statistică și forma geometrică a regiunii de încredere se va decide pe baza considerațiilor practice.

Dacă spațiul parametrilor este uni-dimensional, atunci putem cere ca $W(X_n)$ să fie un interval de lungime fixată $2d$, sau lungimea sa să fie funcție de mijlocul intervalului. Ultimul criteriu prezintă interes în estimarea mediei repartiției binomiale. Specificarea poate fi în termeni de volum sau diametru (egal cu cea mai mare distanță dintre punctele mulțimii) mulțimii.

În general, multe procedee secvențiale satisfac condițiile I și II. Criteriul pentru alegerea unuia dintre procedee va fi bazat pe valoarea

Scanned with OKEN Scanner

medie a numărului de observaţii cerut de procedeul de estimare. Problema găsirii unui procedeu de estimare optim (în sensul că el are cea mai mică valoare medie a volumului selecţiei) nu este rezolvată complet.

§ 2. Procedeul de estimare secvenţială a lui Wald

Fie $p_m(X_1, \ldots, X_m; \theta)$ densitatea de repartiţie comună a selecţiei de volum m. Pentru orice punct parametru θ, fie

$$p_m^*(X_1, \ldots, X_n; \theta)$$

o densitate arbitrară, însă dată, pentru $X_1, \ldots, X_m$. Atunci (Wald (1947)) probabilitatea ca

$$p_m^*(X_1, \ldots, X_m; \theta)/p_m(X_1, \ldots, X_m; \theta) < A \tag{1}$$

să aibă loc pentru toţi m este $\geqslant 1 - A^{-1}$ cînd θ este adevărată. Fie $W(X_n)$ mulţimea tuturor θ pentru care (1) este satisfăcută pentru toate valorile $m \leqslant n$. Dacă luăm $A = 1/\alpha$, atunci $W(X_n)$ va satisface condiţia II pentru fiecare n. Atunci procedeul de estimare este

Se continuă observaţiile atîta timp cît $W(X_n)$ nu satisface cerinţele condiţiei I. Oprim procesul în cel mai mic n pentru care $W(X_n)$ satisface condiţia I şi atunci stabilim că punctul parametru adevărat θ este inclus în $W(X_n)$. Această regulă de stopare asigură validitatea condiţiei I. Wald (1947) afirmă că dacă $p_m^*(X_1, \ldots, X_m; \theta)$ este ales astfel încît probabilitatea ca diametrul lui $W(X_n)$ să conveargă către 0 cînd $m \to \infty$ să fie unitatea şi condiţia I este astfel încît orice mulţime de diametri suficient de mici o satisface, probabilitatea ca procesul de estimare să se termine într-un număr finit de etape este unitatea.

Totuşi, nu există o teorie pentru a alege $p_m^*(X_1, \ldots, X_m; \theta)$ astfel încît volumul selecţiei este minimizat.

§ 3. Concepte generale de estimaţie secvenţială

Fie $X_1, X_2, \ldots$ un şir de variabile aleatoare independente avînd densitatea de repartiţie comună $f(x; \theta)$. Fie $r(\delta(x); \theta)$ pierderea suferită cînd decizia terminală este $\delta(x)$ şi valoarea adevărată a parametrului este θ. Vom adăuga la pierdere costul experimentării (să-l notăm prin $C(N)$), costul luării a N observaţii (N este o variabilă aleatoare). Scopul experimentatorului constă în alegerea regulii de stopare şi a deciziei terminale (estimarea pentru θ)

Trebuie să ţinem seama de

i) Un buget limitat (se impune o limită a valorii medii a costului total al observaţiilor). Supus la

$$M_\theta\{C(N)\} \leqslant n_0$$

trebuie să minimizăm $M_\theta\{r(\delta(X); \theta)\}$.

Scanned with OKEN Scanner

ii) O acurateţe specificată (margine a mediei pierderii datorită deciziilor terminale greşite). Trebuie să minimizăm $M_\theta\{C(N)\}$ cu condiţia

$$M_\theta\{r(\delta(X);\ \theta)\} \leqslant \rho.$$

iii) Faptul că amîndouă pierderile sînt importante din punct de vedere economic. Vom minimiza

$$M_\theta\{C(N) + r(\delta(X);\ \theta)\}.$$

Se pare că nu există un procedeu secvenţial care să satisfacă iii) uniform în θ dacă nu se modifică criteriul. O astfel de modificare poate fi dată de criteriul Bayes de optimalitate. Privind i), inegalitatea Rao-Cramer implică că un procedeu secvenţial optim este bazat pe o selecţie de volum n_0 fix. Dacă criteriul este iii), chiar în cazul repartiţiilor de tip exponenţial este justificat procedeul secvenţial. De Groot (1959) şi Wasan (1964) au arătat aceasta în cazul binomial.

§ 4. Inegalitatea Rao-Cramer

Presupunem că sîntem interesaţi în rezolvarea problemei i) din paragraful 3 şi că decizia terminală este estimaţia pentru θ; luăm

$$r[\delta(X);\ \theta] = [\delta(x) - \theta]^2.$$

În acest caz, putem să ne restrîngem la estimatorii nedeplasaţi pentru θ şi ne propunem să găsim margini inferioare pentru dispersia unor astfel de estimatori. Inegalitatea lui Rao-Cramer a fost extinsă în cazul secvenţial de Wolfowitz (1947 b).

LEMA 1. *Fie* $S_N = X_1 + \ldots + X_N$, *unde* $\{X_i\}$ *sînt variabile aleatoare independente şi identic repartizate.*

i) *Dacă* $M(N) < \infty$ *şi* $M(|X|) < \infty$, *avem* $M(S_N) = M(N)M(X)$ [Wald]

ii) *Dacă* $M(X)=0, M(X^2) <\infty$ *şi* $M(N) < \infty$, $M(S_N^2)=M(N)M(X^2)$

iii) *Dacă* $Mg(X) = Mh(X) = 0$, $M|g(X)h(X)| < \infty$ *şi* $MN^2 < \infty$, *atunci*

$$M\left\{\left[\sum_1^N g(X_i)\right]\left[\sum_1^N h(X_i)\right]\right\} = M(N)\,M[g(X)\,h(X)] \tag{2}$$

Demonstraţie. Pentru iii) avem:

$$M\left\{\left[\sum_1^N g(X_i)\right]\left[\sum_1^N h(X_i)\right]\right\} = M\left\{\left[\sum_1^\infty Y_i g(X_i)\right]\left[\sum_1^\infty Y_i h(X_i)\right]\right\} \tag{3}$$

Scanned with OKEN Scanner

unde

$$Y_i = \begin{cases} 1 & ,N \geqslant i \\ 0 & ,N < i \end{cases}$$

Membrul drept al relației (3) se scrie

$$M\left[\sum_1^\infty Y_i^2 g(X_i)\, h(X_i) + \sum_{i \neq j} Y_i\ Y_j\ g(X_i)\, h(X_j)\right] =$$

$$= M[g(X)h(X)] \sum_1^\infty M(Y_i) + 0 = M(N)M[g(X)h(X)].$$

Pentru a putea schimba media cu sumarea infinită, seria trebuie să fie absolut integrabilă. Adică

$$M|\, g(X)h(X)| < \infty \text{ și } \sum_{i \neq j} M(Y_i\ Y_j) < \infty =$$

$$= 2 \sum_{i=1}^\infty (j-1)\, P(N \geqslant j),$$

care implică $M(N^2)$. Aceasta completează demonstrația.

LEMA 2. (Wolfowitz (1947 b)). *Presupunem că* $\nu_i = M(X_i | N \geqslant i)$ *există pentru toți întregii pozitiv i pentru care* $P(N \geqslant i) \neq 0$ *Fie*

$$\nu_i' = M\ |X_i - \nu_i|\ |N \geqslant i),\ i = 1,\ 2,$$

și presupunem că seria

$$\sum_{i=1}^\infty \left(\sum_{j=1}^i \nu_j'\right) P(N = i)$$

converge. Atunci

$$M\left(S_n - \sum_{i=1}^N \nu_i\right) = 0. \tag{4}$$

Demonstrație. Avem :

$$M\left(S_n - \sum_1^N \nu_i\right) = M\left[\sum_{i=1}^\infty Y_i\,(X_i - \nu_i)\right].$$

Atunci

$$M\left(S_N - \sum_1^N \nu_i\right) = \sum_{i=1}^\infty M[Y_i(X_i - \nu_i)] =$$

$$= \sum_{i=1}^\infty M\{M[(X_i - \mu_i)|\ Y_i = 1]\} = 0.$$

Scanned with OKEN Scanner

Deoarece

$$\sum_{i=1}^{\infty} M[|\, Y_i\,(X_i - \nu_i)|] = \sum_{i=1}^{\infty} \nu_i'\, P\,(N \geqslant i) =$$

$$= \sum_{j=1}^{\infty} \left(\sum_{i=1}^{j} \nu_i' \right) P(N = j) < \infty,$$

este justificată schimbarea integrării cu sumarea infinită.

LEMA 3. (Wolfowitz (1947)) *Fie X_i variabile aleatoare independente avînd repartiții diferite. Dacă toți ν_i și ν_1' sînt egali, cu excepția acelor i pentru care $P(N \geqslant i) = 0$ și $M(N)$ există, atunci are loc* (4).

Observație. Lema 3 este un caz particular al lemei 2 și o generalizare a lemei 1 i). Dacă variabilele X_i sînt independente, atunci

$$\nu_i = MX_i \text{ și } \nu_i' = M|\, X_i - \nu_i|\,, \; i = 1, 2, \ldots$$

În spațiul de selecție secvențial, fie E_1 mulțimea valorilor lui X_1 pentru care oprim după ce am luat o observație. Fie E_i mulțimea valorilor lui $X_1, \ldots, X_i$ pentru care oprim după ce am luat i observații. $(x_1, \ldots, x_i) \in E_i$ implică că $(x_1, \ldots, x_j) \notin E_j$, $j = 1, \ldots, i-1$, $i = 1, 2, \ldots$
Sp ațiul total este

$$E_1 \cup E_2 \cup \ldots$$

și reamintim că N reprezintă numărul total de observații. Atunci dacă definim

$$g(x_1, \ldots, x_N) = g_i(x_1, \ldots, x_i)$$

oricare ar fi $(x_1, \ldots, x_i) \in E_i$ $(i = 1, 2, \ldots)$ avem

$$(5) \qquad M[g(X_1, \ldots, X_N)] = \sum_{i=1}^{\infty} \int_{E_i} g_i\,(x_1, \ldots, x_i) \prod_{j=1}^{i} f\,(x_j;\, \theta)\, dx_j\,.$$

Presupunem că $P_\theta \left(\bigcup_1^{\infty} E_i \right) = 1$.

TEOREMA 1. (Wolfowitz (1947b)). *Fie $T_N = \delta(X_1, \ldots, X_N)$ un estimator pentru θ, astfel încît*

$$M_\theta(T_N) = \theta + b(\theta).$$

Presupunem că este permisă derivarea sub suma și semnul integrală în $M_\theta(1) = 1$ și $M_\theta(T_N) = \theta + b(\theta)$ cînd $b'(\theta)$ există. Atunci

$$(6) \qquad \sigma^2_{T_N}(\theta) \geqslant \{M_\theta\,(N)\, M_\theta\,[\partial \ln f(X;\, \theta)/\partial\theta]^2\}^{-1}\,[1 + b'\,(\theta)]^2.$$

Demonstrație. Avem :

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\, M_\theta(1) = \sum_{j=1}^{\infty} \int_{E_i} \left[\sum_{i=1}^{j} \frac{\partial}{\partial\theta} \ln f(X_i;\, \theta) \right] \prod_{i=1}^{j} f(x_i;\theta)\, dx_i = 0.$$

Scanned with OKEN Scanner

Adică $M_\theta(S_N) = 0$, unde

$$S_N = \sum_{i=1}^{N} \partial \ln f(X_i\ ;\ \theta)/\partial\theta \tag{7}$$

cu condiţia ca

$$\int (\partial f/\partial\theta)\, dx = 0 \quad \text{şi} \quad M_\theta |\, \partial \ln f/\partial\theta)| < \infty.$$

Derivînd $M_\theta(T) = \theta + b(\theta)$ obţinem

$$M(T_N S_N) = 1 + b'(\theta) \leqslant \sigma_{T_N}(\theta)\ \sigma_{S_N}(\theta).$$

Din lema 1 ii) avem

$$\sigma^2_{S_N}(\theta) = M(N)\, M_\theta\, [\partial \ln f(X\ ;\ \theta)/\partial\theta]^2,$$

cu condiţia $M\,|\,\partial \ln f/\partial\theta\,|^2 < \infty$.

Observaţii. i) (Lehmann (1950)) Dacă ne restrîngem atenţia la procedeele secvenţiale pentru care $M_\theta(N) \leqslant n_0$ şi condiţiile de regularitate ale teoremei 1 au loc pentru astfel de estimatori, atunci pentru fiecare estimator nedeplasat T_N pentru θ, avem

$$\sigma^2_{T_N}(\theta) \geqslant \{n_0\, M_\theta\, [\partial \ln f(X\ ;\ \theta)/\partial\theta]^2\}^{-1}. \tag{8}$$

În cazul repartiţiei $N(\theta, 1)$, al repartiţiilor binomiale şi Poisson se poate stabili (8) pentru toate procedeele de estimare nedeplasate pentru care $M_\theta(N) \leqslant n_0$ cu condiţia că există un M astfel încît $P(N \leqslant M) = 1$. Din punct de vedere teoretic această restricţie adiţională de mărginire a procedeelor este de nedorit, însă din punct de vedere practic nu prezintă nici un neajuns deoarece M poate fi făcut foarte mare.

ii) Dacă T_N este un estimator nedeplasat pentru $h(\theta)$, atunci (Wolfowitz (1947 b))

$$D^2(T_N) \geqslant [h'(\theta)]^2 \Big/ \left\{ M(N) M \left[\frac{\partial}{\partial\theta} \ln f(X, \theta) \right]^2 \right\}. \tag{9}$$

Dacă $\theta = (\theta_1, \ldots, \theta_k)'$ şi dacă ne interesează să găsim un estimator nedeplasat pentru o singură componentă a lui θ, de exemplu θ_1, Wolfowitz a obţinut de asemenea

$$[D^2(T_{N,1})]^{-1} \leqslant M(N) M [\partial \ln f(X\ ;\ \theta)/\partial\ \theta_1]^2 \tag{10}$$

unde $T_{N,1}$ este estimatorul nedeplasat pentru θ_1.

Blackwell şi Girshich (1947) au arătat că marginea inferioară pentru dispersia unui estimator nedeplasat pentru θ (dată de (6)) este atinsă numai pentru procesul secvenţial pentru care $P(N = n) = 1$, dacă densitatea

Scanned with OKEN Scanner

variabilei X, $f(x, \theta)$ este astfel încît

$$M(X) = \theta$$

şi

$$X_1 + X_2 \ldots + X_m$$

este o statistică suficientă pentru toate valorile întregi ale lui m, pentru estimarea lui θ; $X_1, X_2, \ldots, X_m$ fiind o selecţie asupra variabilei X.

Seth (1949) a extins marginile lui Bhattacharya (1946) la cazul secvenţial care în anumite privinţe sînt mai generale decît acelea ale lui Wolfowitz (1947 b). În cele ce urmează dăm acest rezultat pentru estimatori nedeplasaţi pentru θ, pe baza unor observaţii independente şi identic repartizate.

TEOREMA 2. (Seth (1949)) *Fie* $T_N = T(X_1, \ldots, X_N)$ *un estimator nedeplasat pentru* θ *avînd dispersia finită. Dacă*

i) θ *variază într-un interval* I *deschis*

ii) *pentru toţi* θ *în* I *şi aproape pentru toţi* x *există*

$$\partial^i f(x\,;\,\theta)/\partial\theta^i \quad (i = 1, 2, \ldots, k)$$

iii) $M_\theta(1)$ *şi* $M_\theta(T_N)$ *sînt derivabile sub semnul integrală de cel puţin* k *ori, atunci*

$$D^2(T_N) \geqslant \lambda^{1,1} \tag{11}$$

unde

$$\lambda_{ij} = M(N)M\left[\frac{\partial^i \ln f(X\,;\theta)}{\partial\theta^i} \cdot \frac{\partial^j \ln f(X\,;\theta)}{\partial\theta^j}\right], \quad 1 \leqslant i,j \leqslant k \tag{12}$$

şi

$$((\lambda^{ij})) = ((\lambda_{ij}))^{-1} \tag{13}$$

COROLAR. *Dacă* $k = 1$, *teorema 2 se reduce la teorema 1.*

Seth (1949) a obţinut de asemenea condiţiile în care (11) se transformă în egalitate.

§5. Suficienţa şi completitudinea

Fie $X_1, X_2, \ldots$ o selecţie asupra unei variabile aleatoare X avînd densitatea de repartiţie $f(x\,;\,\theta)$. Dorim să găsim un estimator $\delta(X_1, \ldots, X_N)$ pentru θ. În acest paragraf vom presupune că regula de stopare este închisă (adică, pentru fiecare θ,

$$P(N \leqslant n) \to 1 \quad \text{cînd} \quad n \to \infty,$$

nu necesar uniform în θ). Această presupunere nu este de interes mare deoarece alegerea unei reguli de stopare bune va ajuta la obţinerea unui estimator bun. Deci metoda din acest paragraf nu poate fi folosită pentru

Scanned with OKEN Scanner

găsirea unor reguli de stopare optime, putînd fi utilizată inegalitatea Rao-Cramer. Totuşi situaţia considerată aici poate apărea, dacă regula de stopare a fost aleasă ca fiind optimă pentru verificarea ipotezelor privind θ şi folosită atunci pentru a decide asupra estimării lui θ.

Spaţiul de selecţie constă în

$$E_1 + E_2 + \ldots,$$

unde E_i este conţinut în R_i şi constă în aceste puncte $(X_1, \ldots, X_i)$ pentru care stopăm după ce am observat X_i. Fie N numărul aleator de observaţii luat. Vom presupune că

— probabilităţile condiţionate există ca măsuri,

— pentru fiecare n densitatea de repartiţie comună a variabilelor $X_1, \ldots, X_n$ admite o statistică suficientă; fie $T_n = T(X_1, \ldots, X_n)$ o astfel de statistică suficientă minimal pentru densitatea lui $X_1, \ldots, X_n$.

DEFINIŢIA 1. Şirul $(T_1, T_2, \ldots)$ poartă numele de şir suficient pentru modelul secvenţial.

TEOREMA 3. [Fay(Lehmann (1950))]. *Dacă pentru fiecare n, $T_n = T(X_1, \ldots, X_n)$ este o statistică suficientă pentru θ într-o selecţie $X_1, \ldots, X_n$ de volum fix, atunci (T_n, N) este o statistică suficientă pentru θ în cazul secvenţial.*

Demonstraţie. În presupunerea că regula de stopare depinde numai de T, această teoremă a fost demonstrată de Blackwell (1947). Se presupune că există probabilităţile condiţionate. Fie E orice mulţime măsurabilă în $\bigcup_1^\infty E_i$. Atunci

$$P(E \mid N = n, T_n = t) = P(E, N = n \mid T_n = t)/P(N = n \mid T_n = t) = \tag{14}$$
$$= P(E \cap E_n \mid T_n = t)/P(E_n \mid T_n = t).$$

$E \cap E_n$ şi E_n sînt mulţimi din R_n. Deoarece T_n este suficientă pentru θ pe baza selecţiei $X_1, \ldots, X_n$, atît numărătorul cît şi numitorul din (14) sînt independenţi de θ. Deci $P(E \mid N = n, T_n = t)$ este independentă de θ. Astfel (T_N, N) este, în cazul secvenţial, suficientă pentru θ.

Fie $\{T_N\}$ un şir de statistici suficiente pentru şirul de variabile aleatoare $X_1, X_2, \ldots$. Atunci T.S.R.P. la pasul n depinde numai de valoarea observată a statisticii T_n. Chiar în estimaţia secvenţială, este rezonabil să bazăm decizia pe T_n dacă experimentarea este stopată la pasul n. Atunci sîntem conduşi la

DEFINIŢIA 2. Şirul de statistici suficiente $\{T_N\}$ este un şir trasitiv dacă pentru fiecare $n > 0$ şi pentru fiecare $\theta \in \Theta$, repartiţia condiţionată a lui T_{n+1} dat $(X_1, \ldots, X_n) = (x_1, \ldots, x_n)$ este identică cu repartiţia condiţionată a lui T_{n+1} dat $T_n(X_1, \ldots, X_n) = t_n(x_1, \ldots, x_n)$.

Cu alte cuvinte, transitivitatea lui $\{T_N\}$ implică că toate informaţiile asupra lui T_{n+1} conţinute în $(X_n = X_1 \ldots, X_n)$ sînt furnizate de T_n.

Bahadur (1954) a arătat că în prezenţa şirului $\{T_n\}$ suficient şi transitiv, orice şir de procedee secvenţiale închise bazate pe $\{X_n\}$ pentru a lua decizia asupra lui θ este echivalent cu procedeul care la pasul n este bazat numai pe T_n.

Scanned with OKEN Scanner

$\{T_n\}$ este un şir transitiv pentru familia de variabile aleatoare independente şi identic repartizate dacă $T_{n+1}(X_{n+1}) = \psi(T_n(X_n), X_{n+1})$ pentru fiecare $n > 1$.

Familia exponenţială are această proprietate.

În continuare considerăm completitudinea lui (T_N, N). Presupunem că T_m este completă pentru fiecare m fixat.

DEFINIŢIA 3. Vom spune că familia repartiţiilor lui (T_N, N) este completă dacă

$$M_\theta[g(N, T_N)] \equiv 0 \Rightarrow g(n, T_n) = 0 \text{ a.p.t.}$$

DEFINIŢIA 4. Vom spune că familia repartiţiilor lui (T_N, N) este complet mărginită dacă pentru fiecare $g(n, t_n)$ mărginit,

$$M_\theta[g(N, T_N)] \equiv 0 \Rightarrow g(n, t_n) = 0 \text{ a.p.t.}$$

Lehmann şi Stein (1950) au găsit o condiţie necesară generală pentru completitudinea statisticii (N, T_N). Prezintă interes cercetarea regulilor de stopare pentru care $(N; T_N)$ este completă. Lehmann şi Stein (1950) au examinat această problemă cînd $X \sim N(0, \theta)$, Poisson sau $R(0, \theta)$. În cazul $N(0, 1)$, (N, T_N) este completă dacă $N = m$ $\left(\text{în acest caz } T_m = \sum_1^m X_i\right)$.

În cazul Poisson, $T_m = \sum_1^m X_i$. Fie S_m mulţimea valorilor lui T_m pentru care stopăm la observaţia m. Condiţia necesară şi suficientă pentru ca (N, T_N) să fie completă este că S_i să fie intervale disjuncte. De exemplu, dacă regula de stopare este: se continuă selecţia pînă cînd T_m depăşeşte c (o valoare dată), atunci (N, T_N) nu este completă. Se poate obţine o condiţie necesară şi suficientă în cazul rectangular (Lehmann, Stein (1950))

Exemplul 1. Fie

$$X_i : \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \theta & 1 - \theta \end{pmatrix}$$

Atunci $T_n = \sum_1^m X_i$ este o statistică suficientă pentru θ pe baza unei selecţii de volum fix. Presupunem că avem dată o regulă de stopare închisă care depinde numai de T_n. Pentru o regulă de stopare dată, fiecare din punctele (m, T_m) este de unul din tipurile

i) punct de stopare

ii) punct de continuare

iii) punct imposibil

Spaţiul de selecţie al punctelor (N, T_N) constă în toate punctele de stopare.

Punctul de continuare nu este o valoare posibilă a statisticii suficiente (N, T_N) deoarece avem o regulă de stopare închisă. Sîntem interesaţi să găsim un estimator nedeplasat pentru θ. X_1 este nedeplasat pentru θ.

Scanned with OKEN Scanner

Astfel aplicînd teorema Rao-Blackwell (teorema VIII.2) găsim că

$$Y = M(X_1 \mid N, T_N) = P(X_1 = 1 \mid N, T_N)$$

este nedeplasat pentru θ și că $D^2(Y) \leqslant D^2(X_1)$. Fiecare selecție $(X_1, \ldots, X_n)$ poate fi privită ca o traiectorie care pleacă din origine (0) și se sfîrșește în punctul de stopare (n, T_n). O traiectorie nu poate trece printr-un punct de stopare înainte să întîlnească (n, T_n). Probabilitatea unei traiectorii de la 0 pînă la (m, t) este

$$\theta^t (1 - \theta)^{m-t}.$$

Fie $\pi(m, t)$ numărul de traiectorii ce conduc la (m, t) și care pleacă din 0 și $\pi^*(m, t)$ numărul de traiectorii ce conduc la (m, t) și care pornesc din $0^* = (1, 1)$. Avem :

$$y(m, t) = P(X_1 = 1 \mid N = m, T_N = t) =$$

$$= \frac{P(X_1 = 1, (N, T_N) = (m, t))}{P((N, T_N) = (m, t))} = \frac{\theta^t (1 - \theta)^{m-t} \pi(m, t)}{\theta^t (1 - \theta)^{m-t} \pi^*(m, t)} = \frac{\pi(m, t)}{\pi^*(m, t)}.$$

Adică

$$Y = \pi^*(N, T_N)/\pi(N, T_N). \tag{15}$$

Considerăm unele reguli de stopare particulare.

i) Selecție de volum fix m. Atunci

$$\pi(m, t) = C_m^t, \quad \pi^*(m, t) = C_{m-1}^{t-1}$$

și în consecință $y = t/m$.

ii) Se continuă selecția pînă ce se obțin c succese și atunci se stopează Atunci.

$$\pi(m, c) = C_{m-1}^{c-1}, \quad \pi^*(m, c) = C_{m-2}^{c-2}$$

și $y = (c - 1)/(m - 1)$.

iii) Orice regulă de stopare cu $0^* = (1, 1)$ ca punct de stopare. Atunci

$$y(m, t) = \begin{cases} 1, & (m, t) = 0^* \\ 0, & \text{în rest} \end{cases}$$

și $Y = X_1$. Regula ii) cu $c = 1$ se reduce la regula iii).

ii) *Selecție întreruptă.* Un lot este acceptat dacă în selecția de volum s apar cel mult $c - 1$ defecte și lotul este respins dacă sînt observate cel puțin c defecte. Aici nu ne trebuie întreaga selecție de volum s. Putem stopa cînd s-au observat c piese defecte sau $s - c + 1$ piese corespunză-

Scanned with OKEN Scanner

toare. Chiar dacă se cunoaşte decizia finală (se respinge sau se acceptă lotul) înainte de a se cerceta întreaga selecţie, de obicei, se cercetează toate piesele. Motivul folosirii acestui procedeu este că o estimaţie nedeplasată pentru 0 nu este cunoscută cînd inspecţia este oprită, cînd se ia decizia. Girshick, Mosteller, Savage (1946) au obţinut cel mai bun estimator nedeplasat pentru 0. Aici

$$y(x, c) = C_{c-2+x}^{c-2} / C_{c+x-1}^{c-1} = \frac{c-1}{c+x-1},$$

unde x este numărul de piese corespunzătoare examinat, care este estimatorul nedeplasat unic în lungul dreptei orizontale ce corespunde la respingere cu $c > 1$ piese defecte. În continuare, singurul estimator nedeplasat în lungul dreptei ce corespunde la acceptare pentru $c > 1$ este

$$y(s - c + 1, m) = C_{s-c+m-1}^{s-c} / C_{s-c+m}^{s-r} = \frac{m}{s-c+m}.$$

Girshick, Mosteller, Savage (1946) au dat un exemplu de plan de selecţie dublu întrerupt. De asemenea, au dat condiţii necesare şi suficiente pentru existenţa estimaţiei nedeplasate unice pentru 0. Folosim următoarele notaţii :

Pentru fiecare punct (n, T_n), n este numit *indexul punctului*. *Indexul unei regiuni* este marginea superioară a indicilor punctelor posibile. *O regiune este finită* dacă există un m astfel încît indicii punctelor sînt mai mici decît m. În particular, regiunea care conţine un număr finit de puncte este finită.

O *regiune* este *închisă* dacă suma probabilităţilor punctelor de stopare din regiune este unu.

În particular o regiune finită este închisă.

Teorema 4. (Girshick, Mosteller, Savage (1946)). *Condiţia suficientă ca regiunea R să fie închisă este ca*

$$\lim_{n\to\infty} D(n)/n^{1/2} = 0,$$

unde $D(n)$ este numărul de puncte posibil de indice n.

Corolar. *Dacă numărul punctelor posibile ale regiunii R de indice n este mărginit, atunci regiunea este închisă.*

Definiţia 5. (Girshick, Mosteller, Savage (1946)). O regiune este simplă dacă toate punctele posibile între oricare două puncte posibile pe linia verticală în n sînt puncte posibile.

Cu alte cuvinte, toate punctele posibile de index n formează un interval.

Teorema 5. (Girshich, Mosteller, Savage (1946)) *Condiţia necesară şi suficientă ca estimaţia Y dată de (15) să fie unica esimaţie nedeplasată pentru 0 pentru o regiune finită închisă R este ca R să fie simplă.*

În cazul binomial, un plan de selecţie este *complet* (*complet mărginit*) dacă singurul estimator g, astfel încît

$$M_0(g) = 0$$

pentru toţi θ, este definit de $g(\gamma) = 0$ pentru toţi γ ce aparţin frontierii (totalitatea punctelor de stopare).

TEOREMA 6. (Wolfowitz (1946), Savage, L.J. (1947)). *Condiţia necesară şi suficientă pentru ca un plan de selecţie închis să fie complet mărginit este ca să fie simplu.*

TEOREMA 7. (Lehmann, Stein (1950)). *Condiţia necesară şi suficientă pentru ca un plan de selecţie închis să fie complet este ca el să fie simplu şi schimbarea oricărui punct de stopare la un punct de continuare să distrugă proprietatea de închidere.*

Knight (1965) a prezentat o teorie unificată a selecţiei inverse aplicate la repartiţiile : hipegeometrică, binomială şi Poisson. Extinde rezultatele lui Girshich, Mosteller, Savage (1946) la clasa mai generală de reguli de stopare numită monotonă. Obţine dispersiile estimatorilor parametrilor de interes.

De Groot (1959) a considerat o estimaţie pentru o funcţie $h(\theta)$ de θ. Din inegalitatea Rao-Cramer (9) avem

$$D^2(g) \geqslant \theta(1-\theta)\,[h'(\theta)]^2/M_\theta(N). \tag{16}$$

DEFINIŢIA 6. (De Groot (1959)). Un plan de selecţie S şi un estimator g sînt optimale în $\theta = \theta_0$, dacă printre procedeele cu valoarea medie a volumului selecţiei în θ_0 mai mică decît ale lui S, nu există un estimator nedeplasat cu dispersia mai mică în θ_0 decît a lui g.

Dacă un estimator particular pentru un plan de selecţie dat atinge marginea inferioară în (16), atunci tragem concluzia că estimatorul şi planul de selecţie sînt optimale în θ_0. Un astfel de estimator poartă numele de estimator eficient în θ_0. De Groot (1959) a arătat că planele de selecţie simple (fixate) şi planele de selecţie binomiale inverse sînt singurele care admit un estimator care este eficient în toate valorile lui θ. De Groot (1952) dă, pentru planul de selecţie invers, o expresie explicită pentru singurul estimator nedeplasat pentru $h(1-\theta)$. Punctele de stopare ale planului de stopare invers sînt

$$\{\gamma : T(\gamma) = c\}$$

unde T reprezintă numărul de defecte în punctul γ. Atunci, pentru fiecare întreg nenegativ k există un punct de stopare γ_k unic, astfel încît $N(\gamma_k) = c + k$. Deoarece

$$P(N = c + k) = C_{k+c-1}^{k}\,\theta^c q^k, q = 1 - \theta \tag{17}$$

atunci pentru orice estimator g

$$M(g) = \theta^c \sum_{k=0}^{\infty} g(\gamma_k)\, C_{k+c-1}^{k}\, q^k. \tag{18}$$

TEOREMA 8. (De Groot (1959)). *O funcţie $h(q)$ este estimabilă nedeplasat dacă şi numai dacă poate fi dezvoltată în serie Taylor în intervalul $|q| < 1$. Dacă $h(q)$ este estimabilă, atunci unicul estimator nedeplasat este*

Scanned with OKEN Scanner

dat de:

$$g(\gamma_k) = \frac{(c-1)!}{(k+c-1)!}\frac{d^k}{dq^k}\left[\frac{h(q)}{(1-q)^c}\right]_{q=0}, \quad k = 0,1,\ldots \tag{19}$$

Demonstrație. Deoarece $h(q)$ poate fi dezvoltată în serie în intervalul dat, atunci poate fi dezvoltată și $h(q)/(1-q)^c$ și invers. Atunci presupunem că:

$$h(q)/(1-q)^c = \sum_{k=0}^{\infty} b_k q^k.$$

Adică:

$$h(q) = \theta^c \sum b_k q^k$$

și

$$g(\gamma_k) = b_k / C_{k+c-1}^k$$

dă un estimator g cu $M(g) = h(q)$.

Acum presupunem că $h(q)$ este estimabilă nedeplasat. Atunci există un estimator g astfel încît

$$h(q) = \theta^c \sum_{k=0}^{\infty} g(\gamma_k) C_{k+c-1}^k \; q^k$$

sau

$$\frac{h(q)}{(1-q)^c} = \sum_{k=0}^{\infty} g(\gamma_k) C_{k+c-1}^k q^k.$$

Deci

$$C_{k+c-1}^k \; g(\gamma_k) = \frac{1}{k!}\frac{d^k}{dq^k}\left[\frac{h(q)}{(1-q)^c}\right]_{q=0}$$

Unicitatea lui $g(\gamma_k)$ urmează din unicitatea dezvoltării în serie Taylor care este baza completitudinii acestui plan de selecție.

Este adeseori posibil să găsim media unui estimator dat într-o formă închisă folosind faptul că dacă seria

$$\psi(x) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k \tag{20}$$

este derivabilă de m ori în intervalul său de convergență, atunci

$$\frac{\psi^{(m)}(x)}{m!} = \sum_{k=0}^{\infty} b_{m+k} C_{k+m}^k \; x^k. \tag{21}$$

Ca o ilustrare, se determină dispersia estimatorului nedeplasat pentru θ și funcția generatoare de momente a lui N.

Scanned with OKEN Scanner

TEOREMA 9. (De Groot (1959)). *Fie* $g(\gamma_k) = (c-1)/(k+c-1)$ *care este un estimator nedeplasat pentru* θ *pentru* $c \geqslant 2$. *Atunci avem*

$$M(g^2) = \frac{(c-1)\theta^c}{q^{c-1}}\left[(-1)^{c-1}(\ln\theta + \sum_{i=1}^{c-2}\frac{(-1)^{c-1}}{i}\left(\frac{q}{\theta}\right)^i\right], \tag{22}$$

unde $q = 1 - \theta$ *şi*

$$M(e^{tN}) = [\theta e^t/(1 - qe^t)]^c \tag{23}$$

Demonstraţie. Din (21)

$$M(g^2) = \theta^c\ (c-1)^2 \sum_{k=0}^{\infty}(k+c-1)^{-2}\ C_{k+c-1}^k\ q^k =$$

$$= \theta^c(c-1)^2\frac{1}{(c-1)!}\frac{d^{c-1}}{dq^{c-1}}\left[\sum_{k=1}^{\infty}k^{-2}q^k\right]. \tag{24}$$

Termenul constant din seria din membrul drept al relaţiei (24) este luat zero. Valoarea sa poate fi luată arbitrar deoarece nu apare în seria derivată. Totuşi

$$\frac{d}{dq}\left[\sum_1^{\infty}k^{-2}q^k\right] = \sum_1^{\infty}k^{-1}q^{k-1} = q^{-1}\sum_1^{\infty}k^{-1}\ q^k = [-\ln(1-q)]/q.$$

În consecinţă

$$\frac{d^{c-1}}{dq^{c-1}}\left[\sum_1^{\infty}k^{-2}q^k\right] = \frac{-d^{c-2}}{dq^{c-2}}\left[\frac{\ln(1-q)}{q}\right],$$

unde $\dfrac{d^m}{dq^m}\left[\dfrac{\ln(1-q)}{q}\right] = (-1)^m\ \dfrac{m!\ln(1-q)}{q^{m+1}} + m!\sum_{i=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{m-i+1}}{i(1-q)^{m-i+1}}.$

Cu aceasta (22) este demonstrată. Pentru $t < \ln(1/q)$,

$$M(e^{tN}) = p^c\sum_{k=0}^{\infty}e^{t(c+k)}\ C_{k+c-1}^k\ q^k = (pe^t)^c\sum_{k=0}^{\infty}C_{k+c-1}^k(qe^t)^k =$$

$$= (pe^t)^c\frac{1}{(c-1)!}\frac{d^{c-1}}{dx^{c-1}}\left[\sum_{k=0}^{\infty}x^k\right]_{x=qe^t} =$$

$$= (pe^t)^c\frac{1}{(c-1)!}\frac{d^{c-1}}{dx^{c-1}}[(1-x)^{-1}]_{x=qe^t} =$$

$$= (pe^t)^c\ (1-qe^t)^{-c},$$

ceea ce demonstre ază (23).

Scanned with OKEN Scanner

Observație. Haldane (1945) dă $M(g^2)$ în forma unei integrale care după integrări repetate dă (22).

COROLAR. $M(N) = c/\theta$ și $D^2(N) = c(1-\theta)/\theta^2$ *atinge marginea inferioară a inegalității Rao-Cramer* (5).

Astfel este un estimator eficient al valorii sale medii.

g nu este eficient în acest sens. Estimatorul nedeplasat eficient pentru N este

$$[c!/(k+c-1)!]\ (c-k+2)\ (c-k+3)\ \ldots(c+1).$$

TEOREMA 10. (De Groot (1959)). *Cînd punctele de stopare γ sînt astfel încît $N(\gamma) = n$, orice funcție care nu este constantă de forma $a + bT$ este un estimator eficient pentru $a + bn\ \theta$ și aceștia sînt singuri estimatori eficienți. Cînd γ este astfel încît $T(\gamma) = c$, orice funcție care nu este constantă de forma $a + bN$ este un estimator eficient pentru $a + bc(1/\theta)$, și aceștia sînt singuri estimatori eficienți, unde T este numărul de piese defecte.*

De Groot (1959) dă o nouă caracterizare a completitudinii pentru plane de selecție mărginite și arată că dimensiunea spațiului liniar de estimatori nedeplasați pentru zero poate fi determinată numărînd numărul punctelor de mărginire.

§6. Limite de încredere secvențiale pentru parametrii populației normale

6.1. Limitele de încredere secvențiale pentru media populației normale

1. *Limite de încredere secvențiale pentru media populației normale.*

Fie $X_1, X_2 \ldots$ variabile aleatoare independente identic repartizate ca și $X \sim N(\theta, \sigma^2)$.

LEMA 4. (Wald (1947)). *Fie $X_1, X_2, \ldots$ un șir de variabile aleatoare și $f_{0,n}(X_1, \ldots X_n)$ $[f_{1n}(X_1, \ldots, X_n)]$ densitatea de repartiție comună a variabilelor $X_1, \ldots, X_n$ dacă este adevărată ipoteza $H_0([H_1])$ pentru $n = 1, 2, \ldots$ De asemenea fie A o constantă mai mare ca unitatea. Atunci*

(25) $$P_{H_0}(f_{1,n}/f_{0,n} > A \text{ pentru cel puțin un } n,\ n = 1, 2, \ldots) \leqslant 1/A.$$

Demonstrație. Din inegalitățile lui Wald avem

$$A = \frac{1-\beta}{\alpha} \leqslant \frac{1}{\alpha}.$$

Deci

$$P_{H_0}(f_{1,n}/f_{0,n} > A \text{ pentru cel puțin un } n,\ n = 1, 2, \ldots) = \alpha \leqslant \frac{1}{A}$$

sau

$$P_{H_0}(f_{1,n}/f_{0,n} > \frac{1}{\alpha} \text{ pentru cel puțin un } n,\ n = 1, 2, \ldots) \leqslant$$

$$\leqslant P_{H_0}(f_{1,n}/f_{0,n} > A \text{ pentru cel puțin un } n,\ n = 1, 2, \ldots) = \alpha.$$

Aplicînd această lemă la $f_n(\theta)$, avem

$P(f_n(\theta + 2d)/f_n(\theta) > (1/\alpha)$ pentru cel puțin un $n,\ n = 1, 2, \ldots) \leqslant \alpha.$

Adică

(26) $P(\theta < \bar{X}_n - d - (\sigma^2 \ln(1/\alpha))/2\ dn$ pentru cel puțin un $n, n = 1, 2, \ldots) \leqslant \alpha,$

Scanned with OKEN Scanner

care este echivalentă cu

(27) $$P(\bar{X}_n - d - (\sigma^2 \ln(1/\alpha))/2dn \leqslant \theta < \infty \text{ pentru fiecare } n : n = 1, 2, \ldots) \geqslant 1 - \alpha,$$

unde d este o constantă pozitivă. Plecînd cu $f_n(\theta)/f_n(\theta - 2d)$, obținem

(28) $$P[-\infty < \theta < \bar{X}_n + d + (\sigma^2 \ln(1/\alpha))/2\, dn \text{ pentru fiecare } n,\ n = 1,2, \ldots] \geqslant 1 - \alpha.$$

Punînd

$$u_n(\alpha) = \min_{1 \leqslant r \leqslant n} [\bar{X}_r + d + (\sigma^2 \ln(1/\alpha))/2dr]$$

și

$$v_n(\alpha) = \max_{1 \leqslant r \leqslant n} [\bar{X}_r - d - (\sigma^2 \ln(1/\alpha))/2\ dr)]$$

din (27) și (28) urmează că

(29) $$P(v_n(\alpha/2) \leqslant \theta \leqslant u_n(\alpha/2) \text{ pentru fiecare } n,\ n = 1, 2, \ldots) \geqslant 1 - \alpha.$$

Cînd σ^2 este necunoscută, și s^2 este o estimație pentru σ^2, atunci $\nu s^2/\sigma^2 \sim \chi^2(\nu)$ și $\bar{X}_{n_0}$ este independentă de s^2 (teorema III. 5). Dacă luăm

$$a(\alpha) = [(1/\alpha)^{2/\nu} - 1)]\ (\nu/2)$$

atunci (Paulson (1963))

(30) $$P(\bar{X}_n - d - s^2 a(\alpha)/2dn \leqslant \theta < \infty \text{ pentru fiecare } n,\ n > n_0) \geqslant 1 - \alpha$$

și

(31) $$P(-\infty < \theta \leqslant \bar{X}_n + d + s^2 a(\alpha)/2dn \text{ pentru fiecare } n \geqslant n_0) \geqslant 1 - \alpha.$$

Dacă punem :

$$u'_n(\alpha) = \min_{n_0 \leqslant r \leqslant n} [\bar{X}_r + d + a(\alpha)s^2/2dr],$$

și

$$v'(\alpha) = \max_{n_0 \leqslant r \leqslant n} [\bar{X}_r - d - a(\alpha)s^2/2dr],$$

atunci

(32) $$P[v'(\alpha/2) \leqslant \theta \leqslant u'_n(\alpha/2) \text{ pentru fiecare } n,\ n \geqslant n_0] \geqslant 1 - \alpha.$$

6.2. Limite de încredere secvențiale pentru dispersie

Fie $\{X_r\}_{1 \leqslant r < \infty}$ un șir de variabile aleatoare independente identic repartizate ca $X \sim N(\theta, \sigma^2)$. Fie $s_n^2 = \sum_{r=1}^{n} (x_r - \bar{x}_n)^2/(n-1)$

Scanned with OKEN Scanner

şi

$$g_n(s_n^2;\ \sigma^2) = \frac{1}{(2\sigma^2)^{\frac{n-1}{2}}\ \Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}\ (s_n^2)^{(n-3)/2} \exp\ [-(n-1)s_n^2/2\sigma^2]$$

densitatea de repartiţie a variabilei s_n^2 şi $n^*(\alpha)$ cel mai mare întreg conţinut în $1 + \ln(1/\alpha)/\ln\lambda$, unde $\lambda > 1$. Atunci din lema 4 şi din transitivitatea şirului $\{s_n\}$ suficient invariant avem:

(33) $$P[g_n(s_n^2;\ \lambda^2\sigma^2)/g_n(s_n^2;\ \sigma^2) > 1/\alpha \text{ pentru cel puţin un } n,$$

$$n = 2,3, \ldots] \leqslant \alpha$$

sau

(34) $$P\{s_n^2(\lambda^2 - 1)/2\lambda^2\ [\ln\lambda + (\ln(1/\alpha))/(n-1)] < \sigma^2 < \infty$$

$$\text{pentru toţi } n, n = 2,3, \ldots\} \geqslant 1 - \alpha.$$

Asemănător avem

$$P\{g_n(s_n^2;\ \sigma^2)/g_n(s_n^2;\ \sigma^2/\lambda^2) < \alpha \text{ pentru cel puţin un } n,$$

(35) $$n = 2, 3, \ldots\} \leqslant \alpha,$$

sau

$$P\{0 < \sigma^2 \leqslant s_n^2(\lambda^2 - 1)/2[\ln\lambda - \ln(1/\alpha))/(n-1)] \text{ pentru toţi } n,$$

(36) $$n > n^*(\alpha)\} \geqslant 1 - \alpha.$$

Fie

$$u_{1n}(\alpha) = \begin{cases} \infty & , \ n \geqslant n^*(\alpha) \\ \min\limits_{n^*(\alpha) < r \leqslant n} \{s_r^2(\lambda^2 - 1)/2[\ln\lambda - \ln(1/\alpha))/(r-1)], & n > n^*(\alpha) \end{cases}$$

$$v_{1n}(\alpha) = \max_{1 < r \leqslant n} \{s_r^2(\lambda^2 - 1)/2\lambda^2[\ln\lambda + (\ln(1/\alpha)/(r-1)]\}.$$

Atunci din (34) şi (36) urmează că

(37) $$P[v_{1n}(\alpha/2) \leqslant \sigma^2 \leqslant u_{1n}(\alpha/2) \text{ pentru toţi } n, n = 2, 3, \ldots] \geqslant 1 - \alpha.$$

6.3. Limite de încredere secvenţiale pentru raportul dispersiilor

Fie $\{X_r\}$ şi $\{Y_r\}$ $(r = 1, 2, \ldots)$ două şiruri de variabile aleatoare independente repartizate normal de medii θ_1 şi θ_2 şi dispersii σ_1^2 şi respectiv σ_2^2. Fie $\rho^2 = \sigma_1^2/\sigma_2^2$,

$$T_n = \sum_{r=1}^{n} (X_r - \bar{X}_n)^2 \Big/ \sum_{r=1}^{n} (Y_r - \bar{Y}_n)^2$$

Scanned with OKEN Scanner

$n^*(\alpha)$ cel mai mare întreg conţinut în $1 + \ln(1/\alpha)/\ln \lambda$,

$$u(n, T_n, \alpha) = \lambda T_n[\lambda - \alpha^{1/(n-1)}]/[\lambda\alpha^{1/(n-1)} - 1],$$

$$v(n, T_n, \alpha) = T_n[\lambda - (1/\alpha)^{1/(n-1)}]/\lambda[\lambda(1/\alpha)^{1/(n-1)} - 1],$$

$$u_{2n}(\alpha) = \min_{n^*(\alpha)<r\leqslant n} [u(r, T_r, \alpha)],$$

$$v_{2n}(\alpha) = \max_{n^*(\alpha)<r\leqslant n} [v(r, T_r, \alpha)].$$

Fie

$$h_n(t; \rho^2) = \frac{\Gamma(n-1)}{[\Gamma((n-1)/2)]^2} \cdot \frac{t^{(n-3)/2}}{(1 + t/\rho^2)^{n-1}}$$

densitatea statisticii T_n. Din transitivitatea şirului $\{T_n\}$ suficient invariant (Cox (1952 a)) urmează că

$$P[h_n(T_n; \lambda^2\rho^2)/h_n(T_n; \rho^2) > 1/\alpha \text{ pentru cel puţin un } n, n = 2, 3, \ldots] \leqslant \alpha$$

unde $\lambda > 1$. Aceasta se reduce la

(38) $P[v(n, T_n, \alpha) \leqslant \rho^2 < \infty$ pentru toţi $n, n > n^*(\alpha)] \geqslant 1 - \alpha.$

Analog obţinem

$$P[h_n(T_n; \rho^2)/h_n(T_n; \rho^2/\lambda^2) < \alpha \text{ pentru cel puţin un } n,$$

$$n = 2, 3, \ldots] \leqslant \alpha,$$

care se reduce la

(39) $P[0 < \rho^2 \leqslant u(n, T_n, \alpha)$ pentru toţi n, $n > {}^*(a)] \geqslant 1 - \alpha.$

Din (38) şi (39) avem

(40) $P[v_{2n}(\alpha/2) \leqslant \rho^2 \leqslant u_{2n}(\alpha/2)$ pentru toţi n, $n > n^*(\alpha/2)] > 1 - \alpha.$

§ 7. Estimare prin selecţie dublă

Presupunem că sîntem interesaţi în problema estimării unui parametru θ necunoscut cu o acurateţe dată folosind un număr de observaţii cît mai mic posibil. Acurateţea va, fi în termeni de abateri standard adică estimaţia va avea dispersia $a(\theta)$, o funcţie dată de θ. O altă posibilitate este să estimăm θ printr-un interval de încredere de o formă predeterminată, de exemplu de o lungime dată. În general este imposibil să obţinem o estimaţie cu proprietăţile cerute pe baza unei selecţii de volum fix. Astfel sîntem conduşi la anumite forme de selecţie secvenţială. Obişnuit, este totuşi deosebit de dificil să construim o schemă de selecţie secvenţială care să conducă la o

Scanned with OKEN Scanner

estimaţie cu proprietăţile cerute; Anscombe (1949), (1952) a dat o teorie pentru selecţii de volum mare. Alt dezavantaj al procedeelor secvenţiale obişnuite este faptul că calculele se fac pas cu pas. Cox (1952 b) propune pentru această problemă o schemă de selecţie dublă. Ideea de bază constă în folosirea selecţiei preliminare pentru determinarea volumului total al selecţiei. Metoda lui Stein (1945) de construire a intervalului de încredere pentru media repartiţiei normale cu o lungime prestabilită şi un coeficient de încredere dat este un caz particular al teoriei cînd repartiţia este cunoscută exact. Metodele selecţiei duble ale lui Cox (1952 b) sînt diferite de acelea folosite în cercetarea industrială, în ultimul caz a doua selecţie, dacă este luată, este de volum fix. Teoria selecţiei duble dezvoltate de Cox (1952 b) este pentru selecţii de volum mare; totuşi în practică, dă aproximaţii bune chiar pentru selecţii de volum mic. În cele ce urmează prezentăm o estimaţie pentru θ cu deplasarea $0(n_0^{-2})$ şi dispersia $a(\theta)\,[1 + 0(n_0^{-2})]$ unde n_0 este volumul selecţiei preliminare şi $a(\theta)$ dispersia presupusă. De asemenea, pentru orice θ valoarea medie a volumului selecţiei pentru schema selecţiei duble va fi mai mare decît valoarea medie a volumului selecţiei corespunzător pentru cel mai bun procedeu secvenţial. Totuşi diferenţa este mică, cu excepţia cazului cînd volumele selecţiilor sînt mici.

Estimaţie cu dispersie dată. Un parametru necunoscut

Ne propunem să estimăm parametrul necunoscut θ cu dispersia egală cu o funcţie dată de θ. Aplicaţiile principale se referă la mediile repartiţiilor Poisson şi binomiale şi a mediei repartiţiei normale cînd dispersia repartiţiei este cunoscută. Cox (1952 b) dă o teorie în cazul selecţiilor de volum mare în care dispersia presupusă este mică. Considerăm şirul de probleme $\{S_\lambda\}$ unde S_λ reprezintă problema estimării lui θ cu dispersia $a(\theta)/\lambda$ şi parametrul index λ este făcut să tindă către infinit. Presupunem că în selecţiile de orice volum fix m se poate constitui o estimaţie T^m pentru θ astfel încît

i) $T^{(m)}$ este un estimator nedeplasat pentru θ cu dispersia $v(\theta)/m$;

ii) $\gamma_1(T^{(m)}) = \gamma_2(\theta)m^{-1/2}$ şi $\gamma_2(T^{(m)}) = 0(m^{-1})$ cînd m tinde către infinit;

iii) Asimptotic mediile şi abaterile standard pot fi obţinute pentru $a(T^{(m)})$, $v(T^{(m)})$ şi pentru combinaţii de aceste funcţii prin dezvoltări în serie.

Nu este nici o dificultate în a considera estimaţii care asimptotic să aibă excesul sau oblicitatea nenule. Acum dacă θ ar fi cunoscut, selecţia de volum $\lambda n(\theta) = \lambda v(\theta)/a(\theta)$ va da acurateţea cerută. Aceasta sugerează următoarea schemă de selecţie aproximativă: se ia o selecţie de volum $n_0\lambda$ şi fie T_1 o estimaţie a lui θ. Fie

$$n(T_1) = v(T_1)/a(T_1) \tag{41}$$

Luăm a doua selecţie de volum: $\max[0,(n(T_1) - n_0)\lambda]$ (Dacă $(n(T_1) - n_0)\lambda$ nu este un întreg, luăm întregul cel mai apropiat de el).

Fie T_2 estimaţia lui θ din a doua selecţie. Punem

$$T = \begin{cases} [n_0 T_1 + (n(T_1) - n_0(T_2)]/n(T_1), & n(T_1) \geqslant n_0 \\ T_1 \qquad\qquad\qquad\qquad\quad , & n(T_1) < n_0 \end{cases} \tag{42}$$

Scanned with OKEN Scanner

În particular dacă $T^{(m)}$ este media de selecţie, T este media selecţiei combinate. Vom spune că schema de selecţie de mai sus este bazată pe estimaţia $T^{(m)}$. Estimaţia T are proprietăţile cerute (pentru selecţii mari). Vom prezenta metoda pentru obţinerea aproximaţiilor apropiate de teoria exactă. Trebuie să arătăm că T are deplasarea $0(\lambda^{-1})$ şi dispersia $a(\theta)\lambda^{-1}[1 + 0(\lambda^{-1})]$. Considerăm

$$M(T) = (1 - \pi)\{n_0 M_1(T_1 m(T_1)) + M_1[(1 - n_0 m(T_1))T_2]\} + \\ + \pi M_2(T_1), \tag{43}$$

unde :

$$m(T_1) = 1/n(T_1) = a(T_1)/v(T_1) \\ \pi = P(n(T_1) < n_0) \text{ şi} \tag{44}$$

M_1, M_2 reprezintă mediile condiţionate dat că $n(T_1) \gtrless n_0$.

Din iii):

$$M[n(T_1)] \sim n(\theta) \text{ şi } D^2[n(T_1)] = 0(\lambda^{-1}).$$

Astfel dacă $n_0 < n(\theta)$ şi repartiţia lui $n(T_1)$ încetează să fie exponenţială în coada inferioară, $\pi = 0(\lambda^{-r})$ pentru toţi r. Dacă în plus, $m(T_1)$ se comportă bine în (43) poate fi neglijată posibilitatea ca $n(T_1) < n_0$. De acum înainte vom presupune că

iv) $n_0 < n(\theta)$ şi repartiţia lui $m(T_1)$ este astfel că evenimentul $n(T_1) < n_0$ poate fi ignorat.

Astfel vom scrie (43) ca

$$M(T) = n_0 M[T_1 m(T_1)] + M[(1 - n_0\ m(T_1))T_2].$$

Luînd medii repetate, al doilea termen este

$$M\{[1 - n_0 m(T_1)]M(T_2 | T_1)\}$$

şi deoarece a doua selecţie este independentă de prima

$$M(T_2 | T_1) = \theta.$$

Astfel

$$M(T) = n_0 M[T_1 m(T_1)] + \theta - n_0 \theta M[m(T_1)]. \tag{45}$$

Din iii)

$$M(T_1 m(T_1)) = \theta m(\theta) + 0(\lambda^{-1}) \quad \text{şi} \quad M(m(T_1)) = m(\theta) + 0(\lambda^{-1}).$$

Deci

$$M(T) = \theta + 0(\lambda^{-1}). \tag{46}$$

Analog,

$$D^2(T) = a(\theta)\lambda^{-1}\ [1 + 0(\lambda^{-1})]. \tag{47}$$

Cînd selecţia preliminară are volumul mare, din (46) şi (47) urmează că T are proprietăţile cerute. În cele ce urmează vom considera, pentru a obţine aproximaţii apropiate de teoria exactă, încă un pas.

Considerăm procedeul de selecţie definit anterior cu patru paşi cu $n(T_1)$ înlocuit de $\tilde{n}(T_1)$ definit de

$$\tilde{n}(T_1) = n(T_1)[1 + b(T_1)/\lambda], \tag{48}$$

Scanned with OKEN Scanner

unde $b(T_1)$ este o funcţie care trebuie să fie determinată. Ecuaţia (45) devine :

$$M(T) = n_0 M\{T_1 m(T_1)[1 - b(T_1)/\lambda]\} + \theta - \tag{49}$$

$$- n_0 M\{m(T_1)\,[1 - b(T_1)/\lambda]\} + 0(\lambda^{-2}).$$

Din iii)

$$M[T_1 m(T_1)] = \theta m(\theta) + \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\theta^2}\,[\theta m(\theta)]\frac{v(\theta)}{n_0\lambda} + 0(\lambda^{-2}),$$

şi se obţin formule analoge pentru celelalte valorii medii care apar în (49). După simplificări avem :

$$M(T) = \theta + m'(\theta)\, v(\theta)\, \lambda^{-1} + 0(\lambda^{-2}). \tag{50}$$

Fie

$$T' = \begin{cases} T - m'(T)\, v(T)\lambda^{-1}, & n_0 \leqslant \tilde{n}(T_1), \\ T_1 \qquad\qquad\quad , & n_0 > \tilde{n}(T_1). \end{cases} \tag{51}$$

Atunci (50) arată că T' are deplasarea $0(\lambda^{-2})$. Printr-un calcul analog

$$D^2(T') = a(\theta)\,\lambda^{-1} + \lambda^{-2}\,\{2m(\theta)\; m'(\theta)\; \gamma_1(\theta)v^{3/2}(\theta) +$$

$$+ [m'(\theta)v(\theta)]^2 + 2m(\theta)m''(\theta)v^2(\theta) + \tag{52}$$

$$+ v^2(\theta)\; m''(\theta)/2n_0 - a(\theta)b(\theta)\} + 0(\lambda^{-3}).$$

Cerem ca T' să aibă dispersia apropiată de $a(\theta)/\lambda$. Prin urmare alegem $b(\theta)$ astfel ca termenul al doilea din (52) să se anuleze. Adică luăm :

$$b(\theta) = n(\theta)\, v(\theta)[2m(\theta)\; m'(\theta)\; \gamma_1(\theta)v^{-1/2}(\theta) +$$

$$+ m'^2(\theta) + 2m(\theta)\; m''(\theta) + m''(\theta)/2\; n_0]. \tag{53}$$

Rezultatele anterioare sînt sintetizate în cele ce urmează :

(a) se ia o selecţie preliminară de volum $n_0\lambda$ şi fie T_1 estimaţia lui θ calculată cu această selecţie.

(b) Fie

$$\tilde{n}(T_1) = n(T_1)\; [1 + b(T_1)/\lambda],$$

unde $n(T_1)$ şi $b(T_1)$ sînt definite de (41) şi (53).

(c) se ia a doua selecţie de volum

$$\max[0,(\tilde{n}(T_1) - n_0)\lambda]$$

şi fie T_2 estimaţia lui θ calculată cu această selecţie

Scanned with OKEN Scanner

(d) Se definește T prin (42) și atunci T' de (51). Atunci în presupunerile (i) — (iv), T' are deplasarea $0(\lambda^{-2})$ și dispersia

$$a(\theta)\lambda^{-1}\,[1 + 0(\lambda^{-2})].$$

În orice aplicație particulară, avem o funcție de dispersie care trebuie să fie mică și o selecție preliminară particulară care trebuie să fie mare. Astfel fără a pierde din generalitate putem lua λ egal cu unitatea.

Exemplul 2. Estimarea mediei θ a repartiției normale cu eroarea standard $a^{1/2}$ dată. Acesta este cazul banal cînd dispersia repartiției normale este cunoscută și estimatorul este media de selecție. Avem

$$n(\theta) = \sigma^2 a^{-1} \text{ și } b(\theta) = 0.$$

Astfel, volumul total al selecției este constant. Procedeul este echivalent cu a lua o singură selecție de volum cel mai apropiat întreg de σ^2/a. Această soluție este optimală.

Exemplul 3. Estimarea mediei θ a repartiției normale cu eroarea standard $a^{1/2}$ fracționară. Dispersia repartiției este cunoscută. Avem:

$$a(\theta) = a\theta^2,\ n(\theta) = \sigma^2/(a\theta^2),\ \text{și}\ b(\theta) = 8a + \sigma^2/(n_0\theta^2).$$

Astfel volumul total al selecției este

$$\tilde{n}(T_1) = \sigma^2/(aT_1^2) + 8\sigma^2/T_1^2 + \sigma^4/(n_0 a T_1^4) \tag{54}$$

unde T_1 este media selecției preliminare.

Estimația finală este

$$T' = T(1 - 2a), \tag{55}$$

unde T este media selecției combinate.

Volumul selecției preliminare n_0 va fi ales cît mai mare posibil supus la $n_0 \ll \sigma^2/(a\theta^2)$, adică este de dorit să cunoaștem o limită superioară pentru $|\theta|$. Procedeul nu este valabil dacă θ este apropiat de zero deoarece funcția $m(\theta) = \sigma^2/(a\theta^2)$ are singularitate în $\theta = 0$. În practică dacă este probabil ca θ să fie egal sau apropiat de zero, $a(\theta)$ va fi modificat astfel încît $a(0)$ este finită.

Exemplul 4. Estimarea medie θ a repartiției binomiale cu abaterea standard $a^{1/2}$ fracționară dată. Dacă procedeul este bazat pe proporția defectelor din selecție, avem:

$$a(\theta) = a\theta^2,\ v(\theta) = \theta(1 - \theta),\ \gamma_1(\theta) = (1 - 2\theta)\ [\theta(1 - \theta)]^{-1/2}.$$

Volumul total al selecției este

$$\tilde{n}(T_1) = (1 - T_1)/(aT_1) + 3[T_1(1 - T_1)]^{-1} + (an_0T_1)^{-1} \tag{56}$$

și estimația finală este $T' = T - aT(1 - T)^{-1}$. Cerem ca $n_0 \ll (1 - \theta)/a\theta$. Procedeul nu este valabil dacă θ este foarte mic pentru același motiv

Scanned with OKEN Scanner

ca în exemplul 2. Ecuaţia (56) dă soluţia selecţiei duble corespunzătoare la selecţia binomială inversă a lui Haldane (1945).

Estimarea în prezenţa parametrilor nedoriţi

Presupunem că dispersia repartiţiei este necunoscută şi în plus la parametru θ necunoscut ce trebuie estimat cu dispersia $a(\theta)/\lambda$, există un parametru nedorit ψ necunoscut. Presupunem că în orice selecţie de volum fix m, putem găsi estimaţiile $T^{(m)}$ şi $C^{(m)}$ pentru θ şi ψ astfel încît :

(i) $T^{(m)}$ şi $C^{(m)}$ sînt estimaţii nedeplasate şi au dispersiile ψ/m şi $\tau\psi^2/m$, unde τ este asimptotic constantă ;

(ii) dacă m este mare, asimptotic mediile şi erorile standard pot fi dezvoltate prin dezvoltări în serie în $T^{(m)}$, $C^{(m)}$ şi $a(T^{(m)})$).

Următorul procedeu de selecţie poate fi justificat printr-un argument asemănător cu acela folosit în cazul unui singur parametru necunoscut. Se ia o selecţie preliminară de volum $n_0\lambda$ şi fie T_1, C_1 estimaţiile calculate cu ajutorul acesteia. Fie

$$\tilde{n}(T_1, C_1) = [C_1/a(T_1)]\,[1 + b(T_1, C_1)/\lambda], \tag{57}$$

unde

$$b(T_1, C_1) = 2a''(T_1) + \frac{[a'(T_1)]^2}{a(T_1)} + \frac{C_1 a''(T_1)}{2n_0 a(T_1)} + \frac{\tau}{n_0} : \tag{58}$$

Se ia o selecţie de volum

$$\max\,[0, (\tilde{n}(T_1, C_1) - n_0)\lambda]$$

şi fie T_2 estimaţia pentru θ rezultată din aceasta. Luăm

$$T = \begin{cases} T_1 & , \ n_0 > \tilde{n}(T_1, C_1), \\ [n_0 T_1 + (n(T_1, C_1) - n_0)T_2]/\,n(T_1, \ \ C_1), & n_0 \leqslant \tilde{n}(T_1, C_1) \end{cases} \tag{59}$$

şi

$$T' = \begin{cases} T_1 & , \quad n_0 > \tilde{n}(T_1, C_1), \\ T - a'(T)/\lambda, & n_0 \leqslant \tilde{n}(T_1, C_1). \end{cases} \tag{60}$$

Atunci presupunînd că posibilitatea $n_0 > \tilde{n}(T_1, C_1)$ poate fi ignorată, putem arăta că T' are deplasarea $0(\lambda^{-2})$ şi dispersia $a(\theta)\,\lambda^{-1}\,[1 + 0(\lambda^{-2})]$.

Exemplul 5. Estimarea mediei repartiţiei normale cu eroarea standard $a^{1/2}$ dată. Bazăm metoda pe media de selecţie. Atunci ψ este dispersia σ^2 necunoscută şi este estimat prin dispersia de selecţie, adică luăm $C_1 = s_1^2$. Atunci $\tau = 2$, $a(\theta) = a$ şi

$$\tilde{n}(T_1, C_1) = (C_1/a)\left(1 + \frac{2}{n_0}\right) = (s_1^2/a)\,(1 - 2/n_0) \tag{61}$$

şi estimaţia finală este media de selecţie totală T, care este un estimator nedeplasat. Valoarea medie a volumului selecţiei este $\sigma^2/(1 + 2/n_0)/a$. Astfel, efectul necunoaşterii lui σ este creşterea volumului selecţiei prin raportul $(1 + 2/n_0)$.

Scanned with OKEN Scanner

Exemplul 6. Estimarea diferenţei între mediile a două repartiţii normale cu eroarea standard $a^{1/2}$ dată.

Fie θ diferenţa între mediile a două repartiţii normale şi σ^2 suma dispersiilor repartiţiilor, dispersii presupuse egale. Dacă luăm C_1 suma estimaţiilor dispersiei, atunci se poate aplica (61). Mai întîi luăm o selecţie preliminară de volum n_0 din fiecare populaţie şi fie C_1 suma estimaţiilor dispersiei. Fie

$$\tilde{n}(T_1, C_1) = C_1(1 + 1/n_0)a, \tag{62}$$

şi luăm a doua selecţie de volum

$$\max[0, \tilde{n}(T_1, C_1) - n_0]$$

din fiecare populaţie. Estimaţia cerută este dată de diferenţa dintre mediile de selecţie totale. Dacă dispersiile repartiţiilor nu sînt egale, procedeul rămîne adevărat dacă factorul

$1 + 1/n_0$ din (62) este înlocuit prin $1 + 2(1 + r^2)(1 + r)^{-2}\ n_0^{-1}$,

unde $r = C_1^{(1)}/C_2^{(2)}$ este raportul dispersiilor de selecţie în selecţiile preliminarii.

Cu toate acestea, cînd dispersiile repartiţiilor nu sînt egale, valoarea medie a volumului selecţiei se reduce împărţind a doua selecţie între cele două populaţii într-un mod ce depinde de r^2.

În acelaşi mod pot fi tratate problemele mai complicate în care apar mai mulţi parametri necunoscuţi. O analiză mai generală cer problemele:

(i) estimarea diferenţei, sau raportului a două proporţii binomiale θ_1 şi θ_2 cu dispersia egală cu o funcţie de θ_1 şi θ_2;

(ii) estimarea diferenţei $\theta_1 - \theta_2$ dintre două medii ale unor repartiţii normale cu eroarea standard egală cu un procent din θ_1;

(iii) estimarea diferenţei dintre mediile a două repartiţii normale cu dispersiile repartiţiilor necunoscute cu subdiviziune optimă a observaţiilor între cele două populaţii.

Volumul mediu al selecţiei

Exceptînd cazul cînd volumul selecţiei preliminare este mic, cel mai bun procedeu de selecţie dublă are media volumului selecţiei numai puţin mai mare decît pentru cel mai bun procedeu secvenţial. Pentru uşurinţa scrierii, considerăm cazul unui singur parametru. Din (48) media volumului selecţiei este

$$M[\lambda n(T_1)] = \lambda n(\theta) + b(\theta)\, n(\theta) + v(\theta)\, n''(\theta)/(2n_0) + 0(1). \tag{63}$$

Prima aproximaţie a mediei volumului selecţiei este

$$\lambda n(\theta) = \lambda v(\theta)/a(\theta). \tag{64}$$

Urmează că schema va fi bazată pe estimaţia $T^{(m)}$ cu dispersia minimă. Acum (64) este volumul selecţiei de volum fix care dă o estimaţie cu dispersia dată. Cel puţin cînd $T^{(m)}$ este o statistică suficientă pentru θ, nici o

Scanned with OKEN Scanner

schemă secvenţială nu poate mai puţin ca $\lambda n(\theta)$ observaţii în medie. Formal aceasta poate fi dovedită după cum urmează:

Pentru orice procedeu de estimaţie secvenţial care dă o estimaţie nedeplasată θ^* pentru θ care se realizează cu densitatea $f(x;\theta)$, din formula (6) avem

$$D^2(\theta^*) \geqslant [M(N)M(\partial \ln f/\partial\theta)^2]^{-1} \tag{65}$$

unde N este timpul de stopare pentru procedeul de estimare. Acum pentru repartiţiile: normală, Poisson şi binomială, dispersia mediei de selecţie este

$$v(\theta)/m, \text{ unde } [v(\theta)]^{-1} = M(\partial \ln f/\partial\theta)^2.$$

Astfel, considerînd estimaţiile pentru care $D^2(\theta^*) \leqslant a(\theta)/\lambda$, pentru repartiţiile anterioare, avem

$$M(N) \geqslant \lambda v(\theta)/a(\theta) = \lambda n(\theta), \tag{66}$$

care, asimptotic, este satisfăcută pentru toate repartiţiile. Adică, media volumului selecţiei în cea mai bună schemă de selecţie dublă este (63) şi în cea mai bună schemă secvenţială satisface inegalitatea (66). Ecuaţia (65) depinde de presupunerea că $n_0 > \tilde{n}(T_1)$ poate fi ignorat. Dacă această presupunere nu este adevărată, media volumului selecţiei va creşte şi este probabil ca estimaţia rezultată T' să fie mai precisă decît cerem [adică că (deplasarea lui $T')^2 + D^2(T') \leqslant a(\theta)/\lambda$]. n_0 va fi ales cît mai mare posibil supus la condiţia ca $P(n_0 > \tilde{n}(T_1))$ este mică.

Intervale de încredere

Adeseori dorim să găsim un interval de încredere pentru θ la sfîrşitul unuia din procedeele de selecţie considerate anterior. În al doilea rînd, problema poate fi pusă în termeni de intervale de încredere, adică putem să estimăm pe θ printr-un interval de încredere de o formă predeterminată cu coeficientul de încredere γ. Ne vom ocupa de primul fel de probleme. Presupunem că am obţinut după prima selecţie o estimaţie T' destinată să aibă dispersia $a(\theta)/\lambda$. Dacă dorim un interval de încredere pentru θ, cu coeficientul de încredere $(1 - 2\alpha)$, atunci $(\underline{\theta}, \overline{\theta})$ unde

$$\underline{\theta} = T' - z_{1-\alpha}\, a^{1/2}(\underline{\theta})/\lambda^{1/2}, \quad \overline{\theta} = T' + z_{1-\alpha}\, a^{1/2}(\overline{\theta})/\lambda^{1/2}, \tag{67}$$

va fi intervalul de încredere dorit.

§ 8. Estimaţia secvenţială în cazul selecţiilor de volum mare

Anscombe (1949) dezvoltă teoria estimării secvenţiale pentru selecţii de volum mare, cînd acestea sînt efectuate asupra unei variabile a cărei repartiţie are un singur parametru necunoscut. De asemenea, folosind un argument euristic, Anscombe (1949) arată că estimarea valabilă pentru o selecţie de volum fix rămîne valabilă cînd volumul selecţiei a fost determinat printr-o regulă de stopare secvenţială. O altă demonstraţie a fost

Scanned with OKEN Scanner

dată de Cox (1952 c) care sugerează că formulele obținute în cazul selecțiilor de volum fix pot fi adevărate pentru selecții secvențiale cu condiția ca volumul selecției să fie mare. Anscombe (1952) introduce noțiunea de *uniform continuitate în probabilitate*. În cele ce urmează prezentăm rezultatele sale.

Vom considera variabile aleatoare care iau valorile $\pm\infty$ cu probabilități pozitive. Pentru variabila aleatoare X unidimensională, funcția de repartiție este

$$F(x) = P(X \leqslant x)$$

și se bucură de proprietățile
— este nedescrescătoare
— este continuă la dreapta și

$$\lim_{x\to-\infty} F(x) \geqslant 0, \quad \lim_{x\to\infty} F(x) \leqslant 1. \tag{68}$$

Dacă în (68) au loc egalitățile vom spune că X este o variabilă aleatoare proprie și $F(x)$ este o funcție de repartiție proprie. Fie $\{Y_n\}$ $1 \leqslant n < \infty$ un șir infinit de variabile aleatoare. Presupunem că există un număr real θ, un șir de numere pozitive $\{W_n\}$ și o funcție de repartiție $\mathfrak{F}(x)$ astfel încît sînt satisfăcute următoarele condiții :

(C1) *Convergența lui* $\{Y_n\}$. Pentru orice x astfel încît $\mathfrak{F}(x)$ este continuă ;

$$P(Y_n - \theta \leqslant xW_n) \to \mathfrak{F}(x) \quad \text{cînd } n \to \infty.$$

(C2) *Uniform continuitatea în probabilitate a șirului* $\{Y_n\}$. Dat orice ε mic și η există un ν mare și o constantă pozitivă c mică astfel încît, pentru orice $\eta > \nu$,

$$P(|Y_{n'} - Y_n| < \varepsilon W_n \text{ simultan pentru toți întregii } n' \text{ astfel încît } |n' - n| < c\,n) > 1 - \eta.$$

Cînd $n \to \infty$, $Y_n \to \theta$ în probabilitatea dacă $W_n \to 0$ și dacă $\mathfrak{F}(x)$ este o funcție de repartiție proprie. În multe aplicații, $\mathfrak{F}(x)$ va fi proprie și continuă și obișnuit va fi funcția de repartiție corespunzătoare unei variabile normale,

W_n este o măsură liniară de dispersia lui Y_n (de exemplu poate fi abaterea standard sau amplitudinea intercuartilică).

Termenul *uniform continuitate* este folosit pentru a descrie condiția (C2) deoarece este implicată continuitatea uniformă obișnuită. Dată orice realizare a șirului $\{Y_n\}$, considerăm funcțiile Y_n și W_n definit pentru valori n care nu sînt întregi prin interpolare liniară între valorile întregi adiacente. Atunci dacă $\ln W_n$ este uniform continuă în raport cu $\ln n$ pentru n mare, și dacă este satisfăcută (C1) cu $\mathfrak{F}(x)$ proprie atunci (C2) implică că, în sens probabilistic, uniform continuitatea lui $(Y_n - \theta)/W_n$ are loc în raport cu $\ln n$.

Teorema 11 (Anscombe (1952)) *Fie* $\{n_r\}$ *un șir crescător de întregi pozitivi care tinde către infinit și* $\{N_r\}$ *un șir de variabile aleatoare proprii care ia valori întregi pozitive astfel încît* $\{N_r/n_r\} \to 1$ *în probabilitate cînd* $r \to \infty$. *Atunci dacă șirul de variabile aleatoare* $\{Y_n\}$ *satisfac condițiile* (C1) *și* (C2).

Scanned with OKEN Scanner

(69) $$P\{Y_{N_r} - \theta \leqslant xW_{n_r}\} \to \mathcal{F}(x) \text{ cînd } r \to \infty.$$

Demonstrație (Cramer (1946)). Daţi ε şi η pozitivi, fie ν şi c satisfăcînd (62) şi fie ν de asemenea suficient de mare astfel încît pentru orice r pentru care $n_r > \nu$

(70) $$P(|N_r - n_r| < cn_r) > 1 - \eta.$$

Pentru r dat astfel încît $n_r > \nu$, fie E evenimentul

$$|N_r - n_r| < cn_r \text{ şi } |Y_{N_r} - Y_{n_r}| < \varepsilon W_{n_r}.$$

Atunci

(71) $$P(E) > 1 - 2\eta.$$

Într-adevăr dacă considerăm evenimentele

A : $|Y_{n'} - Y_n| < \varepsilon W_n$ simultan pentru toţi n' astfel încît

$$|n' - n| < cn,$$

B : $|N_r - n_r| \leqslant cn$,

avem :

$$P(E) \geqslant P(A \cap B) = P(A) - P(A \cap \bar{B}) \geqslant P(A) - P(\bar{B})$$

şi (71) urmează din (70) şi (C2). Considerînd evenimentul $Y_{N_r} - \theta \leqslant xW_{n_r}$ ca reuniunea evenimentelor incompatibile

i) $Y_{N_r} - \theta \leqslant xW_{n_r}$ şi E, ii) $Y_{N_r} - \theta \leqslant xW_{n_r}$ şi $\bar{E}$,

putem deduce din (71) că

$$P\{Y_{n_r} - \theta \leqslant (x - \varepsilon)W_{n_r}\} - 2\eta < P(Y_{N_r} - \theta \leqslant xW_{n_r}) < P\{Y_{n_r} - \theta \leqslant (x + \varepsilon)W_{n_r}\} + 2\eta.$$

Dacă x este punct de continuitate pentru $\mathcal{F}(x)$, din faptul că funcţiile de repartiţie sînt monotone şi aproape peste tot continue, urmează (69). Cu aceasta teorema este demonstrată.

Observaţie. Nu am presupus că N_r şi Y_r sînt independente.

Vom aplica acest rezultat la estimarea secvenţială a unui parametru necunoscut θ. În cele ce urmează,

$X_1, X_2, \ldots$ reprezintă şirul observaţiilor,

Y_n o estimaţie a lui θ calculată cu primele n observaţii şi

Z_n o estimaţie a dispersiei W_n a lui Y_n.

Pentru a estima θ cu o dispersie a mică, folosim regula de stopare secvenţială :

se consideră procesul de selecţie pînă cînd avem mai întîi $Z_n \leqslant a$ şi se calculează Y_n.

Pentru a arăta că Y_n astfel obţinut este o estimaţie pentru θ cu dispersia asimptotic egală cu a dacă a este mică, nu considerăm o singură regulă de stopare, ci un şir de reguli de stopare posibil astfel încît valorile lui a tind către zero. Situaţia poate fi definită în termeni puri probabilistici după cum urmează :

Fie $\{X_n\}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ un şir infinit de variabile aleatoare nu necesar independente. Pentru fiecare n, fie Y_n şi Z_n funcţii de $X_1, X_2, \ldots, X_n$.

Scanned with OKEN Scanner

Presupunem că $\{Y_n\}$ satisface (C1) și (C2). Fie $\{a_r\}$ $(r = 1, 2, \ldots)$ un șir descrescător de numere pozitive ce tind către zero. Fie $\{N_r\}$ șirul de variabile aleatoare definite de condiția :

N_r este cel mai mic întreg n astfel încît $Z_n \leqslant a_r$ și $\{n_r\}$ șirul de întregi definit de condiția

n_r este cel mai mic n astfel încît $W_r \leqslant a_r$.

Presupunem că sînt satisfăcute următoarele condiții :

(C3) *Convergența șirului* $\{W_n\}$. $\{W_n\}$ este descrescător, tinde către zero și $W_n/W_{n+1} \to 1$ cînd $n \to \infty$

(C4) *Convergența șirului* $\{N_r\}$. Pentru toți r, N_r este o variabilă proprie, și $N_r/n_r \to 1$ în probabilitate cînd $r \to \infty$.

Atunci avem următoarea teoremă :

TEOREMA 12 (Anscombe (1952)). *Dacă sînt satisfăcute condițiile* (C1) — (C4)
atunci

$$P(Y_{N_r} - \theta \leqslant x a_r) \to \mathfrak{F}(x) \quad \textit{cînd} \quad r \to \infty \tag{72}$$

în toate punctele de continuitate x ale funcției $\mathfrak{F}(x)$.

Demonstrație (C3) implică că $W_{n_r}/a_r \to 1$ cînd $r \to \infty$. (72) urmează din teorema 11.

Pentru a aplica această teoremă (C1) și (C2) vor fi obișnuit satisfăcute.

Următoarea teoremă arată că (C2) este satisfăcută pentru o clasă largă de statistici Y_n. (C4) este o condiție slabă și obișnuit este ușor să descoperim dacă sau nu este satisfăcută. Aceste condiții sînt suficiente pentru concluzia teoremei 12 însă nu sînt necesare.

Forme particulare pentru Y_n. Vom presupune că observațiile X_1, X_2, ... sînt independente și identic repartizate cu funcția de repartiție $F(x)$ și considerăm mai întîi statistica

$$Y_n = \sum_1^n X_i/n.$$

Vom vedea că dacă (C1) și (C3) sînt satisfăcute cu $\mathfrak{F}(x)$ funcția de repartiție a unei variabile aleatoare $\mathfrak{X}$ proprii (nu sigur egală cu o constantă), atunci (C2) este satisfăcută. Din (C1), $\mathfrak{X}$ are o repartiție stabilă (Lévy (1937)) cu funcția caracteristică

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp(itx)\, \mathrm{d}\mathfrak{F}(x) = \exp(c_0 |t|^\alpha + i c_1 t |t|^{\alpha-1}),$$

unde t, c_0, c_1, α sînt reale, $0 < \alpha \leqslant 2$, $c_0 > 0$, $|c_1| \leqslant c_0 |\operatorname{tg}(\pi\alpha/2)|$; $\mathfrak{F}(x)$ este continuă. Dacă $\alpha = 2$, $\mathfrak{X}$ este normală și

$$W_n n^{1/2} \to a \text{ limita pozitivă sau infinită cînd } n \to \infty. \tag{73}$$

Pentru $\alpha < 2$, repartiția variabilei X_n nu are momente absolute finite de ordin $> \alpha$ (Lévy 1937). Totuși, dacă momentul absolut de ordin

Scanned with OKEN Scanner

< 1 diverge, Y_n nu poate tinde, în probabilitate, cînd $n \to \infty$ (Cramér (1937), teorema 15) către o limită și (C3) implică că $Y_n \to \theta$ în probabilitate. Deci $\alpha \geqslant 1$ și astfel din Lévy (1937) pentru toți x finiți,

$$0 < \mathfrak{F}(x) < 1.$$

Dacă $\alpha > 1$, atunci $MX_n = 0$ și deci $M\mathfrak{X} = 0$. În toate aplicațiile practice $\mathfrak{F}(x)$ va fi normală, caz în care $0 < \mathfrak{F}(x) < 1$ pentru toți x finiți și în consecință (C3) poate fi omisă din presupunerea teoremei 13 care urmează.

Fie k marginea inferioară pentru $P(Y_n \geqslant \theta)$ și a lui $P(Y_n < \theta)$ pentru $n = 1, 2, \ldots$ Atunci k este pozitiv. Dacă $k = 0$, deoarece $0 < \mathfrak{F}(x) < 1$, urmează că această margine inferioară nu este o limită inferioară cînd $n \to \infty$ (trebuie să fie pozitivă) și prin urmare trebuie să fie atinsă pentru un $n = n_0$ finit. Atunci se poate obține, de asemenea, pentru toți întregii multiplu de n_0 și avem o contradicție.

Arătăm că, dat $\varepsilon > 0$, există un c pozitiv astfel că pentru n suficient de mare probabilitatea ca

$$|Y_{n'} - Y_n| > \varepsilon W_n \text{ pentru anumiți } n',\ n < n' < (1 + c)\, n.$$

Un argument similar se aplică la valorile lui n' unde $(1 - c)n < n' < n$, astfel încît (C2) este satisfăcută. Avem

$$Y'_n - Y_n = \frac{1}{n'} \sum_{i=n+1}^{n'} (X_i - \theta) - \frac{n' - n}{n'} (Y_n - \theta).$$

Dat Y_n, primul termen din membrul drept este o componentă aleatoare a lui $Y_{n'}$, în timp ce al doilea termen este nealeator. Pentru n suficient de mare, există un k astfel încît

$$|Y_n - \theta| < kW_n$$

cu probabilitate apropiată de unitate. Luăm $c < \varepsilon/2k$. Atunci cu probabilitate apropiată de unitate

$$(1 - n/n')|Y_n - \theta| < \varepsilon W_n/2.$$

Prin urmare probabilitatea ca (74) să aibă loc este mică dacă este mică probabilitatea ca

$$(75)\quad n^{-1} \left| \sum_{i=n+1}^{n'} (X_i - \theta) \right| > \varepsilon W_n/2 \text{ pentru anumiți } n',\ n < n' < (1 + c)n.$$

Dat că (75) are loc, și că în fapt

$$n^{-1} \sum_{i=n+1}^{n'} (X_i - \theta) > \varepsilon W_n/2,$$

probabilitatea ca

$$\sum_{i=n+1}^{(1+c)n} (X_i - \theta) \geqslant 0$$

Scanned with OKEN Scanner

şi prin urmare ca

$$n^{-1} \sum_{i=n+1}^{(1+c)n} (X_i - \theta) > \varepsilon W_n/2,$$

şi prin urmare ca

$$n^{-1} \left| \sum_{i=n+1}^{(1+c)n} (X_i - \theta) \right| > \varepsilon\, W_n/2 \tag{76}$$

este cel puţin k (definit anterior).

Se obţine acelaşi rezultat dacă are loc (75) cu

$$n^{-1} \sum_{i=n+1}^{n'} (X_i - \theta) < \varepsilon W_n/2.$$

Astfel dacă notăm prin p probabilitatea mulţimii (76), atunci

$$P(\text{ca(75) să aibă loc}) \leqslant p/k.$$

Acum p este probabilitatea ca $|Y_{cn} - \theta| > \varepsilon W_n/2c$. Din (73), cînd $n \to \infty$ cu c constant

$$W_n \geqslant W_{cn}\, c^{1/2}.$$

Prin urmare dacă luăm $c < (\varepsilon/2k)^2$, p este mică. Astfel am demonstrat următoarea teoremă:

TEOREMA 13 (Anscombe (1952)) *Dacă*

— $X_1, X_2, \ldots$ *sînt variabile aleatoare independente şi identic repartizate*

— $Y_n = n^{-1} \sum_{i=1}^{n} X_i$,

— (C1) *şi* (C2) *au loc şi*

— $\mathfrak{F}(x)$ *este proprie şi continuă,*

atunci este satisfăcută (C2).

De asemenea se poate arăta că (C2) este satisfăcută pentru o clasă mare de estimatori de verosimilitate maximă. Repartiţia lui X_n poate fi fie discretă, fie absolut continuă şi fie $F'(x) = f(x)$ o funcţie continuă de x şi de parametrul θ care trebuie să fie estimat şi poate de alţi parametrii $\theta_2, \theta_3, \ldots, \theta_s$ necunoscuţi. Scriem θ în loc de θ_1 şi presupunem că derivatele funcţiei $f(x)$ în raport cu θ_i satisfac anumite condiţii de regularitate şi matricea (I_{ij}), unde

$$I_{ij} = -M(\partial^2 \ln f(X_n)/\partial\theta_i\, \partial\theta_j)$$

este pozitiv definită.

Fie $((I_{ij}))^{-1} = ((\lambda_{ij}))$ şi variabilele aleatoare $X_n^{(i)}$ şi $Y_n^{(i)}$ definite de

$$X_n^{(i)} = \partial \ln f(X_n)/\partial\theta_i, \quad Y_n^{(i)} = n^{-1} \sum_{j=1}^{n} X_j^{(i)}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Atunci asimptotic, pentru valori mari ale lui n, estimaţia de verosimilitate maximă Y_n a lui θ_1 este echivalentă cu Y_n' definită de

$$Y_n' - \theta_1 = \sum_{i=1}^{s} \lambda_{1i} Y_n^{(i)}.$$

Cu alte cuvinte, pentru $\varepsilon > 0$ dat,

$$|[(Y_n - \theta_1)/(Y_n' - \theta_1)] - 1| < \varepsilon \tag{77}$$

este în apropierea lui 1, pentru n suficient de mare şi dacă arătînd aceasta folosim în loc de legea slabă a numerelor mari, legea tare a numerelor mari, atunci (77) are loc simultan pentru toţi n suficienţi de mari. Prin urmare dacă Y_n' satisfac (C2), (C2) va fi satisfăcută şi de Y_n. Deoarece $X_n^{(i)}$ are media 0 şi dispersia I_{ii}, după teorema 3, $Y_n^{(i)}$ satisface (C2) pentru fiecare i şi deci şi Y_n'[W_n este ales astfel ca $\mathcal{F}(x)$ să devină normală; putem lua $u_n = (\lambda_{11}/n)^{1/2}$, abaterea medie pătratică a lui Y_n']. Astfel sîntem conduşi la următoarea teoremă:

TEOREMA 14 (Anscombe (1952). *În condiţiile de regularitate cerute de metoda verosimilităţii maxime, estimaţia de verosimilitate maximă Y_n satisface* (C2).

Este posibil să lucrăm în acelaşi mod cu orice altă metodă de estimare. De exemplu, considerăm cuantila sau amplitudinea intercuartilică a observaţiilor. Fie

$$X_{1n} < X_{2n} < \ldots < X_{nn}$$

statisticile de ordine corespunzătoare variabilelor $X_1, X_2, \ldots, X_n$.

Fie X_{rn} cuantila de ordin p unde $r - 1 < np \leqslant r$, care va fi notată prin $X_{np,n}$.

Fie (p, q) amplitudinea intercuantilică a variabilelor $X_1, X_2, \ldots, X_n$ cu $0 < p < q < 1$, definită ca $X_{nq,n} - X_{np,n}$. Considerăm $Y_n = X_{np,n}$. Mai întîi fie X_1 repartizată uniform pe (0, 1). Asimptotic $X_{np,n}$ este echivalentă cu $n^{-1} \sum_1^n X_i'$, unde

$$X_i' = \begin{cases} 0, & X_i < p \\ 1, & X_i > p \end{cases}$$

Astfel, dacă $W_n \sim A/n^{1/2}$ $(A > 0)$, $(Y_n - p)/W_n$ este asimptotic normală şi după teorema 13, (C2) este satisfăcută. Aceste rezultate se extind la orice repartiţie absolut continuă a variabilei X_i dacă $F'(x)$ este continuă şi pozitivă în cuantila de ordin p, x_p a repartiţiei definite de $F(x_p) = p$. Mai general, nu trebuie să presupunem că $F(x)$ este absolut continuă peste tot, ci numai în vecinătatea lui x_p. $F(x)$ nu trebuie să fie proprie, însă x_p trebuie să fie finită. Dacă $Y_n = X_{nq,n} - X_{np,n}$, deoarece Y_n este asimptotic echivalentă cu

$$n^{-1} \sum_{i=1}^{n} X_i''$$

Scanned with OKEN Scanner

unde

$$X_i' = \begin{cases} 0, & X_i < p \text{ sau } X_i > q \\ -1, & p < X_i < q, \end{cases}$$

Y_n satisface din nou (C2). Vom presupune că x_p și x_q sînt distincte, ceea ce va fi sigur în cazul în care $F(x)$ este proprie și continuă deoarece $p \neq q$.

TEOREMA 15. (Anscombe (1952)) (C2) *este satisfăcută dacă*
— $X_1, X_2, \ldots$ *sînt independente și identic repartizate,*
— Y_n *este o cuantilă sau amplitudinea intercuantilică a variabilelor* $X_1, X_2, \ldots$;
(C1) *are loc cu*
— $\mathfrak{F}(x)$ *normală și*
— $F'(x)$ *a variabilei* X_n *este continuă și pozitivă în cuantilă (finită și distinctă) a repartiției.*

Un tip de statistică la care nu se aplică teorema 13, însă care satisface (C2) este dat de

$$\text{i) } Y_n = X_{n,n}; \quad \text{ii) } Y_n = X_{1n}; \quad \text{iii) } Y_n = X_{nn} - X_{1n}.$$

Presupunem că $F(x)$ este proprie. Probabilitatea ca $Y_{n'}$ să difere de Y_n pentru orice n', unde $n < n' < (1+c)n$, este mai mică decît c în cazurile i) și ii), și mai mică decît $2c$ în cazul iii) și prin urmare este mică dacă c este mic. Statistici de acest fel constau în una din cele trei tipuri menționate anterior multiplicată printr-un factor u_n ce nu depinde de n. În acest caz, dacă c este mic, probabilitatea ca

$$Y_{n'} - Y_n = (u_{n'}/u_n - 1)\, Y_n$$

este apropiată de 1 și aceasta trebuie să fie mică comparativ cu W_n, cu probabilitate mare, pentru n mare și $|n' - n| < cn$. Astfel se impune continuitatea lui u_n relativă la W_n.

TEOREMA 16. (Anscombe (1952)) (C2) *este satisfăcută dacă* $X_1, X_2, \ldots$ *au repartiții independente identice proprii și* Y_n *este un extrem sau amplitudinea variabilelor* $X_1, X_2, \ldots, X_n$ *multiplicată prin factorul* u_n *(nu necesar constant, însă satisfăcînd condiția anterioară).*

Exemplul 7. Presupunem că dorim să estimăm, cu o eroare standard a dată (mică), media θ a repartiției normale avînd dispersia σ^2 necunoscută. Dacă $X_1, X_2, \ldots$ sînt observațiile independente, considerăm ca estimație pentru θ statistica

$$Y_n = n^{-1} \sum_1^n X_i;$$

pentru n fixat această statistică are eroarea standard $W_n = \sigma/n^{1/2}$ estimată (pentru $n \geqslant 2$) de

$$Z_n = \left[(n(n-1))^{-1} \sum_1^n (X_i - Y_n)^2 \right]^{1/2}.$$

Sînt satisfăcute condițiile (C1) și (C3) și din teorema 13 și condiția (C2). Prin urmare dacă are loc (C3), teorema 12 implică că $(Y_N - \theta)/a$ este asimptotic $N(0, 1)$ dacă N este cel mai mic n pentru care

$$Z \leqslant a. \tag{78}$$

Scanned with OKEN Scanner

Acum (78) este echivalentă cu

$$(n-1)^{-1}\sum_{1}^{n}\xi_i^2 \leqslant na,$$

unde ξ_i sînt variabile aleatoare independente repartizate normal obţinute din variabilele X_i prin transformarea lui Helmert

$$\xi_i = \left(X_{i+1} - i^{-1}\sum_{j=1}^{i} X_j\right)[i/(i+1)]^{1/2}.$$

Din legea tare a numerelor mari, dat ε, $\eta > 0$, există un ν astfel încît

$$(79)\quad P\left(\left|(n-1)^{-1}\sum_{i=1}^{n-1}\xi_i^2 - \sigma^2\right| < \varepsilon \text{ pentru toţi } n > \nu\right) > 1-\eta.$$

Dacă a este mică probabilitatea ca (78) să nu fie satisfăcută, pentru orice n în domeniul $2 \leqslant n \leqslant \nu$, depăşeşte $1-\eta$, şi atunci dat că $N > \nu$, (79) implică ca probabilitatea ca

$$|N/(\sigma/a)^2 - 1)| < \varepsilon/\sigma^2$$

depăşeşte $1-\eta$. Deci (C4) are loc cînd $a \to 0$. Pentru a obţine o aproximare mai bună pentru situaţia asimptotică cînd a nu este mic, vom impune o limită inferioară valorii lui N şi nu se consideră (78) pînă ce limita nu a fost depăşită. De exemplu se poate specifica că $N \geqslant (\delta/a)^2$ unde δ este o cantitate pozitivă mai mică decît σ. Dacă $\delta < \sigma$ se aplică (C4) şi teorema 12.

Exemplul 8. Presupunem că $X_1, X_2, \ldots$ sînt variabile aleatoare independente repartizate uniform în intervalul $(0, \theta)$ şi că dorim să estimăm θ cu o eroare standard a dată mică. Putem să luăm

$$Y_n = [(n+1)/n]\max_{1\leqslant i\leqslant n} X_i,\ W_n = \theta/n,\ Z_n = Y_n/n.$$

Cînd $n \to \infty$

$$P(Y_n - \theta \leqslant xW_n) \to \mathcal{F}(x) = e^{x-1} \text{ (pentru } x \leqslant 1)$$

şi asimptotic W_n este abaterea standard a statisticii Y_n. După teorema 16 este satisfăcută (C2). Deci după teorema 12 volum selecţiei N cerut este cel mai mic n pentru care

$$\max_{1\leqslant i\leqslant n} X_i \leqslant [n^2/(n+1)]\,a.$$

Se aplică consideraţii similare privind (C4) ca în exemplul anterior.

Exemplul 9. Pentru a vedea ce se poate întîmpla dacă (C2) nu este satisfăcută, considerăm observaţiile independente $X_1, X_2, \ldots$ asupra unei repartiţii $N(\theta, \sigma^2)$ cu θ necunoscută şi σ^2 cunoscută şi folosim

$$(80)\quad Y_n = n^{-1/2}X_n + (1-n^{-1/2})(n-1)^{-1}\sum_{i=1}^{n-1} X_i.$$

Y_n este repartizată normal cu media θ și dispersia asimptotică $2\sigma^2/n$ (pentru valori mari ale lui n). Corelația dintre Y_n și Y_{n+1} tinde către $\frac{1}{2}$ și (C2) nu este satisfăcută. Presupunem că dorim să estimăm θ cu o eroare standard a dată (mică). Atunci luăm $N = 2\sigma^2/a$ o valoare fixată. Au loc concluziile teoremei 12. Acum presupunem că dorim să estimăm θ (pe care o presupunem pozitivă) cu coeficientul de variație a dat (mic). Coeficientul de variație al statisticii Y_n și o estimație convenabilă pentru el sînt

$$W_n = (\sigma/\theta)(2/n)^{1/2},\ Z_n = (\sigma/Y_n)(2/n)^{1/2}.$$

Dacă se aplică teorema 12, va fi indicată regula de stopare: N este cel mai mic n pentru care

$$nY_n^2 \geqslant 2\sigma^2/a^2. \tag{81}$$

Cînd $n = N$ al doilea termen din membrul drept al relației (80) este asimptotic normal cu media $\theta(1-N^{-1/2})$ însă, ca pentru primul, cînd $a \to 0$ probabilitatea ca $X_N > \theta + k\sigma$, unde k este orice număr pozitiv, tinde către 1. Deci $(Y_n - \theta)/a \to \infty$ în probabilitate și astfel nu avem repartiția limită $\mathcal{F}(x) = \Phi(x/\theta)$. (C4) este satisfăcută de regula definită în (81).

Astfel cînd (C2) nu este satisfăcută, poate avea loc concluzia teoremei (12) dacă N satisface o condiție mai puternică decît (C4), fiind constant. Însă pare verosimil ca (C2) să fie necesară dacă nu este impusă o condiție ca (C4) asupra lui N și în particular dacă repartițiile lui N și Y_N nu sînt presupuse independente.

§ 9. Teoria asimptotică a intervalelor de încredere secvențiale de lungime fixată pentru medie

Rezultatele pe care le vom prezenta în acest paragraf sînt bazate pe anumite teoreme de convergență și anume:

TEOREMA 17. *Fie $\{f_n\}$ un șir de funcții măsurabile în raport cu o măsură ν. Dacă $f_n \to f$ cînd $n \to \infty$ a.p.t. în măsură pe Ω și pentru fiecare n;*

$$|f_n| \leqslant g \text{ a.p.t. pe } \Omega, \text{ cu} \int_\Omega g\,d\nu < \infty, \text{ atunci}$$

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega f_n\,d\nu = \int_\Omega f\,d\nu = \int_\Omega \lim f_n\,d\nu. \tag{82}$$

TEOREMA 18. *Dacă $f_n \to f$ cînd $n \to \infty$ a.p.t. în măsură pe Ω și există o constantă E astfel încît pentru fiecare n, $|f_n| \leqslant E$ a.p.t. pe Ω, atunci este adevărată* (82).

TEOREMA 19. *Dacă $f_n \geqslant 0$ și $f_n \nearrow f$ a.p.t. pe Ω atunci* (82) *este adevărată din nou cu condiția ca $+\infty$ este o valoare pentru fiecare membru.*

Scanned with OKEN Scanner

TEOREMA 20. *Dacă* $f_n \geqslant 0$ a.p.t. *pe* Ω, *atunci*

$$\int_\Omega (\lim_{n\to\infty} \inf f_n)\, d\nu \leqslant \lim_{n\to\infty} \inf \int_\Omega f_n d\nu. \tag{83}$$

TEOREMA 21. (Chow, Robbins (1965)). *Fie* $\{Y_n\}_{1\leqslant n<\infty}$ *orice şir de variabile aleatoare astfel ca*

$$Y_n > 0 \text{ a.s.}, \lim_{n\to\infty} Y_n = 1 \text{ a.s.},$$

fie $f(n)$ *orice şir de constante astfel ca*

$$f(n) > 0, \lim_{n\to\infty} f(n) = \infty, \lim_{n\to\infty} f(n)/f(n-1) = 1,$$

şi pentru fiecare $t > 0$ *definim*

$$N = N(t) = \text{cel mai mic } k \geqslant 1 \text{ astfel încît } Y_k \leqslant f(k)/t. \tag{84}$$

Atunci N *este bine definit şi nedescrescător ca funcţie de* t,

$$\lim_{t\to\infty} N = \infty \text{ a.s.}, \lim_{t\to\infty} M(N) = \infty \tag{85}$$

şi

$$\lim_{t\to\infty} f(N)/t = 1 \text{ a.s.} \tag{86}$$

Demonstraţie. Deoarece pentru $N \geqslant 1$

$$Y_N < f(N)/t < [f(N)/f(N-1)]\, Y_{N-1},$$

prin trecere la limita pentru $t \to \infty$ urmează (86)

TEOREMA 22. (Chow, Robbins (1965)). *Dacă sînt satisfăcute propunerile teoremei* 21 *şi dacă* $M(\sup_n Y_n) < \infty$, *atunci*

$$\lim_{t\to\infty} Mf(N)/t = 1. \tag{87}$$

Demonstraţie. Fie $Z = \sup_n Y_n$: atunci $MZ < \infty$. Alegem m astfel încît

$$f(n)/f(n-1) \leqslant 2 (n > m).$$

Atunci pentru $N > m$

$$f(N)/t = [f(N)/f(N-1)]\, [f(N-1)/t] < 2Y_{N-1} < 2Z.$$

Deci, pentru toţi $t \geqslant 1$,

$$f(N)/t \leqslant 2Z + f(1) + \ldots + f(m). \tag{88}$$

Din (86), (88) şi din teorema 17, urmează (87).

Fie $X_1, X_2 \ldots$ un şir de observaţii independente asupra aceleiaşi variabile. Dorim să găsim un interval de încredere pentru media μ a varia-

Scanned with OKEN Scanner

bilei care să aibă o lungime $2d$ prestabilită şi un coeficient de încredere $1 - \alpha$ prestabilit. Dacă dispersia σ^2 a variabilei este cunoscută şi dacă d este mic în comparaţie cu σ^2, intervalul de încredere căutat este dat după cum urmează. Pentru orice $n > 1$ definim

$$I_n = [\bar{X}_n - d, \bar{X}_n + d].$$

Atunci pentru volumul selecţiei n determinat de

(89) $$n = \text{cel mai mic întreg} \geqslant (u^2_{1-\frac{\alpha}{2}}\ \sigma^2)/d^2,$$

$$P(\text{ca } I_n \text{ să acopere pe } \mu) = P(n^{1/2}|\bar{X}_n - \mu|/\sigma < dn^{1/2}/\sigma).$$

Deoarece (89) implică că

$$\lim_{d\to 0}(d^2 n)/(u^2_{1-\frac{\alpha}{2}}\ \sigma^2) = 1,$$

din teorema limită centrală urmează că

$$\lim_{d\to 0} P(\text{ca } I_n \text{ să acopere pe } \mu) = 1 - \alpha.$$

Ne vom ocupa de cazul în care repartiţia variabilei nu este cunoscută şi deci şi σ^2 este necunoscută, caz în care metoda bazată pe o selecţie de volum fix nu este posibilă. Fie

(90) $$V_n^2 = n^{-1} \sum_1^n (X_i - \bar{X}_n)^2 + n^{-1} (n \geqslant 1),$$

$\{u_n\}_{1\leqslant n<\infty}$ orice şir de constante pozitive astfel încît $\lim_{n\to\infty} u_n = u$ şi definim

(91) $$N = \text{cel mai mic } k \geqslant 1 \text{ astfel încît } V_k^2 \leqslant (d^2 k)/u_k^2.$$

Atunci are loc

TEOREMA 23. (Chow, Robbins (1965)) *În presupunerea că* $0 < \sigma^2 < \infty$ *avem*

(92) $$\lim_{d\to 0}(d^2 N)/(u^2\sigma^2) = 1. \text{ a.s.}$$

(93) $$\lim_{d\to 0} P(\text{ca } I_N \text{ să acopere pe } \mu) = 1 - \alpha$$

(94) $$\lim_{d\to 0}(d^2 M(N))/(u^2\sigma^2) = 1 \ (\textit{eficienţa asimptotică}).$$

Demonstraţie. În teorema 21 luăm

$$Y_n = V_n^2/\sigma^2 = (1/n\sigma^2)\left\{\sum_1^n (X_i - \bar{X}_n)^2 + 1\right\},$$

(95) $$f(n) = (nu^2)/u_n^2,\ z = (u^2\sigma^2)/d^2;$$

atunci (91) poate fi scris ca

$$N = N(t) = \text{cel mai mic } k \geqslant 1 \text{ astfel încît } Y_k \leqslant f(k)/t.$$

Scanned with OKEN Scanner

Din teorema 21

$$1 = \lim_{t\to 0} f(N)/t = \lim_{d\to 0} (d^2N)/(u^2\sigma^2) \text{ a.s.} \tag{96}$$

ceea ce demonstrează (92). Acum

$$P \text{ (ca } I_N \text{ să acopere pe } \mu) =$$
$$= P(|X_1 + \ldots + X_N - N\mu| / \sigma N^{1/2} < dN^{1/2}/\sigma).$$

După (96)
$dN^{1/2}/\sigma \to u$ şi $N/t \to 1$ în probabilitate cînd $t \to \infty$; din teorema 11 urmează că pentru $t \to \infty$,

$$(X_1 + \ldots + X_n - N\mu)/\sigma N^{1/2}$$

este o variabilă normală redusă. Deci

$$\lim_{t\to\infty} P(\text{ca } I_N \text{ să acopere pe } \mu) = 1 - \alpha$$

ceea ce dovedeşte (93). (94) este o consecinţă a teoremei 22 oricare ar fi repartiţia lui X_i astfel încît

$$M\left\{\sup_n \left(n^{-1}\sum_1^n (X_i - \bar{X}_n)^2\right)\right\} < \infty, \tag{97}$$

$$\lim_{t\to\infty} [Mf(N)/t] = 1, \tag{98}$$

şi din faptul că funcţia $f(n)$ definită de (95) este $n + 0(n)$ din (98) urmează că

$$1 = \lim_{t\to\infty} [M(N)/t] = \lim_{d\to 0} [(d^2M(N)/(u^2\sigma^2)].$$

Pentru a avea loc (97) este suficient că momentul de ordinul patru al variabilei X_i să fie finit; totuşi următoarea teoremă arată că (94) este adevărată fără o astfel de restricţie.

Teorema 24 (Chow, Robbins (1965)). *Dacă au loc condiţiile teoremei* 21, *dacă* $\lim_{n\to\infty} [f(n)/n] = 1$, *dacă pentru* N *definit de* (84)

$$M(N) < \infty \text{ (toţi } t > 0), \limsup_{t\to\infty} [M(NY_N)/M(N)] \leqslant 1 \tag{99}$$

şi dacă există un şir de constante $g(n)$ *astfel încît*

$$g(n) > 0, \lim_{n\to\infty} g(n) = 1, \; Y_n \geqslant g(n)\, Y_{n-1},$$

atunci

$$\lim_{t\to\infty} M(N)/t = 1. \tag{100}$$

Demonstraţie. Pentru orice $0 < \varepsilon < 1$, alegem m astfel încît $f(n-1) \geqslant (1-\varepsilon) f(n)$, $f(n-1) \geqslant (1-\varepsilon)n$ şi $g(n) \geqslant 1 - \varepsilon$ pentru $n \geqslant m$, şi

$$M(NY_n) \leqslant (1 + \varepsilon)M(N) \text{ pentru } t \geqslant m.$$

Urmează că pe mulţimea $A = \{N \geqslant m\}$

$$[(1-\varepsilon)^2/t]\, N^2 = (1-\varepsilon)N(1-\varepsilon)N/t \leqslant$$
$$\leqslant g(N)\, Nf(N-1)/t \leqslant g(N)\, NY_{N-1} \leqslant NY_N.$$

Deci

$$[(1-\varepsilon)^2/t]\left(\int_A N\right)^2 \leqslant [(1-\varepsilon)^2/t]\int_A N^2 \leqslant \int_A NY_N \leqslant M(NY_N),$$

$$[(1-\varepsilon)^2/t]\int_A N \leqslant M(NY_N)/\left(\int_A N\right),$$

$$[(1-\varepsilon)^2/t]\,(M(N)-m) \leqslant M(NY_N)\,/(M(N)-m).$$

Din (85) şi (99) urmează că

$$(1-\varepsilon)^2 \limsup_{t\to\infty} [M(N)/t] \leqslant \limsup_{t\to\infty} M(NY_N)/(M(N)) \leqslant 1,$$

astfel că

$$\limsup_{t\to\infty} \{M(N)/t\} \leqslant 1. \tag{101}$$

Fie $Y_n' = \min(1,\ Y_n)$. Atunci

$$0 \leqslant Y_n' \leqslant 1,\ Y_n' \leqslant Y_n,\ \lim_{n\to\infty} Y_n' = 1 \text{ a.s.}$$

Fie $N' = N'(t) =$ cel mai mic $k \geqslant 1$ astfel încît $Y_k' \leqslant f(k)/t$. Din teorema 22, deoarece $\sup_n(Y_n') \leqslant 1$,

$$1 = \lim_{t\to\infty} [Mf(N)]/t = \lim_{t\to\infty} (MN')/t.$$

Totuşi, deoarece $Y_n' \leqslant Y_n$, $N' \leqslant N$ şi deci $MN' \leqslant MN$. Astfel

$$\liminf_{t\to\infty} (M(N))/t \geqslant \liminf_{t\to\infty} (M(N'))/t = 1,$$

care cu (101) dovedeşte (100).

Pentru a demonstra (94), fixăm $t>0$, alegem m astfel încît $f(n)/t \geqslant 1$ $(n \geqslant m)$, alegem $\delta > 0$ astfel încît $(n-1)\,f(n-1) > \delta n^2 (n \geqslant 2)$ şi pentru orice $r \geqslant m$, fie $E^* = \min(N,\ r)$. După Wald

$$M\left(\sum_1^{E^*} (X_i-\mu)^2\right) = (M(E^*))\, M(X_i-\mu)^2 = \sigma^2(M(E^*)).$$

Deci, din definiţia lui Y_n din demonstraţia teoremei 23

$$M(E^*\, Y_{E^*}) = \sigma^{-2} M\left(\sum_1^{E^*} (X_i - \bar{X}_{E^*})^2 + 1\right) \leqslant$$

$$\leqslant \sigma^{-2} M\left(\sum_1^{E^*} (X_i-\mu)^2 + 1\right) = M(E^*) + \sigma^{-2}. \tag{102}$$

Scanned with OKEN Scanner

Punem $g(n) = (n-1)/n$, $(n \geqslant 2)$; atunci

$$Y_n \geqslant (1/n\sigma^2) \sum_1^{n-1} (X_i - \bar{X}_{n-1})^2 + (1/n\sigma^2) = [(n-1)/n]\, Y_{n-1} = g(n)\, Y_{n-1}.$$

Deci

$$M(E^* Y_{E^*}) \geqslant \int_{\{N>r\}} rY_r + \int_{\{N<r\}} NY_N \geqslant [rf(r)/t]\, P(N>r) + \int_{\{2<N<r\}} NY_N \geqslant$$

$$\geqslant r(N>r) + \int_{\{2<N<r\}} [Ng(N)f(N-1)]/t \geqslant rP(N>r) + (\delta/t) \int_{\{2<N<r\}} N^2.$$

În consecinţă după (102)

$$\int_{\{N<r\}} N \geqslant (\delta/t) \int_{\{2<N<r\}} N^2 - (1/\sigma^2) \geqslant (\delta/t) \left(\int_{\{2<N<r\}} N \right)^2 - \sigma^{-2}$$

şi făcînd $r \to \infty$ urmează că

$$M(N) = \lim_{r\to\infty} \int_{\{N<r\}} N < \infty$$

care este prima parte din (99). Din nou după teorema lui Wald,

$$M(NY_N) \leqslant M(N) + \sigma^{-2}.$$

Astfel după (85)

$$\limsup_{t\to\infty} [M(NY_N)]/(M(N)) \leqslant 1$$

care este a doua parte din (99). Astfel au loc condiţiile teoremei 24 şi deci

$$1 = \lim_{t\to\infty} M(N)/t = \lim_{d\to 0} (d^2 M(N))/(u^2\sigma^2) \leqslant 1,$$

care este (94).

Observaţie. i) Dacă variabilele X_i sînt continui, definiţia lui V_n^2 din (90) poate fi modificată la $V_n^2 = n^{-1} \sum_1^n (X_i - \bar{X}_n)^2$. Singurul scop al folosirii termenului n^{-1} este de a asigura că

$$Y_n = V_n/\sigma^2 > 0 \text{ a.s.},$$

fapt folosit în demonstraţia teoremei 21 pentru a garanta că $N \to \infty$ a.s. cînd $t \to \infty$. De asemenea, din demonstraţie, N din (91) poate fi definit ca cel mai mic întreg (sau cel mai mic întreg impar) $\geqslant n_0$ (orice întreg pozitiv fixat) astfel ca inegalitatea indicată are loc.

ii) Teorema 23 a fost de asemenea demonstrată de Stein (1949) cînd $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$.

Nádas (1969) a extins teorema 23 a lui Chow, Robbins (1965) pentru a se obţine o acurateţe prestabilită. Vom vorbi de *acurateţe absolută* cînd estimăm μ prin

$$I_n = \{\mu : |\bar{X}_n - \mu| \leqslant d\} \ (d > 0); \tag{103}$$

şi dacă $\mu \neq 0$, vorbim de *acurateţe proporţională* cînd estimăm μ prin

$$J_n = \{\mu : |\bar{X}_n - \mu| \leqslant p|\mu|\}, \ (0 < p < 1. \tag{104}$$

Fie ρ coeficientul de variaţie $\sigma/|\mu|$ şi definim

$$n(d) = \min_{n>1} \{n : \sigma^2 \leqslant n(d/a)^2\}, \tag{105}$$

$$m(p) = \min_{n>1}\{n : \rho^2 \leqslant n(p/a)^2\}, \tag{106}$$

unde am notat prin $a = u_{1-\frac{\alpha}{2}}$ (cuantila de ordin $1 - \frac{\alpha}{2}$ corespunzătoare unei variabile $N(0, 1)$. Atunci (105) şi (106) cresc nemărginit cînd argumentele tind către zero. Deci pentru argumente mici se pot atinge (cel puţin aproximativ) probabilitatea de acoperire $1 - \alpha$ cerută luînd o selecţie de volum $n \geqslant n(d)$ (pentru acurateţea absolută) sau $m(p)$ (pentru acurateţea proporţională).

Dacă, totuşi, σ^2 (sau ρ^2) este necunoscut, atunci (105) [sau (106)] nu este aplicabilă. Pe de altă parte, dacă luăm V_n^2 dat de (100), atunci regulile de stopare

$$N = \min_{n>1} \{n : V_n^2 \leqslant n(d/a)^2\} \tag{107}$$

şi

$$E = \min\{n : (V_n/\bar{X}_n)^2 \leqslant n(p/a)^2\} \tag{108}$$

sînt definite bine. Dacă ρ^2 este cunoscut (însă σ^2 nu) şi se cere acurateţea absolută sau dacă σ^2 este cunoscut (însă ρ^2 nu) în cazul proporţional, atunci avem

$$N^* = \min_{n>1} \{n : \bar{X}_n^2 + n^{-2} \leqslant n(d/\rho a)^2 \tag{109}$$

şi

$$E^* = \min_{n>1}\{n : \bar{X}_n^2 \geqslant n^{-1}(a\rho/p)^2\} \tag{110}$$

ca analoagele secvenţiale ale relaţiilor (105) şi (106). Fie K oricare dintre (107) — (110) şi k volum fix al selecţiei corespunzător la (105) sau (106) şi fie H_k intervalul estimator corespunzător la (103) sau (104). Atunci are loc.

TEOREMA 25. (Nádas (1969)) *Cu notaţiile anterioare avem*

(111) $\lim K/k = 1$. a.s.

(112) $\lim P(H_k$ să acopere pe $\mu) = 1 - \alpha$ (*consistenţa asimptotică*)

(113) $\lim M(K/k) = 1$ (*eficienţa asimptotică*)

cînd d sau p tind la zero

Scanned with OKEN Scanner

Observație. Chow, Robbins (1965) au demonstrat teorema 25 în cazul $K = N$ (teorema 23). Nádas (1969) a dat o margine superioară uniformă pentru $M(N) - n(d)$. De asemenea, a arătat că $M(E^*) - m(p)$ este mărginită superior. În presupunerea suplimentară că funcția de repartiție a variabilei X_1 este continuă cu momentul de ordinul patru finit, a arătat că $M(E) - m(p)$ este de asemenea mărginită superior. Nu se cunosc condiții generale rezonabile asupra lui F care să asigure că $M(K) - k$ este mărginită inferior.

Demonstrație. Pentru fiecare definiție (107) — (110) a lui K, (111) și (112) urmează din teorema 21. Din (111) și din teorema 20 avem

$$\liminf (M(K)/k) \geqslant 1. \tag{114}$$

Pentru a arăta că

$$\limsup (M(K)/k) \leqslant 1 \tag{115}$$

și pentru a găsi margini superioare considerăm separat cazurile

Cazul $K = N$. Fie $t = (a\sigma/d)^2$ și pentru $n = 1, 2, \ldots$, fie

$$\sigma^2 S_n = 1 + \sum_{k=1}^{n} (X_k - \mu)^2. \tag{116}$$

Definim

$$N(t) = \min_{n>1} \{n : S_n \leqslant n^2/t\}$$

Atunci $N(t)$ este bine definit, este $\geqslant N$ și se arată [trunchind $N(t)$] că

$$M[N(t)] < \infty.$$

Din teorema sumelor cumulate (Wald (1947))

$$\sigma^{-2} + M(N(t)) = M(S_{N(t)}) \geqslant$$

$$\geqslant \int_{\{N(t)=1\}} S_1 + \int_{\{N(t)>1\}} S_{N(t)-1} \geqslant t^{-1} \int_{\{N(t)>1\}} (N(t)-1)^2 = t^{-1} M\{(N(t)-1)^2\} \geqslant t^{-1} M^2(N-1). \tag{117}$$

Astfel

$$M(N(t)) \in \{x : x^2 - (t+2)x + (1 - t\sigma^{-2}) \leqslant 0\}. \tag{118}$$

Deci, pentru toți $t > 0$ avem

$$M(N(t)) - t \leqslant 2 + \sigma^{-2}.$$

Dacă F este continuă, atunci termenul n^{-1} din definiția lui V_n^2 poate fi omis și în același mod obținem că pentru toți $t > 0$ și toți $\sigma > 0$

$$M(N(t)) - t \leqslant 2. \tag{119}$$

Cazul $K = N^*$ *și* $K = E^*$. În acest caz (115) este o consecință a teoremei.

Teorema 26 (Nádas (1969)) *Fie* $Z_1, Z_2, \ldots$ *variabile aleatoare independente identic repartizate astfel încît* $0 < M(Z_1) < \infty$. *Fie* $S_n (n = 1, 2, \ldots$ *suma cumulată. Fie* c *un număr pozitiv*

Scanned with OKEN Scanner

i) *Presupunem că* $Z_1 \geqslant 0$ a.s. *Fie* $\gamma > 0$ *şi* $t = (M(Z_1)/c).^{1/\gamma}$ *Definim*

$$T = \min_{n \geqslant 1}\{n : S_n \leqslant cn^{1+\gamma}\}. \tag{120}$$

Atunci T *este bine definită,* $M(T^{1+\gamma}) < \infty$ *şi familia* $\{T/t : 0 < c < 1\}$ *este integrabilă uniform.*

ii) *Fie* $0 < \gamma < 1$ *şi* $t = (c/M(Z_1))^{1/(1-\gamma)}$. *Definim*

$$T = \min_{n \geqslant 1}\{n : |S_n| \geqslant cn^{\gamma}\}. \tag{121}$$

Atunci T *este bine definită,* $M(T) < \infty$ *şi* $\lim_{c \to \infty} (M(T)/t) = 1$.

Demonstraţie. Teorema poate fi demonstrată prin trunchierea regulei de stopare T (la T') şi a variabilei Z_n în fiecare din cazurile i), ii) şi aproximînd rădăcinile polinomului cu variabila $M(T')$. Teorema este legată de un rezultat obţinut de Chow (1966 a) şi generalizat de Siegmund (1967).

În cazul $K = N^*$, (115) se stabileşte folosind i) pentru a dovedi integrabilitatea uniformă a familiei

$$\{N^*/n(d) : 0 < d < 1\}.$$

În cazul $K = E^*$, (115) urmează printr-o schimbare de notaţii în ii). Mărginirea lui $M(E^*) - m(p)$ poate fi arătată prin metoda folosită cînd $K = E$. În presupunerea că X_n sînt pozitive, acelaşi lucru este adevărat şi pentru $M(N^*) - n(d)$.

Cazul $K = E$. Fără a pierde din generalitate presupunem că $\mu > 0$. Fie $t = (a\rho/p)^2$ şi pentru $n = 1, 2, \ldots$ punem

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} X_i \text{ şi } Q_n = 1 + \sum_{k=1}^{n} (X_i - \mu)^2. \tag{122}$$

Variabila aleatoare

$$E(t) = \min_{n \geqslant 1} \{n : S_n \geqslant \rho^{-1}(tQ_n)^{1/2}\} \tag{123}$$

este bine definită şi $\geqslant E$. Pentru $r = 1, 2, \ldots$ definim

$$R = \min(E(t), r) \text{ şi } B = (1 < E(t) \leqslant r).$$

Aplicăm teorema lui Wald la S_R, Q_{R-1} şi $X_1^2 + \ldots + X_R^2$; obţinem

$$\mu(M(R)) = M(S_R) = \int_{\{R=1\}} X_1 + \int_B S_{R-1} + \int_{\{E(t)>r\}} S_r + \int_B X_r \leqslant$$

$$\leqslant M|X_1| + \rho^{-1} \int_B (tQ_{R-1})^{1/2} + M^{1/2}\left(\sum_{k=1}^{R} X_k^2\right) \leqslant$$

$$\leqslant (\sigma^2 + \mu^2)^{1/2} + \rho^{-1}(t + t\sigma^2 M(R))^{1/2} + (\sigma^2 + \mu^2)^{1/2} M^{1/2}(R) \leqslant$$

$$\leqslant (\sigma^2 + \mu^2)^{1/2} + \rho^{-1}t^{1/2} + [\mu t^{1/2} + (\sigma^2 + \mu^2)^{1/2}]\, M^{1/2}(R),$$

Scanned with OKEN Scanner

deoarece pentru $a,\ b>0,\ (a+b)^{1/2} \leqslant a^{1/2}+b^{1/2}$. Astfel

$$M^{1/2}(R) \in \{x : x^2 - [t^{1/2} + (\rho^2+1)^{1/2}]\, x - \\ - [\sigma^{-1}t^{1/2} + (\rho^2+1)^{1/2}] \leqslant 0\}. \tag{124}$$

În consecinţă

$$M(R) \leqslant \{t^{1/2} + 0(t^{1/2})\}^2. \tag{125}$$

Din convergenţa monotonă a.s. a $R \uparrow E(t)$ cînd $r \to \infty$ urmează că $M(E(t)) < \infty$ şi că (125) are loc cu R înlocuit cu $E(t)$. Deci

$$\limsup_{t\to\infty} M(E(t)) \leqslant 1. \tag{126}$$

Pentru a arăta că $M(E) - m(p)$ este mărginită superior, presupunem că $M(X_1^4) < \infty$ şi că F este continuă, astfel încît termenul constant 1 în definiţia lui nV_n^2 şi Q_n poate fi omis. Considerăm dreapta

$$L(x;\ t) = \mu(x+t)/2,\ x>0,\ t>0 \tag{127}$$

care este tangentă la curba $\mu(tx)^{1/2}$, în planul x, y, în punctul de intersecţie al curbei cu dreapta μx. Atunci

$$E(t) = \min_{n\geqslant 1}\{n : S_n \geqslant \mu(tQ_n\sigma^{-2})^{1/2}\} \leqslant \min_{n\geqslant 1}\{n : S_n \geqslant L(Q_n\sigma^{-2};\ t)\} =$$

$$= \min_{n\geqslant 1}\left\{n : \sum_{k=1}^{n} Z_k \geqslant t\right\},$$

unde

$$\mu Z_k = 2X_k - \mu(X_k-\mu)^2/\sigma^2 \quad k = 1,\ 2,\ \ldots \tag{128}$$

Fie ψ_A indicatorul mulţimii A. Dacă notăm prin

$$U(t) = M\sum_{n=0}^{\infty}\psi\left(\sum_{k=1}^{\infty} Z_k < t\right) \tag{129}$$

măsura reînoirii trecerii ($M(Z_1)>0$) rătăcirii aleatoare $\sum_{k=1}^{n} Z_k$, atunci urmează (Feller (1970)) că

$$\limsup_{t\to\infty} M(E) - t \leqslant \lim_{t\to\infty} U(t) - t = M(Z_1^2)/2M^2(Z_1) < \infty.$$

Observaţii. i) Ideea aproximării marginii de stopare pentru o rătăcire aleatoare printr-o tangentă convenabilă apare în Anscombe (1953) şi Siegmund (1967).

ii) În cazul $K = N$, (113) este echivalentă cu

$$\lim_{d\to 0} M(V_N^2) = \sigma^2.$$

Scanned with OKEN Scanner

iii) Regulile de stopare $U = \max(N, E)$ şi $L = \min(N, E)$ sînt convenabile pentru un criteriu cu acurateţe mixtă care apare în practică, adică pentru estimarea mediei prin intervalele

$$I_U \cap J_U = \{\mu : |\bar{X}_U - \mu| \leqslant \min(d,\ p|\mu|)\},$$
$$I_L \cup J_L = \{\mu : |\bar{X}_L - \mu| \leqslant \min(d,\ p|\mu|)\}.$$

Fie $u(d, p)$ şi $l(d, p)$ volumele corespunzătoare ale selecţiilor de volum fix şi fie d/p fixat. Teorema 25 este adevărată pentru L, şi ca o consecinţă a integrabilităţii uniforme a $N/n(d)$ şi $E/m(p)$ urmează că este adevărată pentru U.

Simons (1968) a arătat că media repartiţiei normale cu o dispersie σ^2 necunoscută poate fi estimată cu un interval de încredere de lungime, fixată cu un coeficient de încredere prestabilit folosind un procedeu care depăşeşte ignoranţa privind σ^2 cu cel mult un număr finit de observaţii. Fie

(130) $$a_n = a$$

unde a reprezintă cuantila de ordin $(1 + \alpha)/2$ a repartiţiei $N(0, 1)$. De asemenea fie

(131) $$C = a^2\sigma^2/d^2.$$

Considerăm variabila de stopare N dată de

(132) N = cel mai mic indice $n \geqslant n_0 \geqslant 2$ pentru care $n > a_n^2 s_n^2/d^2$, unde s_n^2 este dispersia de selecţie, n_0 este un întreg constant şi a_n sînt alese astfel încît sînt fie identice cu a sau astfel încît $0 < a_n \to a$.

Atunci (Chernoff, Simons într-o lucrare nepublicată — citată de Simons (1968)) cînd

(133) $$a_n = a,\ M(N) \leqslant C + n_0 + 1$$

(independent de d, a şi de repartiţia lui X) rezultat mai puternic decît al lui Chow, Robbins (1965). Astfel putem spune că *costul ignoranţei* necunoaşterii lui σ^2 este cel mult $n_0 + 1$ observaţii. Totuşi scopul nu este atingerea consistenţei asimptotice ci mai curînd ca

(134) $P(|\bar{X}_N - \mu| < d) > \alpha$ pentru toate valorile lui μ şi σ^2.

Starr (1966 a), folosind un şir particular a_n[de forma $a + 0(n^{-1})$], face un studiu numeric pentru X repartizată normal, care arată că (134) este atinsă rar. Simons (1968) observă că pentru $a_n = a + 0(n^{-1})$,

(135) $$M(N) = C + 0(1) \text{ cînd } d \to 0.$$

Astfel pare rezonabil (şi s-a verificat pe X repartizată normal) că există regulile de stopare N pentru care (134) are loc şi pentru care costul ignoranţei, $M(N) - C$ este mărginit uniform pentru toţi μ şi σ^2 şi $d > 0$. Mai precis, pentru un întreg k, putem atinge aceste obiective luînd k observaţii peste cele date de (132). Vom cere ca $n_0 \geqslant 3$ (şi nu 2) şi $a_n = a$. Starr (1966) sugerează reguli de stopare de acest tip, însă nu le cercetează matematic.

Scanned with OKEN Scanner

TEOREMA 27 (Simons (1968) *Cu* $a_n = a$ *şi* N *definit de* (132), *pentru orice* X *continuă arbitrară, avem*

$$M(N) \leqslant C + n_0. \tag{136}$$

TEOREMA 28 (Simons (1968)) *Cu* $a_n = a$ *şi* N *definit de* (132) *pentru* X *repartizată normal, avem*

$$M(N^j) \leqslant C^j + 0(C^{j-1}) \text{ cînd } C \to \infty \text{ pentru } j = 1, 2, \ldots \tag{137}$$

şi

(138) $M(N^j) \geqslant C^j + 0(C^{j-1})$, *cînd* $C \to \infty$ *pentru* $n_0 \geqslant 3$ *pentru* $j = 1, 2, \ldots$

TEOREMA 29 (Simons (1968)) *Fie* $r = d/\sigma$ *astfel ca* $C = a^2/r^2$. *Dacă* $X_1, X_2, \ldots$ *sînt variabile aleatoare independente identic repartizate* $N(\mu, \sigma^2)$ *şi dacă valoarea oricărei variabile de stopare* N *este determinată de* $s_2^2, s_3^2, \ldots$ $\ldots$, *atunci*

$$P(|\bar{X}_N - \mu| < d) = 2M[\Phi(rN^{1/2})] - 1 \text{ pentru toţi } \mu, \sigma^2. \tag{139}$$

Pentru N *definit de* (132) *cu* $a_n \equiv a$ *şi* $n_0 \geqslant 3$, *pentru* k *întreg* $\geqslant 0$ *finit avem*

(140) $M\Phi(r(N + k)^{1/2}) \geqslant \Phi(a) = (1 + \alpha)/2$ *pentru toţi* μ, σ^2 *şi* d. *Atunci*

$$P(|\bar{X}_{N+k} - \mu| < d) \geqslant \alpha \text{ pentru toţi } \mu, \sigma^2 \text{ şi } d \tag{141}$$

şi

$$M(N + k) \leqslant C + n_0 + k \text{ pentru toţi } \mu, \sigma^2 \text{ şi } d. \tag{142}$$

Demonstraţie. Cînd X este normală, variabilele aleatoare $\bar{X}_n$ şi vectorul $(s_2^2, s_3^2, \ldots, s_n^2)$ sînt independente pentru $n = 2, 3, \ldots$. Astfel evenimentele $\{N = n\}$ şi $|\bar{X}_N - \mu| < d$ sînt independente. Deci

$$P(|\bar{X}_N - \mu| < d) = \sum_{n=n_0}^{\infty} P(|\bar{X}_n - \mu| < d \text{ şi } N = n) =$$

$$= \sum_{n=n_0}^{\infty} P(|\bar{X}_N - \mu| < d)\, P(N = n) = 2M\Phi(rN^{1/2}) - 1.$$

Pentru

$$g(x) = \Phi(rx^{1/2}),$$

avem $g'(x) = \varphi(rx^{1/2})\, r/(2x^{1/2})$ şi

$$g''(x) = -r(r^2x + 1)\, \varphi(rx^{1/2})/(4x^{3/2}).$$

Dezvoltînd $g(x)$ în serie Taylor în $x = C$, pentru θ, $0 < \theta < 1$ arbitrar, obţinem

$$M\Phi(r(N + k)^{1/2}) \geqslant M\Phi(r(N + k)^{1/2}) I_{(N+k \geqslant \theta^2 C)} \geqslant$$

$$\geqslant \Phi(a) P\{N + k \geqslant \theta^2 C\} + a\varphi(a)(2C)^{-1} M(N + k - C) I_{(N+k > \theta^2 C)} -$$

$$- a(a^2\theta^2 + 1)\varphi(a\theta)(8\theta^3 C^2)^{-1} M(N + k - C)^2 I_{(N+k \geqslant \theta^2 C)} \geqslant$$

Scanned with OKEN Scanner

$$\geqslant \Phi(a) + a\varphi(a)(2C)^{-1}M(N + k - C) -$$

$$- a^2(a^2\theta^2 + 1)\,\varphi(a\theta)(8a^3C^2)^{-1}M(N + K - C)^2 +$$

$$+ \{-\Phi(a) + a\varphi(a)(1 - \theta^2)/2 +$$

$$+ a^2(a^2\theta^2 + 1)\,\varphi(a\theta)(1 - \theta^2)^2/(8\theta^3)\}\, P\{N + k \leqslant \theta^2 C\}.$$

Pentru $\theta > 0$ mic coeficientul lui $P\{N + k \leqslant \theta^2 C\}$ este pozitiv şi pentru astfel de θ,

$$M\Phi(r(N + k)^{1/2} \geqslant \Phi(a) + a\varphi(a)\,(2C)^{-1}\,[k + M(N - C)] -$$

$$-a^2(a^2\theta^2 + 1)\,\varphi(a\theta)(8\theta^3C^2)^{-1}[k^2 - 2kM(N - C) + M(N - C)^2].$$

Din (137) şi (138) avem

$$M\Phi(r(N + k)^{1/2}) - \Phi(a) \geqslant 0(C^{-2})\,k^2 + \{a\varphi(a)(2C)^{-1} + 0(C^2)\}\,k + 0(C^{-1}) =$$

$$= \{a\varphi(a)(2C)^{-1} + 0(C^2)\}\,\{0(C^{-1})k^2 + k + 0(1)\}.$$

Astfel pentru valori mari ale lui k şi pentru valori mari ale lui $C(C \geqslant C_0)$, are loc (140) şi pentru anumite valori k mari (140) are loc pentru toţi $C < C_0$. Astfel (140) are loc pentru $k \geqslant 0$ întregi, (141) urmează din (139) şi (140), şi (142) din (136). Teorema este demonstrată.

§10. O metodă generală pentru determinarea intervalelor de lungime fixată

În scopul obţinerii unui interval de încredere pentru un parametru al unei repartiţii ce mai conţine parametrii nedoriţi necunoscuţi, interval cu o lungime fixată şi cu o probabilitate de acoperire prestabilită, Khan (1969) a dat o metodă pentru determinarea regulilor de stopare.

Fie $p(x\,;\theta_1, \theta_2)$ densitatea de repartiţie (în raport cu măsura Lebesque) a variabilei aleatoare X ce depinde de parametrii reali θ_1 şi θ_2, unde θ_2 este privit ca un parametru nedorit. Pentru simplificare presupunem că există un singur parametru nedorit deoarece cazul mai multor parametrii nedoriţi va fi analog. Dorim să determinăm un interval de încredere de lungime fixată $2d(d > 0)$ pentru θ_1 cînd atît θ_1 cît şi θ_2 sînt necunoscuţi cu o probabilitate de acoperire $1 - \alpha(0 < \alpha < 1)$ prestabilită.

Presupunem că sînt satisfăcute toate condiţiile de regularitate pentru existenţa estimatorilor de verosimilitate maximă.

Fie N o variabilă aleatoare cu valori întregi pozitive astfel că mulţimea de stopare $\{N = n\} \in \mathcal{F}_n$ unde $\mathcal{F}_n$ sînt σ — algebre de submulţimi generate de $X^{(n)} = (X_1, \ldots, X_n)'$ şi $P(N < \infty) = 1$. Fie n o valoare fixată pentru N. Matricea de informaţie a lui Fischer o notăm prin $I(\theta) = ((I_{ij}))$, $i, j = 1, 2$ unde $\theta = (\theta_1, \theta_2)'$ şi

$$I_{ij} = M[\{\partial \ln p(X\,;\theta_1, \theta_2)/\partial\theta_1\}\,\{\partial \ln p\,(X\,;\theta_1, \theta_2)/\partial\theta_2\}],\ 1 \leqslant i, j \leqslant 2.$$

Presupunem că $((I_{ij}))$ este pozitiv definită şi fie $((I_{ij}))^{-1} = ((\lambda_{ij})) = \Lambda$. Fie $\hat{\theta}_1(n)$ şi $\hat{\theta}_2(n)$ estimatorii de verosimilitate maximă pentru θ_1 şi respectiv

Scanned with OKEN Scanner

θ_2 bazaţi pe o selecţie de volum n. $\hat{\theta}_1(n)$ este asimptotic $N(\theta_1,\ \lambda_{11}/n)$, unde $\lambda_{11} = \lambda_{11}(\theta_1,\ \theta_2)$.

Fie $\{u_n\}_{1 \leqslant n < \infty}$ un şir de constante pozitive ce converg către u unde

$$\Phi(u) = 1 - (\alpha/2). \text{ Fie } J_n = [\hat{\theta}_1(n) - d,\ \hat{\theta}_1(n) + d] \text{ şi}$$

(143) $\quad n_d = \text{cel mai mic întreg } n \geqslant u^2\lambda_{11}(\theta_1,\ \theta_2)/d^2 = n^0.$

Din (143) urmează că $\lim_{d\to 0} n_d = \infty$ şi

$$\lim_{d\to 0} [d^2\, n_d/u^2\lambda_{11}(\theta_1,\ \theta_2)] \geqslant 1.$$

Deci,

$$\lim_{d\to 0} P(J_{n_d} \text{ să acopere pe } \theta_1) =$$

$$= \lim_{d\to 0} P\{n_d^{1/2} |\ \theta_1(n_d) - \theta_1 |/\lambda_{11}^{1/2} \leqslant d(n_d/\lambda_{11})^{1/2}\} =$$

$$= 2\Phi(u') - 1 \geqslant 1 - \alpha,$$

deoarece $u' > u$. Vom considera n^0 ca volumul optim al selecţiei dacă θ_1 şi θ_2 ar fi cunoscuţi, care este justificată în sens strict însă va servi ca bază pentru compararea cu variabila aleatoare de stopare în procedeul secvenţial ce va fi adoptat. În unele cazuri n^0 va tinde să fie un optim numai dacă θ_2 ar fi cunoscut şi $\lambda(\theta_1,\ \theta_2)$ ar depinde numai de θ_2 (cazul $N(\theta_1,\ \theta_2)$).

Cînd θ_1 şi θ_2 sînt necunoscuţi, n fixat determinat de (143) nu va garanta lungimea fixată $2d$ şi probabilitatea de acoperire $1 - \alpha$. Astfel, în analogie cu (143) adoptăm următoarea regulă secvenţială. Fie m un întreg pozitiv fixat: Plecînd cu $n \geqslant m$, oprim de îndată ce

(144) $$n \geqslant u_n^2\lambda_{11}(\hat{\theta}_1(n),\ \hat{\theta}_2(n))/d^2,$$

$N = \inf\{n \geqslant m : n \geqslant u_n^2\hat{\lambda}_{11}(n)/d^2\}$ unde $\hat{\lambda}_{11}(n) = \lambda_{11}(\hat{\theta}_1(n),\ \hat{\theta}_2(n))$.

TEOREMA 30. (Chan (1969)). *În singura presupunere că* $\lambda_{11}(\theta_1,\ \theta_2) < \infty$ *procedeul secvenţial se termină după un număr finit de paşi cu probabilitatea* 1.

Demonstraţie. În presupunerile de regularitate, $\hat{\lambda}_{11}(n) \to \lambda_{11}(\theta_1,\ \theta_2)$ cu probabilitatea unu. Deci teorema urmează din faptul că membrul drept al relaţiei (144) tinde către n^0 cu probabilitatea 1 care la rîndul lui implică $P(N = \infty) = 0$,

Atunci avem următorul rezultat asimptotic în sensul Chow, Robbins (1965).

TEOREMA 31. (Khan (1969)) *Dacă*

(145) $$M(\sup_n \hat{\lambda}_{11}(n)) < \infty$$

atunci avem:

i) $\lim_{d\to 0} N/n^0 = 1$ a.s.,

Scanned with OKEN Scanner

ii) $\lim_{d\to 0} P(J_n \text{ să acopere pe } \theta_1) = 1 - \alpha$ (*consistența asimptotică*),

iii) $\lim_{d\to 0} M(N)/n^0 = 1$ (*eficiența asimptotică*)

Demonstrație i) Fie $Y_n = \hat{\lambda}_{11}(n)/\lambda_{11}$, $f(n) = nu^2/u_n^2$ și

$$t = u^2\lambda_{11}(\theta_1, \theta_2)/d^2 = n^0 \to \infty \text{ cînd } d \to 0.$$

Atunci sînt satisfăcute condițiile teoremei 21 și deci

$$\lim_{t\to 0} N/t = \lim_{d\to 0} N/n^0 = 1 \text{ a.s.}$$

ii) Observăm că $N(t)/t \to 1$ a.s. cînd $t \to \infty$ și deci $N(t)/n_1 \to 1$ a.s. cînd $t \to \infty$ unde $n_t = [t]$, aici cel mai mare întreg $\leqslant t$. $\hat{\theta}_1(n)$ satisface condițiile C_1 și C_2 ale teoremei 11 și deci urmează că

$$(n_1/\lambda_{11}(\theta_1, \theta_2))^{1/2}\{\hat{\theta}_1(N(t)) - \theta_1\}$$

tinde către o variabilă $N(0, 1)$ cînd $t \to \infty$. Avem

$$\{N(t)/\lambda_{11}(\theta_1, \theta_2)\}^{1/2}\{\hat{\theta}_1(N(t)) - \theta_1\} =$$

$$= \{N(t)/n_t\}^{1/2}(n_1/\lambda_{11})^{1/2}\{\hat{\theta}_1(N(t)) - \theta_1\}.$$

Acum, deoarece $N(t)/n_t \to 1$ a.s. cînd $t \to \infty$ urmează că (Cramér (1946))

$$\{N(t)/\lambda_{11}(\theta_1, \theta_2)\}^{1/2}\{\hat{\theta}_1(N(t)) - \theta_1\}$$

tinde (în repartiție) către o variabilă $N(0, 1)$ cînd $t \to \infty$. De asemenea din ii) urmează că $d(N/\lambda_{11})^{1/2} \to u$ a.s. cînd $d \to 0$. Deci

$$\lim_{d\to 0} P\{J_N \text{ să acopere pe } \theta\} =$$

$$= \lim_{t\to\infty} P\{(N(t)/\lambda_{11})^{1/2}|\hat{\theta}_1(N(t)) - \theta_1| \leqslant d(N(t)/\lambda_{11})^{1/2}\} =$$

$$= \Phi(u) - \Phi(-u) = 1 - \alpha.$$

iii) urmează din teorema 22.

Observație i) și ii) din teorema 31 sînt valabile universal și presupunerea (145) este cerută numai pentru valabilitatea lui iii). În anumite cazuri este totuși posibil să se stabilească iii) fără (145) folosind teorema 24.

Exemplul 10. Fie $X \sim N(\mu, \sigma^2)$. Luăm $\theta_1 = \mu$, $\theta_2 = \sigma^2$. Atunci

$$((I_{ij})) = \begin{pmatrix} 1/\theta_2 & 0 \\ 0 & 1/2\theta_2^2 \end{pmatrix} \text{ și } \lambda_{11}(\theta_1, \theta_2) = \theta_2 = \sigma^2.$$

Estimatorii de verosimilitate maximă pentru θ_1 și θ_2 sînt

$$\hat{\theta}_1(n) = \bar{X}_n, \ \hat{\theta}_2 = n^{-1}\sum_1^n (X_i - \bar{X}_n)^2.$$

Scanned with OKEN Scanner

În loc de $\hat{\theta}_2(n)$ putem folosi $\hat{\theta}_2 = s_n^2$ care este un estimator consistent şi nedeplasat pentru θ_2. Deci se obţine următoarea regulă de stopare:

$$N = \inf\{n \geqslant 2 : n \geqslant u_n^2 s_n^2/d^2\} \text{ şi } n^0 = (u^2\sigma^2)/d^2.$$

Exemplul 11. Fie $X \sim N(\mu, \sigma^2)$. Luăm $\theta_1 = \sigma^2$, $\theta_2 = \mu$. Atunci

$$((I_{ij})) = \begin{pmatrix} 1/2\theta_1^2 & 0 \\ 2 & 1/\theta_1 \end{pmatrix} \text{ şi } \lambda_{11}(\theta_1, \theta_2) = 2\theta_1^2 = 2\sigma^4.$$

Astfel

$$N = \inf\{n \geqslant 2 : n \geqslant (2u_n^2 s_n^2)/d^2\} \text{ şi } n^0 = (2u^2\sigma^4)/d^2.$$

Graybill, Connell (1964 a) au dat un procedeu în două etape pentru estimarea lui σ^2.

Exemplul 12. Fie $p(x;\ \theta) = \theta e^{-\theta x}$, $x \geqslant 0$, $0 < \theta < \infty$. Atunci

$$i(\theta) = M\{\partial \ln p(X;\ \theta)/\partial\theta\}^2 = \theta^{-2}.$$

şi

$$N = \inf\{n \geqslant 1;\ n \geqslant u_n^2/(\bar{X}_n^2 d^2)\} \text{ şi } n^0 = u^2\theta^2/d^2.$$

Valabilitatea presupunerii (145) în exemplele 10 şi 11 urmează din următoarea lemă care este demonstrată cu ajutorul teoremei lui Wiener (1939). Totuşi ea nu este adevărată în exemplul 12 şi deci iii) nu poate rezulta din teorema 22. Mai întîi dăm fără demonstraţie

TEOREMA 32 (Wiener (1939) *Fie* $\{X_n\}_{1 \leqslant n < \infty}$ *un şir de variabile aleatoare independente identic repartizate cu*

$$M|X_n|^r < \infty \text{ sau } M|X_n|^r \ln^+|X_n| < \infty$$

după cum $r > 1$ *sau* $r = 1$. *Atunci*

$$M\left(\sup_{n \geqslant 1} n^{-r}\left|\sum_{i=1}^{n} X_i\right|^r\right) < \infty$$

şi reciproc.

TEOREMA 33 (Khan (1969)) *În presupunerea că* $0 < \sigma^2 < \infty$

$$M(\sup_{n \geqslant 2} s_n^q) < \infty \text{ pentru } q \geqslant 2$$

unde s_n^2 *este dispersia de selecţie.*

Demonstraţie. Pentru $q = 2$,

$$s_n^2 = (n-1)^{-1}\sum_1^n (X_i - \bar{X}_n)^2 = (n-1)^{-1}\sum_1^n X_i^2 - n(n-1)^{-1}\bar{X}_n^2.$$

Deoarece

$$s_n^2 \leqslant (n-1)^{-1}\sum_{i=1}^n X_i^2 - n(n-1)^{-1}\bar{X}_n^2 + (n-1)^{-1}\bar{X}_n^2 +$$

$$+ 2\bar{X}_n^2 \leqslant X_1^2 + (n-1)^{-1}\sum_{i=2}^n X_i^2 + \bar{X}_n^2,$$

Scanned with OKEN Scanner

avem

$$\sup_{n\geqslant 2} s_n^2 \leqslant X_1^2 + \sup_{n\geqslant 2} (n-1)^{-1} \sum_{i=2}^{n} X_i^2 + \sup_{n\geqslant 2} n^{-2} \left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)^2.$$

În consecinţă folosind teorema 32

$$M(\sup_{n\geqslant 2} s_n^2) < \infty \text{ dacă } MX^2 \ln^+ |X|^2 < \infty \text{ şi } MX^2 < \infty.$$

Totuşi $MX^2 \ln^+|X|^2 \leqslant MX^4 < \infty$ şi $MX^2 < \infty$ sînt adevărate pentru repartiţia normală cu dispersia finită. Acum fie $q > 2$. Atunci

$$s_n^q = (s_n^2)^{q/2} \leqslant \left[(n-1)^{-1} \sum_{i=1}^{n} X_i^2 + \bar{X}_n^2\right]^{q/2} \leqslant$$

$$\leqslant 2^{q/2}\left[(n-1)^{-q/2}\left(\sum_{i}^{n} X_i^2\right)^{q/2} + |\bar{X}_n|^q\right],$$

după ce am folosit inegalitatea

$$|a+b|^p \leqslant 2^p(|a|^p + |b|^p), \quad p \geqslant 1.$$

Adică

$$s_n^q \leqslant 2^{q/2}\left[2^{q/2}\left\{|X_1^q| + (n-1)^{q/2}\left(\sum_{i=2}^{n} X_i^2\right)^{q/2}\right\} + |\bar{X}_n|^q\right]$$

şi

$$\sup_{n\geqslant 2} s_n^q \leqslant 2^{q/2}\left[2^{q/2}\left\{|X_1^q| + \sup_{n\geqslant 2}(n-1)^{-q/2}\left(\sum_{i=2}^{n} X_i^2\right)^{q/2} + \sup_{n>1} n^{-q}\left|\sum_{i=1}^{n} X_i\right|^q\right]\right.$$

Deci

$$M(\sup_{n\geqslant 2} s_n^q) < \infty \text{ dacă } M|X_1|^q < \infty$$

care este adevărată pentru repartiţia normală cu dispersia finită. Cu aceasta teorema este demonstrată.

Observaţie. În cazul unei repartiţii cu un singur parametru variabila de stopare N ia forma

$$N = \inf\{n \geqslant m : n \geqslant u_n^2/d^2 i(\hat{\theta}_n)\},$$

unde

$$i(\theta) = M\{\partial \ln p(X:\theta)/\partial\theta\}^2 \text{ şi}$$

$\hat{\theta}_n$ este estimatorul de verosimilitate maximă pentru θ.

Totuşi dacă $i(\theta)$ este independentă de θ, nu se cere un procedeu secvenţial, deoarece intervalele de încredere de lungime mărginită cu o

Scanned with OKEN Scanner

probabilitate de acoperire dată pot fi bazate pe teoria normală. Mai general, nu se cere un procedeu secvenţial cînd $\lambda_{11}(\theta_1, \theta_2)$ depind numai de θ_2 care este cunoscut. Ca exemplu considerăm repartiţia normală cu media necunoscută şi dispersia cunoscută.

§11. Estimaţia secvenţială pentru volumul populaţiei finite

Considerăm următorul model. O urnă conţine un număr N necunoscut de bile albe. Bazaţi pe următoarea schemă de selecţie dorim să estimăm pe N. Bilele sînt extrase la întîmplare, una cîte una, din urnă. Înainte de a fi pusă din nou în urnă bila albă se colorează în negru, iar bila neagră se pune înapoi în urnă fără a-i modifica culoarea. Bila este întotdeauna pusă înapoi înainte de a extrage bila următoare Prezintă importanţă următoarele două probleme :

i) găsirea unei reguli de stopare t şi

ii) estimarea lui N după oprirea selectării.

Această problemă a fost considerată, pentru alţii, de Goodman (1953), Chapman (1954), Darroch (1958) Darling, Robbins (1967 d) şi Samuel (1968). Vom prezenta rezultatele lor insistînd asupra rezultatelor lui Samuel (1968).

Fie w_i, b_i numărul (variabilă aleatoare) de bile albe respectiv de bile negre observat în primele i extrageri ($w_i + b_i = i$). Atunci considerăm următoarele reguli de stopare.

Regula A. *Fie* $A > 0$ un întreg fixat $t_A = A$.

Regula B. Fie $B > 0$ un întreg fixat $t_B = \inf\{i : b_i = B\}$.

Regula C. Fie $C > 0$ fixat $t_C = \inf\{i : b_i \geqslant Cw_i\} =$
$= \inf\{i : i \geqslant (C+1)\, w_i\}$

Regula D. Fie $-\infty < D < \infty$ fixat.

$$t_D = \inf\{i : b_i \geqslant \max(1,\ w_i \ln w_i + Dw_i\} =$$
$$= \inf\{i : i \geqslant \max(w_i + 1,\ w_i \ln w_i + w_i(D+1)\}$$

Regula E. Fie $\{D_j\}$ astfel încît $\lim D_j = \infty$.

$$t_E = \inf\{i : b_i \geqslant \max(1,\ w_i \ln w_i + w_i D_{w_i})\}.$$

Deoarece $w_i \leqslant N$ fiecare dintre aceste reguli este închisă şi astfel procedeul se termină după un număr finit de paşi cu probabilitatea unu. Dintre aceste reguli, regula B a fost studiată cel mai mult [Goodman (1953), Chapman (1954) şi Darroch (1958)]. Regula D a fost cercetată de Darling, Robbins (1967 d) care au arătat că pentru orice $0 < \alpha < 1$ şi o alegere convenabilă a lui D

$$P_N(W_D = N) \geqslant 1 - \alpha$$

uniform în N, unde W_D este numărul total de bile albe observate înaintea stopării.

Vom stabili repartiţia limită a variabilei w_i cînd $N \to \infty$, într-o selecţie de volum fix i pentru diferitele relaţii dintre i şi N. Diferite părţi ale teoremei au fost demonstrate de diferiţi autori. Fie $u_i = N - w_i =$ = numărul de bile albe din urnă după extragerea i). Deoarece există

relaţii liniare între w_i, b_i, u_i vom exprima repartiţia limită pentru una dintre aceste variabile.

TEOREMA 34. *Fie* $N \to \infty$.

Cazul A. Dacă $i = (2N\lambda_N)^{1/2}$, $\lambda_N \to 0$, *atunci* $P_N(b_i = 0) \to 1$.

Cazul B. Dacă $i = (2N\lambda_N)^{1/2}$ *unde* $\lambda_N \to \lambda$ *şi* $0 < \lambda < \infty$, *atunci*

$$P_N(b_i = k) = e^{-\lambda}\lambda^k/k\,!, \qquad k = 0, 1, \ldots$$

Cazul C. Dacă $i = Na_N$ *unde* $\xi_N N^{-1/2} < a_n < \ln N - \mu_N$ *şi* $\xi_N \to \infty$, $\mu_N \to \infty$, *atunci*

$$P_N(w_i - M(w_i))/D(w_i) \leqslant x) \to \Phi(x), \quad -\infty < x < \infty$$

Cazul D. Dacă $i = N \ln N + Na_N$ *unde* $a_N \to a$ *şi* $-\infty < a < \infty$, *atunci*

$$P_N(u_i = k) \to e^{-\lambda}\lambda^k/k\,!, \quad k = 0, 1, \ldots, \text{ unde } \lambda = e^{-a}.$$

Cazul E. Dacă $i = N \ln N + Na_N$ *unde* $a_N \to \infty$, *atunci* $P_N(w_i = N) = 1$.

Samuel (1968) a considerat estimatorul de verosimilitate maximă $\hat{N}$ pentru N. Dacă cînd stopăm am observat w bile albe şi b bile negre, atunci $\hat{N} = \hat{N}(w, b)$ şi nu depinde de regula de stopare folosită, cu toate că repartiţia lui N va depinde de regula de stopare. În continuare vom obţine estimaţia $\hat{N}(w, b)$ (deci valoarea estimatorului $\hat{N}(w, b)$). Pentru orice regulă de stopare t, probabilitatea de a avea exact w bile albe şi b bile negre cînd stopăm depinde de t cît şi de N. Fie $P_N(w, b\,|t)$ această probabilitate. Se poate arăta că

$$P_N(w, b\,|t) = (N)_w\, h(w, b)/N^{w+b}, \quad w = 1, 2, \ldots, \; b = 0, 1, \ldots \tag{146}$$

unde: $(N)_i = N(N-1)\ldots(N-i+1)$ şi unde $h(w, b)$ depinde de t însă nu de N.

De exemplu, pentru regula A,

$$h(w, b) = \sum_{j=0}^{w} (-1)^{w-j} j^A \{j\,!(w-j)\,!\}^{-1} = S_A^{(w)}, \quad A = w + b \tag{147}$$

unde

$S_A^{(w)}$ este numărul lui Stirling de al doilea fel şi este definit de (147).

Pentru regula B,

$$P_N(t_B = k) = (N)_{k-B}(k - B)S_{k-1}^{k-B}/N^k, \quad k = B + 1, \ldots, B + N, \tag{148}$$

şi pentru regula C

$$P_N(w_c = k) = P_N(t_c = [\gamma k] + 1) = (N)_k h_C(k)/N^{[\gamma k]+1}, \quad k = 1, \ldots, N, \tag{149}$$

unde: $C + 1 = \gamma$,

$[\gamma k]$ cel mai mare întreg conţinut în γk, şi

$h_c(k)$ sînt constante date de

$$h_c(1) = 1, \quad h_c(k) = \left\{1 - \sum_{i=1}^{k-1} (k)_i h_c(i) k^{-[\gamma i]-1}\right\} k^{[\gamma k]+1}(k\,!)^{-1}, \quad k \geqslant 2.$$

Scanned with OKEN Scanner

Pentru demonstrații a se vedea Samuel (1968).

Astfel, pentru orice w, b astfel ca $h(w, b) \neq 0$, $\hat{N}(w, b)$ este întregul pozitiv care maximizează $(N)_w/N^{w+b}$. Problema găsirii estimatorilor de verosimilitate maximă pentru problema anterioară a fost considerată de Darroch (1958). Samuel (1968) arată că normalitatea asimptotică a estimatorilor din lucrarea lui *Lewontin, Prout* (1956) este în baza teoremei 34 falsă. O cercetare directă dă

(150) $\hat{N}(w, 0) = \infty$ pentru $w \geqslant 2$, $\hat{N}(1, b)$ pentru $b \geqslant 1$.

(Cazul $w = 1$, $b = 0$ nu prezintă interes deoarece prima bilă extrasă este întotdeauna albă, și astfel trebuie să avem cel puțin două extrageri pentru a obține informații asupra lui N). Considerînd $(N)_w/N^{w+b}$ ca o funcție de o variabilă reală pozitivă N $(N > w - 1)$, avem :

$$(151) \qquad \mathrm{d}\{(N)_w/N^{w+b}\}/\mathrm{d}N = \left\{\sum_{j=0}^{w-1}(N-j)^{-1} - (w+b)N^{-1}\right\}(N)_w N^{-(w+b)}.$$

Egalînd membrul drept al relației (151) cu zero, obținem că estimatorul de verosimilitate maximă $\tilde{N} = \tilde{N}(w, b)$ satisface

$$(152) \qquad (w+b)/\tilde{N} = \sum_{j=0}^{w-1}(\tilde{N}-j)^{-1}$$

(152) are o soluție unică finită și

$$\tilde{N}(w, b) = [\tilde{N}(w, b)] \text{ sau } [\tilde{N}(w, b)] + 1 \text{ sau amîndouă,}$$

unde $[x]$ este cel mai mare întreg conținut în x.

Membrul drept al relației (152) satisface

$$\ln\{(\tilde{N}+1)/(\tilde{N}-w+1)\} < \sum_{j=0}^{w-1}(\tilde{N}-j)^{-1} < \ln\{\tilde{N}/(\tilde{N}-w)\}.$$

Soluția ecuației

$$(153) \qquad (w+b)/x = \ln\{x/(x-w)\}$$

este dată de

$$x = (w+b)/m(s),$$

unde : $s = w/(w+b)$ și

(154) $m(s)$ este soluția ecuației $s = (1 - \mathrm{e}^{-m})/m$.

Astfel, aproximativ

$$(155) \qquad \tilde{N}(w, b) \simeq (w+b)/m(s) \text{ cînd } s = w/(w+b)$$

Scanned with OKEN Scanner

(155) ne spune că estimatorul de verosimilitate maximă este aproximativ proporţional cu volumul selecţiei, cu factorul de proporţionalitate funcţie numai de proporţia bilelor albe din selecţia extrasă. O informaţie mai precisă asupra lui $\hat{N}$ poate fi obţinută considerînd raportul lui $(N)_w/N^{w+b}$ la $(N-1)_w/(N-1)^{w+b}$ pe care-l vom nota prin $g_{w,b}(N)$.

$$g_{w,b}(N) = N(N-w)^{-1}(1-N^{-1})^{w+b}, \quad N \geqslant w.$$

Deoarece $(N)_w/N^{w+b}$ este o funcţie continuă cu un maxim unic în $\tilde{N}$ şi este strict crescătoare pentru $N < \tilde{N}$, strict descrescătoare pentru $N > \tilde{N}$, există o valoare reală unică N^* astfel încît

$$g(N^*) = 1, \quad g(N) > 1 \quad \text{pentru} \quad N < N^*$$

$$g(N) < 1 \quad \text{pentru} \quad N > N^*.$$

Astfel $\hat{N}(w, b) = [N^*(w, b)]^*$ exceptînd cazul în care N^* este întreg, caz în care $\hat{N}$ nu este unic şi poate fi luat N^* sau $N^* - 1$.

TEOREMA 35. (Samuel (1968)) i) *Pentru fiecare A fixat şi regula A*

(156) $$P_N(\hat{N} = \infty) > 0 \quad \textit{pentru toţi} \quad N \geqslant A \quad \textit{şi}$$

$$\lim_{N\to\infty} P_N(\hat{N} = \infty) = 1.$$

De asemenea pentru fiecare N fixat

(157) $$\lim_{A\to\infty} P(\hat{N} = N) = 1.$$

ii) *Pentru fiecare B fixat şi regula B*

$$\lim_{N\to\infty} P_N(2B\hat{N}/N \leqslant x) = F_{2B}(x), \quad -\infty < x < \infty$$

unde am notat prin F_{2B} funcţia de repartiţie a unei variabile $\chi^2(2B)$.

Demonstraţie (156) rezultă din (150) şi din cazul A al teoremei 34. Arătăm că, pentru fiecare w fixat, $\hat{N}(w, b) = w$ pentru toţi b suficienţi de mari. Atunci, deoarece pentru N fixat, $\lim_{A\to\infty} P_N(w_A = N) = 1$, urmează (157). Luăm $b = w^2$, şi $N = w + 1$ în expresia lui $g_{w,b}(N)$. Obţinem

$$g_{w,w^2}(w+1) < (w+1)\,e^{-w} \leqslant 2e^{-1} < 1.$$

Astfel $\hat{N}(w, w^2) \leqslant w$. Însă pentru orice w, $b\hat{N}(w, b) \geqslant v$ şi i) este demonstrată.

Pentru regula B, Goodman (1953) a arătat că există un estimator unic nedeplasat uniform de dispersie minimă. Fie $W_B = t_B - B =$ numărul de bile albe obţinute pînă la stopare. Estimatorul nedeplasat uniform de dispersie minimă este dat de

Scanned with OKEN Scanner

(158) $$W_B^2/2B + \left(\frac{2}{3} - 1/6B\right) W_B + P_1/P_2,$$

unde P_1 şi P_2 sînt polinoame de grad $2B - 1$ în W_B. Estimatorul de verosimilitate maximă şi nedeplasat uniform de dispersie minimă au asimptotic aceeaşi repartiţie. Darroch (1958) a arătat că estimatorul nedeplasat uniform de dispersie minimă este egal cu

$$S_{i_B}^{(W_B)}/S_{i_B-1}^{(W_B)}.$$

Pentru regula C există de asemenea un estimator unic nedeplasat uniform de dispersie minimă care este funcţie de W_c, estimator notat $a_c(W_c)$ unde $a_c(k)$ este soluţia (unică) ecuaţiilor

(159) $$\sum_{i=1}^{k} a_c(i)\,(k)_i h_c(i) k^{-[\gamma i]-1} = k, \quad k = 1, 2, \ldots$$

Soluţia este dată de formula

$$a_c(1) = 1,$$

(160) $$a_c(k) = \left\{k - \sum_{i=1}^{k-1} a_c(i)\,(k)_i h_c(i)\, k^{-1-[\gamma i]}\right\} k^{-1-[\gamma k]}/h_c(k)k\,!, \quad k \geqslant 2$$

Teorema 36 (Samuel (1968)). *Pentru regula C, fie s fixat, fie $m(s)$ ca în* (154) *şi*

(161) $$H(s) = \{1 - sm(s)\}/(s - 1 + sm(s)).$$

Atunci

(162) $$[(w + b)/m(s) - H(s)] \leqslant \hat{N}(w, b) < (w + b)/m(s)$$

pentru toţi w, b cu $w/(w + b) = s$.

Demonstraţie. Membrul drept al inegalităţii urmează deoarece pentru $w/(w + b) = s$,

$$g_{w,b}((w + b)/m(s)) = (1 - sm(s))^{-1}\,(1 - m(s)(w + b)^{-1})^{w+b} <$$

$$< (1 - sm(s))^{-1}\, e^{-m(s)} = 1.$$

Pe de altă parte înlocuind pe N cu

$$(w + b)/m(s) - H$$

în expresia lui $g_{w,b}(N)$, unde $H > 0$ este o constantă fixată, şi scriind $i = w + b$, $w = si$, obţinem pentru $i > Hm(s)$

Scanned with OKEN Scanner

$$g_{w,b}(w+b)(m(s))^{-1} - H) = (i - Hm(s))\{i(1 - s\,m(s)) - Hm(s)\}^{-1}$$

$$(1 - m(s)(i - Hm(s))^{-1})^{i} \underset{i\to\infty}{\to} 1.$$

Derivînd această expresie în raport cu i și folosind inegalitatea

$$\log(1 - x) < -x \quad (0 < x < 1)$$

obținem că derivata este mai mică decît

$$(1 - m(s)(i - Hm(s))^{-1})^{i-1}(m^2(s)(i\{(1 - sm(s))(H + 1) - sH\} -$$

$$- (1 - s)m(s)H(H + 1))(i - Hm(s))^{-1}\{i(1 - sm(s)) - Hm(s)\}^{-2}.$$

Pentru ca aceasta să fie negativă pentru toți $i > Hm(s)$ valoarea din acolada de la numărător nu trebuie să fie pozitivă. Egalînd acolada cu zero și rezolvînd-o în raport cu H obținem (161) care este pozitivă. (162) urmează.

TEOREMA 37. (Samuel (1968) *Fie* $C + 1 = \gamma$,

(163) $$\sigma^2 = m(\gamma^{-1})(\gamma - m(\gamma^{-1}))/(m(\gamma^{-1}) - c) \text{ și}$$

$$\sigma^{*2} = \sigma^2/(m(\gamma^{-1}))^2.$$

Atunci

(164) $$\liminf_{N\to\infty} P_N((\hat{N} - N)N^{-1/2}\sigma^{*-1} \leqslant x) \geqslant \Phi(x), \quad -\infty < x < \infty.$$

Dacă notăm prin U_D numărul de bile albe neobservat cînd stopăm, atunci are loc

TEOREMA 38. (Samuel (1968)). *Pentru regula D, și pentru fiecare D fixat*

$$-\infty < D < \infty,$$

i) $P_N(U_D = j) \to e^{-\lambda}\lambda^j/j!$, $j = 0, 1, \ldots$ *unde* $\lambda = e^{-(D+1)}$;

ii) $\lim_{N\to\infty} P_N(\hat{N} = N - j + [\lambda]) = e^{-\lambda}\lambda^j/j!$, $j = 0, 1 \ldots$

și pentru regula E

$$\lim_{N\to\infty} P_N(\hat{N} = N) = 1.$$

Demonstrație i) Pentru fiecare k fixat, $k = 0, 1, \ldots$

(165) $$\limsup_{N\to\infty} P_N(U_D \leqslant k) \leqslant \sum_{j=0}^{k} e^{-\lambda}\lambda^j/j!.$$

Într-adevăr $U_D \leqslant k$ implică $u_{[a_N - k]} \leqslant k (u_i = N - w_i)$ și astfel

Scanned with OKEN Scanner

(166) $$a_{N-k} = N \ln N + N(D_N + 1).$$

Urmează că pentru $N \to \infty$, $D_N \to D$. Condiţia din cazul D a teoremei 34 este satisfăcută şi obţinem (165). Este mult mai dificil să arătăm că

(167) $$\liminf_{N\to\infty} P(U_D \leqslant k) \geqslant \sum_{j=0}^{k} e^{-\lambda}\lambda^j/j!$$

(demonstraţia este similară cu cea dată de Darling, Robbins (1967))

ii) rezultă din i) şi din următoarea lemă:

LEMA 6 (*Samuel* (1968)) *Pentru orice* $-\infty < D < \infty$, $w > e^{-D}$

(168) $$\hat{N}(w, [w \ln w + wD]) \geqslant w + [e^{-(D+1)}]$$

şi

(169) $$\hat{N}(w, [w \ln w + wD]) = w + [e^{-(D+1)}] \text{ pentru toţi } w > K_D.$$

Demonstraţie. Folosim pe $g_{w,b}(N)$ cu $N = w + a$, $a > 0$. Obţinem:

(170) $$(w + a)\, a^{-1}(1 - (w + a)^{-1})^{w \ln w + w(D+1)} \geqslant$$

$$\geqslant g_{w,[w \ln w + wD]}(w + a) > (w + a)a^{-1}\,(1 - (w + a)^{-1})^{w \ln w + w(D+1)+1}$$

şi cînd $w \to \infty$ toţi membrii inegalităţii (170) tinde către $e^{-(D+1)}/a$. Derivata termenului din stînga din (170) este negativă pentru toţi $w \geqslant e^{-(D+1)}$ şi astfel luînd $a = e^{-(D+1)}$, obţinem (168). De asemenea derivata termenului din dreapta din (170) este negativă. Pentru orice $a > e^{-(D+1)}$ limita în (170) este < 1 şi astfel (169) urmează pentru toţi w suficienţi de mari. Constanta K_D depinde numai de D. Pentru toţi $D > 0$, $w = 1$ şi $a = 1$ valoarea membrului stîng din (170) devine $\left(\frac{1}{2}\right)^D < 1$ şi deoarece funcţia din membrul stîng din (170) este pentru fiecare a şi D o funcţie descrescătoare, i) din teorema 38 conduce la

(171) $\hat{N}(w, [w \ln w + wD]) = w$ pentru $w = 1, 2, \ldots$, oricare ar fi $D > 0$.

§ 12. Consistenţa unor estimatori secvenţiali

Dat un estimator nedeplasat şi o statistică suficientă pentru un anumit parametru se poate obţine un alt estimator luînd valoarea medie a estimatorului nedeplasat condiţionată de statistică suficientă (a se vedea teorema VIII.2 (Blackwell (1947), Rao (1949)). Wolfowitz (1947 a) a considerat consistenţa unor astfel de estimatori pentru parametrul repartiţiei binomiale în cazul secvenţial. Loynes (1969) a studiat consistenţa estimatorilor secvenţiali de tip Blackwell-Rao pentru cazul general. Berk (1969) a considerat o consistenţă mai puternică a unor astfel de estimatori.

Scanned with OKEN Scanner

Fie $X_1, X_2, \ldots$ variabile aleatoare independente şi identic repartizate luînd valori în spaţiul $\mathcal{X}$. Fie N un timp de oprire (sau regula de oprire) definit pe şirul $X_1, X_2, \ldots$ luînd valori întregi pozitive cu proprietatea că pentru fiecare $n \geqslant 1$, evenimentul $\{N = n\}$ este determinat numai de condiţiile asupra variabilelor $X_1, X_2, \ldots, X_n$. Vom presupune că toţi timpii de oprire sînt finiţi cu probabilitatea unu. Vom folosi notaţia

$$X^{(n)} = (X_1, X_2, \ldots, X_n).$$

Prin Z_n vom nota statisticile de ordine corespunzătoare lui $X^{(n)}$. Dacă X_i sînt cu valori reale, atunci acestea sînt chiar statisticile de ordine; în caz contrar le putem privi ca funcţii de la $\mathcal{X}$ la întregii care descriu cîte variabile $X_1, X_2, \ldots, X_n$ iau o valoare dată x în $\mathcal{X}$. Z_{n+1} poate fi obţinută prin cunoaşterea lui Z_n şi X_{n+1}. Vom face următoarele presupuneri:

(A1) Pentru fiecare n, se dă o statistică V_n care este suficientă pentru $X^{(n)}$; V_n nu este necesar o funcţie cu valori reale.

(A2) Pentru fiecare n, V_n este o funcţie de Z_n (va fi sigur satisfăcută dacă $V_n = Z_n$ sau dacă V_n este o statistică suficientă minimal).

Cînd este dată o regulă de stopare N vom scrie V_N pentru variabila care este egală cu V_n cînd $N = n$; fără a crea confuzii vom scrie V în loc de V_N. Dacă avem un şir de reguli de stopare N_i, vom scrie $V^{(i)}$ în loc de V_{N_i}. Presupunem că pentru un parametru θ am construit un estimator nedeplasat T (definit pe şirul $X_1, X_2, \ldots$) care va rămîne fixat în cele ce urmează.

(A3) $M_\theta T = \theta$; în particular $M_\theta T$ există.

Vom presupune că T depinde numai de un număr finit de observaţii; există o regulă de stopare E pentru T astfel că dacă $E = n$, T este funcţie numai de $X_1, X_2, \ldots, X_n$. Orice estimator de acest fel va fi numit secvenţial; un estimator bazat pe o selecţie de volum fix va depinde de un număr fixat de X_i şi va fi un caz particular al estimatorului secvenţial obţinut în cazul în care luăm $E = m$ cu probabilitatea unu pentru un întreg m corespunzător.

(A4) Orice regulă de stopare N sau N_i considerată satisface

$$N \geqslant E \text{ sau } N_i \geqslant E$$

cu probabilitatea unu.

Rolul lui (A4) este, ca împreună cu (A1) să asigure că cantitatea $U(N)$ şi $U(N_i)$ (pe care le vom defini în cele ce urmează) sînt funcţii numai de observaţii.

Dacă A este un eveniment, funcţia indicator a lui A va fi notată prin $I(A)$ şi va fi egală cu 1 pe A şi zero în rest.

Vom construi estimatorii Blackwell-Rao.

Dat un estimator T şi o regulă de stopare N definim un nou estimator $U = U(N)$ ca media lui T daţi N şi V. Adică

$$U(N) = M(T|N, V_N). \tag{172}$$

Echivalent, $U = U_n(v)$ cînd $N = n$ şi $V_n = v$ unde

Scanned with OKEN Scanner

$$U_n(v) = M(T|N = n,\ V_n = v) =$$

$$= M(TI(N = n)|V_n = v)\{M[I(N = n)|V_n = v]\}^{-1} \tag{173}$$

Presupunerile (A1) şi (A4) implică că $U_n(v)$ este o funcţie numai de $X_1, X_2, \ldots, X_n$, astfel încît U este o statistică cu regula de stopare N. Atunci U este de asemenea nedeplasat pentru θ şi are riscul mai mic decît T pentru orice funcţie convexă (pentru această proprietate nu este necesară nedeplasarea).

Ca un caz particular putem lua $V_n = Z_n$ care vor conduce în cazul în care E şi N sînt fixe la U statistici şi prin urmare privim aceşti estimatori ca pe nişte U statistici generalizate. În orice caz, din cauza lui (A2), U este o funcţie simetrică de $X_1, X_2, \ldots, X_N$. De asemenea, în cazul în care perechea (N, V) este completă, U este estimator unic nedeplasat de dispersie minimă,

Arătăm că $U_N(V)$ este consistent

Wolfowitz (1947 a) a arătat că $\{U_N(V)\}$, în cazul estimării parametrului repartiţiei binomiale, este un şir consistent dacă şirul regulelor de stopare $\{N_i\}$ satisface o anumită condiţie. Condiţia sa este că

$$n_{0,i} \to \infty \text{ cînd } i \to \infty,$$

unde $n_{0,i}$ este cea mai mică valoare a lui n pentru care

$$P(N_i = n) > 0.$$

Loynes (1969) a arătat că chiar în cazul general consistenţa urmează din condiţii mai slabe asupra lui N_i. Vom folosi notaţia

$$U^{(i)} = U(N_i) = M(T|N_i, V^{(i)}). \tag{174}$$

TEOREMA 39. (Loynes (1969)) *Presupunem că sînt satisfăcute presupunerile* (A1)—(A4) *şi condiţiile* (C1) *şi* (C2)

(C1) *Pentru fiecare k fixat, $P(N_i \leqslant k) \to 0$ cînd $i \to \infty$*

(C2) *Există un întreg $\lambda(i, k)$, care este monoton în k şi care tinde la ∞ dacă i şi k tind la ∞, astfel că pentru fiecare k, $N_i = k$ dacă şi numai dacă $N_i \geqslant k$ şi mulţimea de variabile aleatoare*

$$Z_{\lambda(i,k)},\ X_{\lambda(i,k)+1},\ \ldots,\ X_k$$

satisface o condiţie depinzînd de i şi k. Atunci $U^{(i)}$ converge în probabilitate către θ şi în medie de ordinul 1 cînd $i \to \infty$.

Observaţie i) (C1) stabileşte că $N_i \to \infty$ în probabilitate. Condiţia lui Wolfowitz (1947 a) implică că $N_i \to \infty$ cu probabilitatea unu.

ii) (C2) nu este necesară. Rolul său efectiv este de a asigura că T şi N_i sînt aproape independente pentru valori mari ale lui i. Intenţia noastră este de a exclude regula de stopare astfel ca $N_i = [iX_i]$. O condiţie mai simplă care implică (C2) este

(C2′) Pentru fiecare k, $N_i = k$ dacă şi numai dacă $N_i \geqslant k$ şi Z_k satisface o anumită condiţie.

Scanned with OKEN Scanner

Această condiţie este similară cu aceea impusă de Blackwell (1947). Condiţia mai puternică (C2′) este satisfăcută de regulile de stopare :

a) stopăm cînd $\sum_1^n X_j$ intersectează pentru prima oară bariera

b) stopăm cînd s^2/n devine pentru prima oară $<$ decît o valoare prestabilită şi în cazul repartiţiei binomiale.

c) stopăm cînd punctul ale cărui coordonate sînt numărul de succese şi numărul de insuccese cade pentru prima oară într-o regiune R.

Un exemplu, în care este satisfăcută (C2) însă (C2′) nu este satisfăcută este dat definind $N_i = n$ dacă X_n este primul X_j pentru care

$$X_j > \max(X_1, X_2, \ldots, X_i).$$

Demonstraţia teoremei 39. După (C1) există un şir crescător de întregi m_i care tind la infinit cu i, cu proprietatea că $P(N_i < m_i) \to 0$.

$$\text{Fie } E_i = \{N_i \geqslant m_i\}$$

şi

$$k_i = \lambda(i, m_i) \text{ astfel că } k_i \to \infty$$

şi

$$P(E_i) \to 1.$$

Definim

$$W_i = M[M[T|I(E_i), Z_{k_i}, X_{k_i+1}, \ldots]|N_i, V^{(i)}] \tag{175}$$

atunci cînd $N_i = j$ şi $V_j = v$

$$W_i = M[M[T|I(E_i), Z_{k_i}, X_{k_i+1}, \ldots]I(N_i = j)|V_j = v] \times \tag{176}$$

$$\times \{M[I(N_i = j)|V_j = v]\}^{-1}.$$

Acum, dacă $j \geqslant m_i$ din (C2) urmează că $N_i = j$ dacă şi numai dacă $N_i \geqslant m_i$ şi mulţimea de variabile aleatoare

$$Z_{k_i}, X_{k_i+1}, \ldots, X_j$$

satisface condiţia menţionată în observaţie; în consecinţă dacă $j \geqslant m_i$

$$W_i = M[M[TI(N_i = j)|I(E_i), Z_{k_i}, X_{k_i+1}, \ldots]|V_j = v] \times$$

$$\times \{M[I(N_i = j)|V_j = v]\}^{-1} = \tag{177}$$

$$= M[TI(N_i = j)|V_j = v]\{M[I(N_i = j)|V_j = v]\}^{-1}$$

datorită lui (A2). Deci $W_i = U^{(i)}$ pe $\{N_i \geqslant m_i\}$ şi deoarece $P(E_i) \to 1$,

$$W_i - U^{(i)} \to 0 \text{ în probabilitate.} \tag{178}$$

Scanned with OKEN Scanner

Scriem

$$Y_i = M[T|I(E_i), Z_{k_i}, X_{k_{i+1}}, \dots] \tag{179}$$

astfel ca $W_i = M[Y_i|N_i, V^{(i)}]$. Atunci cînd $N_i \geqslant m_i$ sau $I(E_i) = 1$,

$$Y_i = M[TI(E_i)|Z_{k_i}, X_{k_{i+1}}, \dots]\{M[I(E_i)|Z_{k_i}, X_{k_{i+1}}, \dots]\}^{-1} \tag{180}$$

Avem

$$M[|1 - M[I(E_i)|Z_{k_i}, X_{k_{i+1}}, \dots]|] =$$

$$= M[|M[1 - I(E_i)|Z_{k_i}, X_{k_{i+1}}, \dots]|] \leqslant M[1 - I(E_i)] \to 0 \tag{181}$$

şi numit astfel că numitorul din (180) tinde în medie de ordinul 1 şi deci şi în probabilitate către 1. Dacă punem

$$S_i = M[T|Z_{k_i}, X_{k_{i+1}}, \dots] \tag{182}$$

în mod similar, urmează că diferenţa dintre numărătorul relaţiei (180) şi S_i tinde în probabilitate către zero şi deci în final, ţinînd seama de (C1)

$$Y_i - S_i \to 0 \text{ în probabilitate} \tag{183}$$

S_i formează o martingală astfel că după teorema 4.2, Capitolul VII din Doob (1953), S_i converge cu probabilitatea unu şi în medie de ordinul 1 la o variabilă aleatoare avînd media $M(T) = \theta$. Din legea 0 — 1 a lui Hewit, Savage (1955) urmează că limita este o constantă şi prin urmare egală cu θ cu probabilitatea unu. Astfel $S_i \to \theta$. Deci după (183) avem

$$Y_i \to \theta \text{ în probabilitate}$$

Acum dacă $\varepsilon > 0$, punînd $Y_i' = Y_i - \theta$ avem

$$M[|Y_i - \theta|] > M[|Y_i - \theta| I(|Y_i'| > \varepsilon)] +$$

$$+ M[|Y_i - \theta| \, | I(|Y_i'| \leqslant \varepsilon)] \leqslant$$

$$\leqslant M\{M|T - \theta| \, | I(E_i), Z_{k_i}, X_{k_{i+1}}, \dots][I(|Y_i'| > \varepsilon)]\} + \varepsilon =$$

$$= M\{M[|T - \theta| I(|Y_i'| > \varepsilon)|I(A_i), Z_{k_i}, X_{k_{i+1}}, \dots]\} + \varepsilon =$$

$$= M[|T - \theta| \, I(|Y_i'| > \varepsilon)] + \varepsilon, \tag{184}$$

care tinde la zero cînd $i \to \infty$ şi atunci $\varepsilon \to 0$ deoarece $Y_i \to \theta$ în probabilitate.

În consecinţă din definiţia lui W_i

$$M(|W_i - \theta|) = M\{|M|Y_i - \theta| \, |N_i, V^{(i)}]|\} \leqslant$$

$$< M\{M[|Y_i - \theta| \, N_i, V^{(i)}]\} = M[|Y_i - \theta|] \to 0, \tag{185}$$

Scanned with OKEN Scanner

şi deci W_i converge către θ în probabilitate astfel că după (178) $U^{(i)} \to \theta$ în probabilitate. Printr-o argumentaţie similară cu cea folosită în (184) urmează că $U^{(i)}$ converge către θ în medie de ordinul 1. Cu aceasta teorema este demonstrată.

Loynes (1969) a dat cinci exemple, primele două privind selecţii de volum fix. Toate exemplele cu excepţia celui de al cincilea au T depinzînd numai de volumul fix al selecţiei. Toate cu excepţia exemplului patru satisfac (C2′)

Exemplul 13) Presupunem că X_j sînt independente şi repartizate $N(\mu, 1)$, că $T = X_1^2 - 1$ astfel ca $\theta = \mu^2$, ca $N_i = i$ şi folosim statistica suficientă minimal $V_n = \sum_1^n X_j$. Atunci găsim :

$$U^{(i)} = \left(\sum_1^i X_j\right)^2 i^{-2} - i^{-1} \tag{186}$$

care converge către θ în probabilitate şi în medie de ordinul 1, după teorema 39 şi cu probabilitatea 1 după legea tare. Dispersia lui $U^{(i)}$ este

$$2i^{-2} + 4\mu^2 i^{-1} \tag{187}$$

în timp ce a statisticii U asociate cu T este

$$2i^{-4} + 4\mu^2 i^{-1}.$$

Exemplul 14) Presupunem că X_j sînt independente şi repartizate uniform pe $(0, 2\theta)$, că $T = X_1$, că $N_i = i$ şi că $V_n = X_{n,n}$ unde

$$X_{n,n} = \max(X_1, X_2, \ldots, X_n) \tag{188}$$

este statistica minimal suficientă. Atunci

$$U^i = (i+1)(2i)^{-1} X_{i,i},$$

a cărei comportare este aceeaşi ca în exemplul 13.

Exemplul 15) Fie X_j (reală) independente şi repartizate identic cu repartiţia continuă extinsă la $+\infty$, fie $V_n = Z_n$ şi N_i primul n pentru care $X_{n,n} > i$; din nou presupunem $T = X_1$. Atunci dacă $N_i = 1$, $U^{(i)} = X_1$; în rest, dacă $N_i = n \geqslant 2$ şi $Z_n = (z_1, z_2, \ldots, z_n)'$ unde $X_n = z_n > i$ şi

$$z_1 \leqslant z_2 \leqslant \ldots \leqslant z_{n-1},$$

avem $X_1 = z_j$ cu probabilitatea $(n-1)^{-1}$ pentru fiecare j $(1 \leqslant j \leqslant n-1)$.

Astfel

$$U^{(i)} = z_1 = X_1 \quad , \quad \text{dacă } N_i = 1 \tag{189}$$

$$= \sum_{j=1}^{n-1} z_j (n-1)^{-1} = \sum_{j=1}^{n-1} X_j (n-1)^{-1}, \quad \text{dacă } N_i = n \geqslant 2.$$

Scanned with OKEN Scanner

După teorema 39, $U^{(i)}$ converge către $\theta = MX$ în probabilitate și în medie de ordinul 1. În aceste două exemple și în următorul, prin aplicarea teoremei 1 a lui Richter (1965), are loc convergența cu probabilitatea 1.

Exemplul 16) Presupunem T, X_j și V_n că în exemplul 15 și fie N_i primul $n > i$ pentru care $X_{n,n} > X_{i,i}$. Atunci cînd $N_i = n$ și $Z_n = (z_1, z_2, \ldots, z_n)$ avem $X_n = z_n$ și z_{n-1} realizați printre $X_1, X_2, \ldots, X_i$; astfel $T = z_{n-1}$ cu probabilitatea i^{-1}, și $T = z_j$ cu probabilitatea $(i-1)/(n-2)i$ pentru $1 \leqslant j \leqslant n-2$. Urmează că

$$U^{(i)} = z_{n-1}i^{-1} + (i-1)i^{-1}(z_1 + z_2 + \ldots + z_{n-2})(n-2)^{-1}. \tag{190}$$

Convergența are aceiași comportare ca în exemplul 15.

Exemplul 17) Ne situăm în condițiile exemplului 15, cu excepția faptului că $T = X_{N_1}$, și considerăm ca mai înainte cazul cînd

$$N_i = n \text{ și } Z_n = (z_1, z_2, \ldots, z_n)'.$$

Atunci dacă $n = 1$, $N_1 = 1$; dacă $n > 1$ și $z_n \leqslant 1$, $N_1 = n$; dacă $n > 1$ și $z_1 < z_2 < \ldots < z_r \leqslant 1 < z_{r+1} < \ldots < z_n$, $X_{N_1} = z_j$ cu probabilitatea

$$(n-r-1)^{-1} \text{ pentru } r+1 \leqslant j \leqslant n-1.$$

Astfel

$$\begin{aligned} U^{(i)} &= z_1 = X_1 && , \ n = 1 \\ &= z_n = X_n && , \ n > 1 \text{ și } z_{n-1} \leqslant 1, \\ &= (z_{r+1} + \ldots + z_{n-1})(n-r-1)^{-1}, && n > 1 \text{ și } z_r \leqslant 1 < z_{r+1} \end{aligned} \tag{191}$$

și convergența are loc în probabilitate și în medie de ordinul 1 către $\theta = M(T)$.

Observație. Intuiția sugerează că ar trebui ca $U^{(i)}$ să conveargă aproape sigur către θ dacă asupra lui N_i se impun condiții puternice. Astfel de condiții ar fi $N_i \to \infty$ cu probabilitatea 1 sau $N_{i+1} \geqslant N_i$ pentru toți i.

Loynes (1969), cu excepția unei situații nesecvențiale, nu demonstrează acest fapt în general. Berk (1969) a arătat că șirul de estimatori de tip Blackwell-Rao în cazul secvențial este consistent puternic dacă șirul timpilor de stopare N_i este astfel încît $N_i \to \infty$ a.s. și N_i sînt C-ordonați.

Fie $\{\mathscr{A}_n : 1 \leqslant n < \infty\}$ un șir crescător de subcîmpuri ale lui $\mathscr{A}$ ($(\Omega, \mathscr{A})$ spațiu măsurabil) cu $\mathscr{A}_\infty = \bigcup_n \mathscr{A}_n$. Fie $\{\mathscr{B}_n : 1 \leqslant n < \infty\}$ alt șir de subcîmpuri și $\{\mathscr{C}_n : 1 \leqslant n < \infty\}$ un șir descrescător de subcîmpuri cu $\bigcap_n \mathscr{C}_n = \mathscr{C}_\infty$.

Un indice aleator este o variabilă aleatoare cu valori întregi pozitive pe $(\Omega, \mathscr{A})$. Aceștia vor fi notați prin $E, N, \ldots$

DEFINIȚIA 7. (Berk (1969)) *$E \leqslant N$ sînt C-ordonați dacă $\mathscr{C}_N \subset \mathscr{C}_E$.*

PROPOZIȚIE (Berk (1969)) *Dacă $E \leqslant N$ următoarele afirmații sînt echivalente*

a) *N este $\mathscr{C}_E$ măsurabil*

Scanned with OKEN Scanner

b) *E și N sînt C ordonate*

c) $(\forall)\ k \leqslant n$, $(\exists)\ C_{kn} \in \mathscr{C}_k$ *astfel încît* $(N = n)(E = k) = C_{kn}(E = k)$.

COROLAR (Berk (1969)) *Dacă* $(N > n) \in \mathscr{C}_n$ *pentru toți* n, *atunci pentru toți* $E \leqslant N$, E *și* N *sînt* C *ordonați.*

DEFINIȚIA 8. *Mulțimea* $\{N_j;\ j \in J\}$ *de indici aleatori este* C *ordonată dacă fiecare pereche aleasă din ea este* C *ordonată.*

TEOREMA 40. (Berk (1969)) *Dacă* $N_1 \leqslant N_2 \leqslant \ldots$ *este* C *ordonată și* $N_\infty = \lim N_i$, *atunci* $\{N_i, 1 \leqslant i < \infty\}$ *este* C *ordonată și* $\mathscr{C}_{N_i} \downarrow \mathscr{C}_{N_\infty}$.

Fie z_n statistica de ordine generată de

$$(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n).$$

Fie $\mathscr{P}$ o familie de repartiție pe $(\Omega,\ \mathscr{A})$ și pentru fiecare n, fie $v_n \mathscr{B}(x_1, \ldots, x_n)$ măsurabilă și suficientă pentru $(x_1, \ldots, x_n)$. Presupunem că v_n satisface

Condiția A. Pentru toți n, (i) v_n este $\mathscr{B}(z_n)$ măsurabilă și (ii) v_{n+1} este $\mathscr{B}(v_n,\ x_{n+1})$ măsurabilă.

Observație A(i) cere ca v_n să fie simetrică în $x_1, \ldots, x_n$, condiție ce apare în aplicații. A(ii) implică că $\{v_n\}$ este un șir transitiv (Bahadur (1954)).

Fie $\mathscr{A}_n = \mathscr{B}(x_1, \ldots, x_n)$, $\mathscr{B}_n = \mathscr{B}(v_n)$ și $\mathscr{C}_n = \mathscr{B}(v_n,\ x_{n+1},\ x_{n+2}, \ldots)$ În condiția A, $\mathscr{C}_n \downarrow \mathscr{C}_\infty$ și după legea $0 - 1$ Hewitt-Savage, $\mathscr{C}_\infty$ a.s. trivial $[\mathscr{P}]$

DEFINIȚIA 9. Un index aleator t este un timp de oprire pe $\{\mathscr{C}_n\}$ dacă $(t = n) \in \mathscr{A}_n$, $(\forall)\ n$; toți timpii de stopare vor fi pe $\mathscr{A}_n$

Observație. Dacă t este un timp de oprire, $\mathscr{A}_t = \{A \in \mathscr{A}(t = n) \in \mathscr{A}_n\}$

TEOREMA 41. (*Berk (1969)*). *Fie* $s \leqslant t_1 \leqslant t_2 \leqslant \ldots$ *timpi de stopare* C *ordonați astfel ca* $\lim_i t_i = \infty [\mathscr{P}]$. *Atunci pentru toți* $T \in L_1(\Omega,\ \mathscr{A},\ \mathscr{P})$ *și* $P \in \mathscr{P}$

$$M(T|\mathscr{B}_{t_i}) \to M_P T[P].$$

Observație. Dacă t_i crește la $+\infty$ a.s. și sînt C ordonați, proectînd T pe σ-cîmpul suficient $\mathscr{B}_{t_i} = \mathscr{B}(t_i, v_i)$ se obține un șir de estimatori puternic consistent pentru $M_P T$. Dacă s și t_i nu sînt aleatori, obținem consistența puternică a estimatorilor Blackwell-Rao. Dacă în plus, $v_n = z_n$, $M(T|\mathscr{B}_{t_i})$ este U statistica formată cu observațiile t_i, bazată pe $T = T(x_1, \ldots, x_s)$.

TEOREMA 42. (Berk (1969)) *Fie* $\{V_{ni},\ n = 1, 2, \ldots,\ i = 1, 2, \ldots\}$ *o mulțime de mulțimi măsurabile,* V_{ni} *fiind o submulțime de amplitudine* v_n *pentru toți* i *și astfel ca* $V_{ni} \supset V_{n(i+1)}$ *pentru toți* n *și* i. *Fie* t_i *primul* $n \geqslant 1$ *astfel ca* $v_n \in V_{ni}$ *sau* $+\infty$ *dacă astfel de* n *nu apar. Atunci* $t_1 \leqslant t_2 \leqslant \ldots$ *sînt* C *ordonați.*

Berk (1969) ilustrează ideea de timpi de oprire C ordonați prin exemple :

Exemple. Presupunem că x_i sînt cu valori reale

18) Fie $v_n = x_1 + x_2 + \ldots + x_n$ și t_i primul n astfel ca $|v_n| \geqslant a_i$ sau $+\infty$ dacă astfel de n nu apar. Luăm a_i crescător și $\mathscr{C}_n = \mathscr{B}(v_n,\ x_{n+1}, \ldots)$. Se ia $V_{ni} = (-a_i,\ a_i)$ și se observă că se aplică teorema 42. (exemplu motivat de regula de stopare a T.S.R.P. a lui Wald).

Scanned with OKEN Scanner

19) Fie $v_n = (\bar{x}_n, s_n)$ unde $s_n = \sum_1^n (x_i - \bar{x}_n)^2$. Considerăm timpii de oprire continui: t_d este primul $n \geqslant 1$ astfel ca $s_n \leqslant b_n a(d)$, sau este $+\infty$ dacă astfel de n nu apar. Luăm $a(\cdot)$ crescători, $\{b_n\}$ un şir crescător de constante pozitive arbitrare şi $\mathscr{C}_n = \mathscr{B}(v_n, x_{n+1}, \ldots)$. $c \leqslant d \to t_c \geqslant t_d$ şi punem $V_{nd} = [0, b_n a(d)]$. Teorema 42 arată că $\{t_d : d \geqslant 0\}$ este C-ordonată. Fie $t_{c+} = \lim_{d \downarrow c} t_d$ şi $t_{c-} = \lim_{d \uparrow c} t_d$. Deoarece aceste limite monotone sînt secvenţiale teorema 40 arată că sistemul

$$\{t_d,\ t_{d+},\ t_{d-} : c > 0,\ d \geqslant 0\}$$

este C-ordonat. (Exemplu motivat de un procedeu secvenţial propus de Chow, Robbins (1965)).

§ 13. Intervale de încredere neparametrice secvenţiale

Geertsema (1970) a aplicat metoda lui Chow, Robbins (1965) la construcţia unui interval de încredere neparametric secvenţial pentru parametrii anumitor repartiţii.

O metodă generală pentru construcţia intervalelor de încredere de lungime mărginită

Fie $X_1, X_2, \ldots, X_n$ o selecţie de volum n (fix) asupra unei variabile aleatoare avînd funcţia de repartiţie F ce depinde de un parametru. Sîntem interesaţi în construcţia unui interval de încredere pentru θ a cărui lungime $< 2d$. Pentru fiecare întreg pozitiv n, considerăm două statistici $\underline{\theta}_n$ şi $\bar{\theta}_n$ (ce nu depind de d) bazate pe primele n observaţii astfel încît $\underline{\theta}_n < \bar{\theta}_n$ a.s. şi $\lim_{n\to\infty} P(\underline{\theta}_n \leqslant \theta \leqslant \bar{\theta}_n) = 1 - \alpha$ [astfel că, pentru valori mari ale lui n, $(\underline{\theta}_n, \bar{\theta}_n)$ este un interval de încredere pentru θ cu probabilitatea de acoperire (coeficientul de încredere) aproximativă $1 - \alpha$]. Definim variabila de stopare N ca primul întreg $n \geqslant n_0$ astfel ca

$$\bar{\theta}_n - \underline{\theta}_n \leqslant 2d,$$

unde n_0 este un întreg pozitiv. Luăm $(\underline{\theta}_N, \bar{\theta}_N)$ ca interval de încredere. Atunci se ridică două probleme.

i) care este probabilitatea de acoperire a procedeului?

ii) care este valoarea medie a volumului selecţiei?

La aceste întrebări se poate răspunde asimptotic cînd $d \to 0$, cu următoarele presupuneri de regularitate.

(A1) $\underline{\theta}_n < \bar{\theta}_n$ a.s. ($\underline{\theta}_n$ şi $\bar{\theta}_n$ independente de d),

(A2) $n^{1/2}(\bar{\theta}_n - \underline{\theta}_n) \to 2u_{1-\frac{\alpha}{2}}/A$ a.s. cînd $n \to \infty$ unde $A > 0$ şi

$$\Phi(u_{1-\frac{\alpha}{2}}) = 1 - \frac{\alpha}{2}$$

Scanned with OKEN Scanner

(A3) $$n^{1/2}(\overline{\theta}_n - \underline{\theta}_n) = Z_n/A - u_{1-\frac{\alpha}{2}}/A + 0(1) \text{ a.s.}$$

cînd $n \to \infty$ unde Z_n este o medie de variabile aleatoare independente şi identic repartizate cu momentul de ordinul 2 finit standardizată.

(A4) mulţimea $\{Nd^2\}_{d>0}$ este uniform integrabilă.

TEOREMA 43. (Geertsema (1970)) *În presupunerile* (A1) — (A4) (i) *N este bine definită, $M(N) < \infty$ pentru toţi $d > 0$, $N(= N(d))$ este o funcţie de d care este nedescrescătoare cînd d descreşte,*

$$\lim_{d\to 0} N = \infty \text{ a.s., şi } \lim_{d\to 0} M(N) = \infty.$$

(ii) $$\lim_{d\to 0} Nd^2 = u^2_{1-\frac{\alpha}{2}}/A^2 \text{ a.s. şi } \lim_{d\to 0} M(Nd^2) = u^2_{1-\frac{\alpha}{2}}/A^2.$$

(iii) $$\lim_{d\to 0} P(\underline{\theta}_N \leqslant \theta \leqslant \overline{\theta}_N) = 1 - \alpha.$$

Demonstraţie (i) Din (A2) urmează că N este bine definită (adică pentru toţi $d > 0$ finită a.s.). Din (A4) urmează că $M(N) < \infty$ pentru toţi $d > 0$. Definiţia variabilei N şi teorema 19 demonstrează complet (i)

(ii) Din definiţia variabilei N

$$\overline{\theta}_N - \underline{\theta}_N \leqslant 2d \text{ şi } \overline{\theta}_{N-1} - \underline{\theta}_{N-1} > 2d.$$

Folosind faptul că $N \to \infty$ a.s. cînd $d \to 0$ şi (A2), obţinem

$$\liminf_{d\to 0} 2dN^{1/2} \geqslant \liminf_{d\to 0} N^{1/2}(\overline{\theta}_N - \underline{\theta}_N) = 2u_{1-\frac{\alpha}{2}}/A \text{ a.s.}$$

$$\limsup_{d\to 0} 2d(N-1)^{1/2} \leqslant \limsup_{d\to 0} (N-1)^{1/2}(\overline{\theta}_{N-1} - \underline{\theta}_{N-1}) = 2u_{1-\frac{\alpha}{2}}/A \text{ a.s.}$$

care împreună dau prima presupunere. A doua urmează din (A4).

iii) O teoremă a lui Anscombe (1952) împreună cu prima presupunere din (ii) a teoremei de faţă implică că, asimptotic, $Z_N \sim N(0, 1)$. Din (A3) urmează că repartiţia asimptotică a statisticii

$$N^{1/2}(\underline{\theta}_N - \theta)$$

este normală cu media $-u_{1-\frac{\alpha}{2}}/A$ şi dispersia $1/A^2$, cînd $d \to 0$, astfel ca

$$\lim_{d\to 0} P(0 \leqslant N^{1/2}(\theta - \underline{\theta}_N) \leqslant 2u_{1-\frac{\alpha}{2}}/A) = 1 - \alpha.$$

Totuşi, după (A2) şi prima parte a lui (ii) $N^{1/2}(\overline{\theta}_N - \underline{\theta}_N) = 2u_{1-\frac{\alpha}{2}}/A + o_p(1)$ cînd $d \to 0$, astfel că (iii) are loc

Un procedeu bazat pe testul semnului

Fie $X_1, X_2, \ldots, X_n$ variabile aleatoare independente identic repartizate avînd mediana γ unică. Pentru verificarea ipotezei $\gamma = 0$ se poate

Scanned with OKEN Scanner

folosi testul semnului bazat pe statistica $\sum_{i=1}^{n} I(X_i > 0)$ unde $I(\cdot)$ este funcţia indicator a mulţimii. În cazul unei selecţii de volum fix n, din testul semnului se poate obţine un interval de încredere pentru γ. Acest interval de încredere este de forma $(X_{n,\,b(n)},\ X_{n,\,a(n)})$ unde

$$X_{n,1} \leqslant X_{n,2} \leqslant \ldots \leqslant X_{n,n}$$

$a(n)$ şi $b(n)$ sînt întregi ce depind de n.

Dacă

(192) $$a(n) \simeq n/2 + u_{1-\frac{\alpha}{2}} n^{1/2}/2 \text{ şi } b(n) = n/2 - u_{1-\frac{\alpha}{2}} n^{1/2}/2$$

probabilitatea de acoperire a unui astfel de interval, cînd $n \to \infty$, este $1 - \alpha$. Din acest interval de încredere se poate obţine un procedeu secvenţial după cum urmează: Fie N primul întreg $n > n_0$ pentru care

$$X_{n,\,a(n)} - X_{n,\,b(n)} \leqslant 2d$$

şi alegem ca interval de încredere $(X_{N,\,b(N)},\ X_{N,\,a(N)})$ unde $\{a(n)\}$ şi $\{b(n)\}$ sînt şiruri de întregi pozitivi ce satisfac presupunerea (A5) şi n_0 este un întreg. Se mai face presupunerea

(A5) Fie $X_1, X_2, \ldots$ un şir de variabile aleatoare independente, identic repartizate cu funcţia de repartiţie $F(x - \gamma)$ unde $F(x)$ este simetrică faţă de zero. F are două derivate în vecinătatea lui zero şi a doua derivată este mărginită în această vecinătate astfel că γ este unica mediană a variabilei X. Şirurile $\{a_n\}$ şi $\{b_n\}$ sînt definite de

$$b_n = \max\{1,\ [n/2 - u_{1-\frac{\alpha}{2}} n^{1/2}/2]\},\quad a_n = n - b_n + 1$$

unde $[x]$ reprezintă cel mai mare întreg conţinut în x. Arătăm că procedeul anterior satisface (A1)—(A4). Fără a pierde din generalitate putem presupune că $\gamma = 0$. Folosim reprezentarea cuantilelor dată de Bahadur (1966): În presupunerea (A5)

(193) $$X_{n,\,k(n)} - \xi = [k(n)/n - F_n(\xi)]/f(\xi) + 0(n^{-3/4} \ln n) \text{ a.s.}$$

unde: $\{k(n)\}$ este un şir de întregi pozitivi ce satisfac

$$k(n) = np + 0(n^{1/2} \ln n),\ 0 < p < 1,$$

$F(\xi) = p$,

$F'(\xi) = f(\xi)$ şi

F_n este funcţia de repartiţie empirică.

TEOREMA 43. (Geertsema (1970)) *Avem*:

$$n^{1/2}(X_{n,\,a(n)} - X_{n,\,b(n)}) \to u_{1-\frac{\alpha}{2}}/f(0) \text{ a.s. } \textit{cînd } n \to \infty$$

Scanned with OKEN Scanner

Demonstrație. Din (193) urmează că

$$n^{1/2}(X_{n,\,a(n)} - X_{n,\,b(n)}) = \frac{a(n) - b(n)}{n^{1/2}} \cdot \frac{1}{f(0)} + 0(n^{-1/4} \ln n) \text{ a.s.}$$

$$\to u_{1-\frac{\alpha}{2}}/f(0) \text{ cînd } n \to \infty \text{ a.s.}$$

TEOREMA 44 (Geertsema (1970)) *Avem:*

$$n^{1/2}X_{n,\,b(n)} = Z_n/A - u_{1-\frac{\alpha}{2}}/A + 0(1) \text{ a.s. } \textit{cînd } n \to \infty$$

unde $A = -2f(0)$, $Z_n = 2n^{1/2}\left(F_n(0) - \frac{1}{2}\right)$

Demonstrația rezultă din (193)

TEOREMA 45. (Yahav, Bickel (1968)) *Fie* $\{Y_n\}$ *un șir de variabile aleatoare pe un spațiu probabilistic* $(\Omega, \mathfrak{B}, P)$ *ce tinde în repartiție către variabila* Y. *Fie* $a_{mn} = P(Y_n > m)$ *: și* $\sup_n a_{mn} = a_m$. *Atunci*

$$\Sigma a_m < \infty \tag{194}$$

implică că $M(Y_n)$ *și* $M(Y)$ *sînt finite și* $M(Y_n) \to M(Y)$.

Demonstrație. Avem:

$$\int_{\{Y_n > m\}} |Y_n| \, dP \leqslant \sum_{k=m}^{\infty} (k+1) \, P(k < |Y_n| \leqslant k+1) =$$

$$= (m+1) \, P(|Y_n| > m) + \sum_{k=m}^{\infty} P(|Y_n| > k) \leqslant (m+1) \, a_m + \sum_{k=m}^{\infty} a_k.$$

Dacă are loc (194), deoarece $a_m \searrow$, $ma_n \to 0$. Astfel (194) implică că $\{Y_n\}$ este uniform integrabil.

TEOREMA 46. (Geertsema (1970)) *Mulțimea* $\{Nd^2\}_{d>0}$ *este uniform integrabilă.*

Demonstrație. După teorema 45 este suficient să arătăm că

$$\sum_{m=1}^{\infty} \sup_{0<d<d_0} P[N(d) \, d^2 > m] < \infty \text{ pentru anumite } d_0.$$

Cu notațiile $m(d) = [m/d^2]$, $S_n(t) = \sum_{i=1}^{n} I(X_i \leqslant t)$, avem

$$P[N(d)d^2 > m] = P[N(d) > m(d)] \leqslant$$

$$\leqslant P[X_{m(d),\,a(m(d))} - X_{m(d),\,b(m(d))} > 2d] \leqslant$$

$$\leqslant P[S_{m(d)}(d) < a(m(d))] + P[S_{m(d)}(-d) \geqslant b(m(d))] =$$

$$= 2P[B(m(d), \, F(-d)) \geqslant b(m(d))],$$

Scanned with OKEN Scanner

unde $B(n, p)$ este variabila binomială de parametrii n și p. Atunci, după Hoeffding (1963), avem :

$$P[N(d)d^2 > m] \leqslant 2 \exp\{ - 2m(d)\ t^2_{m(d)}\},$$

unde : $t_{m(d)} = \{b(m(d)) - m(d)\ F(-d)\}/m(d) \geqslant d\delta$ pentru anumiți $\delta > 0$ pentru $d \leqslant d_0$ și $m \geqslant M_0$ unde $d_0 > 0$ și M este suficient de mare. Deci, pentru $d \leqslant d_0$ și $m \geqslant M_0$ și o constantă A

$$P[N(d)d^2 > m] < A\ \exp\ (-\ 2m\delta^2)$$

ceea ce dovedește uniform integrabilitatea deoarece $\sum_{m=M_0}^{\infty} \exp\ (-2m\ \delta^2) < \infty$.

TEOREMA 47. (Geertsema (1970)). *Procedeul intervalului de încredere bazat pe testul semnului are asimptotic probabilitatea de acoperire* $1 - \alpha$ *cînd* $d \to 0$. *Variabila de stopare* N *satisface*

$$\lim_{d\to 0} M(Nd^2) = u^2_{1-\frac{\alpha}{2}}/4f^2(0)$$

Demonstrația rezultă din teoremele 43—46.

Scanned with OKEN Scanner

BIBLIOGRAFIE

1. AIVAZIAN, A. S., *A comparison of the optimal properties of the Neyman-Pearson and the Wald sequential probability ratio test.* Theory of Probability and Its Application, *4*, 86—93 (1959).
2. AIVAZIAN, A. S., *Distinguishing neighboring hypotheses about frequency distributions in the scheme of the generalized probability ratio test.* Theory of Probability and Its application, *10*, 646—658 (1965).
3. ALAM, K., *A two — sample estimate of a common mean.* Ann. Inst. Statist. Mat., *19*, 261—270 (1967).
4. ALBERT, G. E., *A note on the fundamental identity of sequential analysis.* Ann. Math. Statist., *18*, 593—596 (1947). Corecţie în Ann. Math. Statist., *19*, 426—427.
5. ALBERT, G. E., *On the computation of the sampling characteristics of a general class of sequential decision functions.* Ann. Math. Statist., *25*, 340—356 (1954).
6. ALBERT, G. E., *Accurate sequential tests on the mean of an exponential distribution.* Ann. Math. Statist., *27*, 460—470 (1956).
7. ANDERSON, T. W., *A modification of the sequential probability ratio test to reduce the sample size.* Ann. Math. Statist., *31*, 165—197 (1960).
8. ANSARI, A. R., BRADLEY, R. A., *Rank — sum tests for dispersions.* Ann. Math. Statist., *31*, 1174—1189 (1960).
9. ASCOMBE, F. J., *Tables of sequential inspection schemes to control fraction defective.* J. Roy. Statist. Soc., **A**. *112*, 180—206 (1949).
10. ASCOMBE, F. J. *Large sample theory of sequential estimation.* Biometrika, *36*, 455—458 (1949).
11. ASCOMBE, F. J. *Large sample theory of sequential estimation.* Proc. Cambridge Philos. Soc., *48*, 600—607 (1952).
12. ASCOMBE, F. J., *Sequential estimation (cu discuţie).* J. Roy. Statist. Soc., **B**, *15*, 1—29 (1953).
13. ARMITAGE, P., *Some sequential tests Student's hypothesis.* J. Roy. Statist. Soc. Suppl., *9*, 250—263 (1947).
14. ARMITAGE, P., *Sequential analysis with more than two alternative hypotheses, and its relation to discriminant function analysis.* J. Roy. Statist. Soc. **B**., *12*, 137—144 (1950).
15. ARMITAGE, P., *Restricted sequential procedures.* Biometrika, *44*, 9—26 (1957).
16. AROIAN, L. A., ROBISON, D. E., *Direct methods for exact truncated sequential tests of the mean of a normal distribution.* Technometrics, *11*, 661—675 (1969).
17. BAHADUR, R. *Sufficiency and statistical decision function.* Ann. Math. Statist., *25*, 423—462 (1954).
18. BAHADUR, R., *A note on the fundamental identity of sequential analysis.* Ann. Math. Statist., *29*, 534—543 (1958).
19. BAHADUR, R. R., *A note on quantiles in large samples.* Ann. Math. Statist., *37*, 577—580 (1966).
20. BAKER, A. G., *Properties of some tests in sequential analysis.* Biometrika, *37*, 334—346 (1950).
21. BARNARD, G. *A., Sequential tests in industrial statistics* (cu discuţie) J. Roy Soc. Suppl., *8*, 1—26 (1946).
22. BARNARD, G. A., *The frequency justification of certain sequential tests.* Biometrika, *39*, 144—150 (1952). (completare Biometrika *40*. 468—469).
23. BARRACLONGH, E. D., PAGE, E. S., *Tables for Wald tests for mean of a normal distribution.* Biometrika, *46*, 169—177 (1959).
24. BARTKY, W., *Multiple sampling with constant probability.* Ann. Math. Statist., *14*, 363—377 (1943).
25. BARTLETT, M. S., *The large sample theory of sequential tests.* Proc. Combridge Philos. Soc., *42*, 239—244 (1946).
26. BECHHOFER, R., *A note on the limiting relative efficiency of the Wald sequential probability ratio test.* J. Amer. Statist. Assoc., *55*, 660—663 (1960).
27. BECHHOFER, R. E., KIEFER, J., SOBEL, M., *Sequential Identification and Ranking Procedures.* Univ. of Chicago Press, 1968.

Scanned with OKEN Scanner

28. Berk, R. H., *Stopping time of SPRTS based on exchangeable models.* Ann. Math. Statist., *41*, 979—990 (1970).
29. Berk, R. H., *Strong consistency of certain sequential estimation.* Ann. Math. Statist., *40*, 1492—1495 (1969). Corectie Ann. Math. Statist., *42*, 1135—1137 (1971).
30. Berk, R. H., *Some asymptotic aspects of sequential analysis.* Ann. Math. Statist., *1*, 1126—1138 (1973).
31. Berk, R. H., *Locally most powerful sequential tests.* Ann. Statist. *3*, 373—381 (1975).
32. Berk, R. H., *Asymptotic efficiencies of sequential tests.* Ann. Statist., *4*, 891—911 (1976).
33. Berk, R. H., Bickel, P. J., *On invariance and almost invariance.* Ann. Math. Statist., *39*, 1573—1576 (1968).
34. Berk, R. H., Savage, I. R., *The information in rank order and the stopping time of some associated SPRT's.* Ann. Math. Statist., *39*, 1661—1674 (1968).
35. Bhate, D. H., *Some properties of sequential tests.* Doctoral Dissertation. Univ. of London, London, 1955.
36. Bhate, D. H., *Approximation to the distribution of sample size for sequential tests. I. Tests of simple hypotheses.* Biometrika, *46*, 130—138 (1959).
37. Bhattacharya, A., *On some analogues of the amount of information and their use in statistical estimation.* Sankhyã, *8*, 1—14 (1946).
38. Bickel, P. J., Yahav, J., *Asymptotically pointwise optimal procedures in squeential analysi.* Proc. Fifth Berkeley Symp. Math. Statist. Prob., *1*, 401—414, Univ. of California Press (1967 a).
39. Bickel, P. J., Yahav, J., *On testing sequentially the mean of a normal distribution.* Technical report no. 26. Stanford Univ., *10* (1967 b).
40. Birnbaum, A., Healy, W. C., Jr., *Estimates with prescribed variance based on twostage sampling.* Ann. Math. Statist., *31*, 662—676 (1960).
41. Birnbaum, Z. W., Tingey, F. H., *One-sided confidence contours for probability distribution functions.* Ann. Math. Statist., *22*, 592—596 (1951).
42. Blackwell, D., *On an equation of Wald.* Ann. Math. Statist., *17*, 84—87 (1946).
43. Blackwell, D., *Extension of a renewal theorem.* Pacific J. Math., *3*, 315—320 (1953).
44. Blackwell, D., Girshick, M. A., *On function of sequence of independent chance vectors with applications for the problem of the „random Walk, in k dimensions.* Ann. Math. Statist., *17*, 310—317 (1946).
45. Blackwell, D., Girshich, M. A., *A lower bound for the variance of some unbiased sequential estimates.* Ann. Math. Statist., *18*, 277—280 (1947).
46. Blasbalg, H., *Experimental results in sequential detection.* Trans. Inst. Radio Eng. Infor. Theory, *5*, 41—51 (1959).
47. Box, G., E., P., *Non-normality and tests on variances.* Biometrika, *40*, 318 (1935).
48. Box, G., E., P., Anderson, S. .L, *Permutation theory in the derivation of robust criteria and the study of departures assumption.* J. R. Statist., Soc., **B**, *17*, 1—34 (1955).
49. Bradley, R. A., *Topics in rank order statistics.* Proc. Symp. Math. Statist. Probability, 5 th. Berkeley 1965, *1*, 609—638. Univ. of California Press, Berkeley, 1967.
50. Bradley, R. A., Martin, D. C., Wilcoxon, F., *Sequential rank tests* I. *Monte Carlo studies of the two-sample procedure.* Technometrics, *7*, 463—483 (1965).
51. Bradley., R. A., Merchant, S. D., Wilcoxon, F., *Sequential rank tests* II. *Modified two-sample procedure.* Technometrics, *8*, 615—623 (1966).
52. Burkholder, D. L., Wijsman, R. A., *Optimum properties and admissibility of sequential tests.* Ann. Math. Statist., *34*, 1—17 (1963).
53. Capon, J., *Asymptotic efficiency of certain locally most powerful rank tests.* Ann. Math. Statist., *32*, 88—100 (1961).
54. Chand, Nanak, *Sequential tests of Composite Hypotheses.* JASA, **69**. *346*, 394—398 (1974).
55. Chapman, D. G., *The estimation of biological populations.* Ann. Math. Statist., *25*, 1—15 (1954).
56. Chernoff, H., *A measure of asymptotic efficiency for tests of a hypothesis based on the sum of observations.* Ann. Math. Statist., *23*, 493—507 (1952).
57. Chernoff, H., *Large sample theory : parametric case.* Ann. Math. Statist., *27*, 1—22 (1956).
58. Chernoff, H., *Sequential test for the mean of a normal distribution III (Small t).* Ann. Math. Statist., *36*, 28—54 (1965).
59. Chernoff, H., Savage, I. R., *Asymptotic normality and efficiency of certain nonparametric test statistics.* Ann. Math. Statist., *29*, 972—994 (1958).
60. Chow, Y. S., Robbins, H., *On the asymptotic theory of fixed-width sequential confidence intervals for the mean.* Ann. Math. Statist., *36*, 457—462 (1965).
61. Chow, Y. S., Robbins, H., Teicher, H., *Moments of randomly stopped sums.* Ann. Math. Statist., *36*, 789—799 (1965).
62. Chung, K.L., *An estimate concerning Kolmogorov limit distribution* Trans. Amer. Math Soc., *67*, 36—50 (1949).

Scanned with OKEN Scanner

63. Ciucu, G., Craiu, V., *Teoria estimației și verificarea ipotezelor statistice.* Ed. didactică și pedagogică, București, 1968.
64. Ciucu, G., Craiu, V., *Inferență statistică.* Ed. didactică și pedagogică, București, 1974.
65. Cox, D. R., *Sequential tests for composite hypotheses.* Proc. Cambridge Philos. Soc., *48*, 290—299 (1952 a).
66. Cox, D. R., *Estimation by double sampling.* Biometrika, *39*, 217—227 (1952 b).
67. Cox, D. R., *A note on the sequential estimation of means.* Proc. Cambridge Philos. Soc., *48*, 447—450 (1952 c).
68. Cox, D. R., *Large-sample sequential tests for composite hypotheses.* Sankhyà, **A**, *25*, 5—12 (1963).
69. Craiu, V., *Verificarea ipotezelor statistice.* Ed. didactică și pedagogică, București, 1972.
70. Craiu, V., *Probleme de decizie statistică, de estimare a parametrilor și de testare a ipotezelor statistice.* Centrul de multiplicare al Universității din București, 1977.
71. Cramér, H., *Random variables and probability distributions.* Camb. Tracts. Math., *36*, 1937.
72. Cramér, H., *Mathematical methods of statistics.* Princeton 1946.
73. Curelaru, L., Vodă, V. Gh., *Some notes on Rayleigh distribution.* Revista Colombiana de Matemátias. IX, 9—22 (1975).
74. Dantzig, G. B., *On the nonexistence of tests of "Students" hypothesis having power functions independent of σ.* Ann. Math. Statist., *11*, 186—192 (1940).
75. Darling D. A., Robbins, H., *Confidence sequences for mean, variance and median.* Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A., *58*, 66—68 (1967 a).
76. Darling D. A., Robbins, H., *Inequalities for the sequence of sample means.* Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A., *57*, 1577—1580 (1967 c).
77. Darling D. A., Robbins, H., *Fending the size of a finite population.* Ann. Math. Statist., *38*, 1392—1398 (1967 d).
78. Darling, D. A., Robbins, H., *Some further remarks on inequalities for sample sums.* Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A., *60*, 1175—1182 (1968 a).
79. Darling, D. A., Robbins, H., *Some nonparametric sequential tests with power one.* Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A., *61*, 804—809 (1968 b).
80. Darroch, J. N., *The multiple recapture census. I. Estimation of a closed population.* Biometrika, *45*, 343—359 (1958).
81. David, H. T., Kruskal, W. H. *The WAGR sequential t-test reaches a decision with probability one.* Ann. Math. Statist. *27*, 797—805 (1956).
82. De Groot, M. H., *Unbiased binomial sequential estimation.* Ann. Math. Statist., *30*, 80—101 (1959).
83. Dixon, W. J., Mood, A. M., *A method for obtaining and analyzing sensitivity data.* J. Amer. Statist. Ass., *43*, 109—126 (1948).
84. Dodge, H. F., Roming, H. G., *A method of sampling inspection.* Bell. Syst. Tech. J., *8*, 613—631 (1929).
85. Dorin, Al. C., Iliescu, D. V. and Vodă V. Gh., *Testing accuracy of NC machine tools by sequential methods.* 8 — Wekzeugmaschinen Kongress, Budapest, oct. 11—15 (1976).
86. Dvoretzky, A., Kiefer, J., Wolfowitz, J., *Sequential decision problems for processes with continuous time parameter: testing hypotheses.* Ann. Math. Statist., *24*, 254—264 (1953).
87. Dwass, M., *On the asymptotic normality of some statistics used in nonparametric tests.* Ann. Math. Statist., *26*, 334—339 (1955).
88. Dwass, M., *The large sample power of rank tests in the two sample problems.* Ann. Math. Statist., *27*, 352—374 (1956).
89. Eisenberg, B., Ghosh, B. K., Simons, G., *Properties of generalized sequential probability ratio tests.* Ann. Statist., *4*, 237—251 (1976).
90. Feller, W., *An Introduction to Probability Theory and Its Applications.* Vol. II. Wiley, New York 1970.
91. Fisz, M., *Probability theory and Mathematical Statistics.* Wiley, New York, 1963.
92. Fraser, D.A.S., *Nonparametric tolerance regions.* Ann. Math. Statist., *24*, 44—45 (1953).
93. Fraser, D. A. S., *Most powerful rank-type tests.* Ann. Math. Statist., *28*, 1040—1043 (1957 a).
94. Fraser, D.A.S., *Nonparametric Methods in Statistics.* John Wiley New York, 1957 b.
95. Freedman, D., *Browinian Motion and Diffusion.* Holden-Day. San Francisco, 1971.
96. Freedman, D., Weiss, L., *Sampling plans which approximately minimize the maximum expected sample size.* J. Amer. Statist. Ass., *59*, 67—88 (1964).
97. Freedman, H. A., *Sequential analysis of statistical data: application.* Stat. Res. Group Rep. 255, Columbia Univ., 1944.
98. Gastwirth, J. L., Wolff, S. S., *An elementary method for optaining lower bounds on the asymptotic power of rank tests.* Ann. Math. Statist., *39*, 2128—2131 (1968).
99. Geertsema, J. C., *Sequential confidence intervale based on rank tests.* Ann. Math. Statist., *41*, 1016—1026 (1970).

Scanned with OKEN Scanner

100. Gheorghe F. C., Oreja, G., Şerbu, Mihaela, *Folosirea lanţurilor Markov la evaluarea exactă a funcţiilor OC şi ASN pentru un plan secvenţial de control.* Studii cerc. mat., *27*, 303—312 (1975).
101. Ghosh, J. K., *On some properties of sequential t-test.* Calcutta Statist. Assoc. Bull., *9*, 77—86 (1960 a).
102. Ghosh, J. K., *On the monotonicity of the OC of a class of sequential probability ratio tests* Calcutta Statist. Assoc. Bull., *9*, 139—144 (1960 b).
103. Ghosh, B. K., *Moments of the distribution of sample size in a SPRT.* J. Amer. Stat. Ass. 1560—1575 (1969).
104. Ghosh, B. K., *Sequential tests of statistical hypotheses.* Addison Wesley Publishing Company London, 1970.
105. Ghurye, S. G., Robbins, H., *Two-stage procedures for estimating the difference between means.* Biometrika, *41*, 146—152 (1954).
106. Girshick, M. A., Mosteller, F., Savage, L. J., *Unbiased estimates for certain binomial sampling problems with applications.* Ann. Math. Statist., *17*, 13—23 (1946).
107. Goodman, L. A., *Sequential sampling tagging for population size problems.* Ann. Math. Statist., *24*, 56—69 (1953).
108. Govindarajulu, Z., *Sequential statistical procedures.* Academic. Press, New York, 1975.
109. Govindarajulu, Z., Lecam, L., Raghavachari, M., *Generalizations of the theorems of Chernoff and Savage on the asymptotic normality of test statistics.* Proc. Symp. Math. Statist. Probability. 5th Berkeley 1965, *1*, 603—638. Univ. of Carolina Press, Berkely, 1967.
110. Graybill, F. A., Connell, T.L., *Sample size for estimating the variance width in d units of the true value.* Ann. Math. Statist., *35*, 438—440 (1964 a).
111. Graybill, F. A., Connell, T. L., *Sample size required to estimate the parameter in the uniform density within d units.* J. Amer. Statist. Ass., *59*, 550—556 (1964 b).
112. Greenwood, J. A., Sandomire, M. M., *Sample size required for estimating the standard deviation as a percent of its true value.* J. Amer. Statist. Assoc., *45*, 257—260 (1950).
113. Groenveld, R. A., *A note on the sequential sign test.* Amer. Statist., **25**, *2*, 15—16 (1971).
114. Gundy, R. F., Siegmund, D., *On a stopping rule and the central limit theorem.* Ann. Math. Statist., *38*, 1915—1917 (1967).
115. Hájek, J., *Some extensions of the Wald-Wolfowitz-Noether theorem.* Ann. Math. Statist., *32*, 506—523 (1961).
116. Hájek, J., *Asymptotically most powerful rank order tests.* Ann. Math. Statist., *33*, 1124—1147 (1962).
117. Hájek, J., *Asymptotic normality of some linear rank statistics under alternatives.* Ann. Math. Statist., *39*, 225—246 (1968).
118. Hájek, J., Sidak, Z., *Theory of Rank Tests.* Academic Press, New York, 1967.
119. Haldane, J.B.S., *On a method of estimating frequencies.* Biometrika, *33*, 222—225(1945).
120. Hall, W. J., *Some sequential analogs of Stein's two-stage test.* Biometrika, *49*, 367—378 (1962).
121. Hall, W. J., *Methods of Sequential Testing Composite Hypotheses with special Reference to two-Sample Problem.* Mimeo, series **441**, 40—41. Inst. of Statist. Univ. of North Carolina Hill 1965.
122. Hall, W. J., Wijsman, R. A., Ghosh, J. K., *The relationship between sufficiency and invariance with applications in sequential analysis.* Ann. Math. Statist., *36*, 575—614 (1965).
123. Hewitt, E., Savage, L. J. (1955), *Symmetric measures on cartesian products.* Trans. Amer. Math. Soc., *80*, 470—501 (1955).
124. Hodges, J. L., Lehmann, E. L., *The efficiency of some nonparametric competitors of the t-test.* Ann. Math. Statist., *27*, 324—335 (1956).
125. Hodges, J.L., Lehmann, E. L., *Comparison of the normal scores and Wilcoxon tests.* Proc. Fourth. Berkeley Symp., *1*, 307—317 (1961).
126. Hodges, J. L., Lehmann, E. L., *Rank method for combination of independents experiments in analysis of variance.* Ann. Math. Statist., *33*, 482—497 (1962).
127. Hodges, J. ., Lehmann, E. L., *Estimation of location based on rank tests.* Ann. Math. Statist., *35*, 598—611 (1963).
128. Hoeffding, W., *A class of statistics with asymptotically normal distribution.* Ann. Math. Statist., *19*, 293—325 (1948).
129. Hoeffding, W., *Optimum nonparametric tests.* Proc. Second Berkeley Symp. on Probab. and Statist., *83—92*. University of California Press (1951).
130. Hoeffding, W., *The large-sample power of tests based on permutations of observations.* Ann. Math., Statist., *23*, 169—192 (1952).
131. Hoeffding, W., *A lower bound for the average sample number of a sequential test.* Ann. Math. Statist., *24*, 127—130 (1953).
132. Hoeffding, W., *Lower bounds for the expected sample size and the average risk of a sequential procedure.* Ann. Math. Statist., *31*, 352—368 (1960).

Scanned with OKEN Scanner

133. Hoeffding, W., *Probability inequalities for sums of bounded random variables.* J. Amer. Statist. Assoc., *58*, 13—30 (1963).
134. Hoeffding, W., *On the centering of a sample linear rank statist.* Inst. Statist. Univ. North Carolina Mineo Series *585*, 1968.
135. Hoel, P. G., *On a property of the sequential t-test.* Skand. Aktuarietidsks., *37*, 19—22 (1954).
136. Hoel, P. G., *On a sequential test for the general linear hypothesis.* Ann. Math. Statist., *26*, 136—139 (1955).
137. Hoel, P. G., Mazumdar, M., *A class of sequential tests for an exponential parameter.* J. Amer. Statist. Ass., *64*, 1549—1559 (1969).
138. Huskova, M., *Asymptotic distribution of simple linear rank statistics for testing symmetry.* Zeit fur Warhrsch. verw. Geb., *12* (1969).
139. Iram, A. F., *On the asymptotic behavior of densities with application to sequential analysis.* Ann. Math. Statist., *36*, 615—637 (1965).
140. Iliescu, D. V., Obreja, Gh., Vodă, V. Gh., *Metodă de verificare a ipotezelor statistice în controlul proceselor tehnologice în industrie.* Revista de Statistică, Anul XX, *4*, 44—54 (1971).
141. Iliescu D. V., Vodă, V. Gh., *Asupra unei repartiții folosite în teoria siguranței.* Studii și cercetări matematice, **26**, *1*, 15—34 (1974).
142. Iosifescu, M., Mihoc, Gh., Theodorescu, R., *Teoria probabilităților și statistică matematică.* Ed. tehnică, București, 1966.
143. Johnson, N. L., *Some notes on the application of sequential test for the general linear hypothesis.* Ann. Math. Statist., *24*, 614—623 (1953).
144. Johnson, N. L., *Sequential analysis: a survey* J. Roy. Statist. Soc., **A**, *124*, 372—412 (1961)
145. Jones, H. L., *Formulas for the group sequential sampling of attributes.* Ann. Math. Statist. *23*, 72—87 (1952).
146. Jonkheere, A. R., *A distribution-free k-sample test against ordered alternatives.* Biometrika, *41*, 135—145 (1954).
147. Jurečková, J., *Asymptotic linearity of a rank statistic in regression parameter.* Ann. Math Statist., *40*, 1889—1900 (1969).
148. Kendall, M. G., *A new measure of rank correlation.* Biometrika, *30*, 81—93 (1938).
149. Kendall, M. G., Stuart, A., *The Advanced theory of statistics.* Vol. 2 Griffen &Co., London, 1961.
150. Kemp, K. W., *Formulae for calculating the operating characteristic and the average sample number of some sequential tests.* J. Roy Statist. Soc., **B**, *20*, 379—386 (1958).
151. Kemp, K. W., *Formal expressions which can be used for the determination of the operating characteristic and average sample number of a simple sequential test.* J. R. Statist. Soc. **B**., *20*, 248—262 (1967).
152. Kemp, K. W., *Convergent Sequences of Bounds for Some Parameters of a Simple Sequential Test.* J. R. Statist. Soc., **B**., *32*, 241—254 (1970).
153. Khan, R. A., *A general method of determining fixed-width confidence intervals.* Ann. Math. Statist., *40*, 704—709 (1969).
154. Kiefer, J., Weiss, L., *Some properties of generalized sequential probability ratio tests.* Ann. Math. Statist., *28*, 57—74 (1957).
155. Kingmann, J.F.C., *Some inequalites for the queue-GI/G/1.* Biometrika, *48*, 315—324 (1962).
156. Klotz, J., *Nonparametric tests for scale.* Ann. Math. Statist., *33*, 498—512 (1962).
157. Knight, W. A. *A method of sequential estimation applicable to the hypergeometric, binomial, Poisson, and exponential distributions.* Ann. Math. Statist., *36*, 1494—1503 (1965).
158. Knudsen, L. F., *A method for determining the significance of a shortage.* J. Amer. Statist. Ass., *38*, 466—470 (1943).
159. Kruskal, W. H., Wallis, W. A., *Use of ranks in one criterion variance analysis.* J. Amer. Statist. Ass., *47*, 583—621 (1952).
160. Lai, T.L., *Optimal stopping and sequential test which minimize the maximum expected sample size.* Ann. Math. Statist., *1*, 659—673 (1973).
161. Lawing, W. D., David, H. T., *Likelihood ratio computation of operating characteristics.* Ann. Math. Statist., **37**, 1704—1716 (1966).
162. Lehmann, E. L., *Consistency and unbiasedness of certain nonparametric tests.* Ann. Math. Statist., *22*, 587—592 (1951 a).
163. Lehmann, E. L., *A general concept of unbiasedness.* Ann. Math. Statist., *22* (1951 b).
164. Lehmann, E. L., *The power of rank tests.* Ann. Math. Statist., *24*, 23—43 (1953).
165. Lehmann, E. L., *Testing statistical hypotheses.* Wiley, New York, 1959.
166. Lehmann, E. L., *Robust estimation in analysis of variance.* Ann. Math. Statist., *34*, 957—966 (1963 a).
167. Lehmann, E. L., *Asymptotically nonparametric inference: an alternative approach to linear models.* Ann. Math. Statist., *34*, 1499—1506 (1963 b).
168. Lehmann, E. L., Stein, C., *On the theory of some nonparametric hypotheses.* Ann. Math. Statist., *20*, 28—45 (1949).

Scanned with OKEN Scanner

169. LEHMANN, E. L., STEIN, C., *Completeness in the sequential case.* Ann. Math. Statist., *21*, 376—385 (1950).
170. LEVY, P., *Théorie de l'addition de variables aléatoires* Paris. 1937.
171. LEWONTIN, R. C., PROUT, T., *Estimation of the number of different clases in a population.* Biometrika, *12*, 211—223 (1956).
172. LORDEN, G., *Integrated risk of asymptotically Bayes sequential tests.* Ann. Math. Statist., *38*, 1399—1422 (1967).
173. LORDEN, G., *On excess over the boundary.* Ann. Math. Statist., *41*, 520—527 (1970).
174. LORDEN, G., *Likelihood ratio tests for sequential k-decision problems.* Ann. Math. Statist., *43*, 1412—1427 (1972).
175. LORDEN, G., *Open-ended tests for Koopman-Darmois families.* Ann. Math. Statist., *1*, 633—643 (1973).
176. LOYNES, R. M., *The consistency of certain sequential estimation.* Ann. Math. Statist., *40*, 568—574 (1969).
177. MANLY, B.F.J., *An approximate method for calculating the average sample number in certain sequential test.* J. Roy. Statist. Soc., **A, 130**, 239—243 (1967).
178. MANN, H. B., WHITNEY, D. R. *On a test of whether one of two random variables is stochastically large than the other.* Ann. Math. Statist., *18*, 50—60 (1947).
179. MÉRIC, J., *Ajustement des constantes d'un test binomial de Wald permettant d'obtenir les expressions exactes de ses caractéristiques.* Comptes Rendus l'Acad. Sci,. **238**, 2142—2143 (1954).
180. MIHOC, G., URSEANU, V., *Matematici aplicate în statistică.* Ed. Academiei, București, 1962.
181. MIKULSKI, P. W., *On the efficiency of optimal nonparametric procedures in the two sample case.* Ann. Math. Statist., *34*, 22—32 (1963).
182. MILLER, R. G., *Sequential signed rank test J.* Amer. Statist. Assoc., *65*, 1554—1561. (1970).
183. MOOD, A. M., *Introduction to the theory of statistics. Mc.* Graw-Hill, New York, 1950.
184. MOOD, A. M., *On the asymptotic efficiency of certain nonparametric two-sample tests.* Ann. Math. Statist., *25*, 514—522 (1954).
185. MYERS, M. H., SCHNEIDERMAN, M.A., ARMITAGE, P., *Boundaries for closed (wedge) sequential test plans.* Biometrika, *53*, 431—437 (1966).
186. NÁDAS, A., *An extension of a theorem of Chow and Robbins on sequential confidence intervals for the mean.* Ann. Math. Statist., *40*, 667—671 (1969).
187. NICOLAE, T., OBREJA, G., *Sequential tests for two-parameters Weibull destribution.* Proc. 4th Confer. Prob. Theory. 339—342. 1971
188. NOETHER, G. E., *On a theorem by Wald and Wolfowitz.* Ann. Math. Statist., *20*, 455—458 (1949).
189. NOETHER, G. E., *On a theorem of Pitman.* Ann. Math. Statist., *26*, 64—68 (1955).
190. OBREJA GH., *Asupra caracteristicii operative și numărului mediu de probe în cazul unor teste secvențiale.* Studii. cerc. mat., *3* (1963).
191. O'NEILL, R. T., ROHATGI, V. K., *A two-stage procedure for estimating the difference between the mean vectors of two multi-variate normal population.* Trabajos Estadist., *24*, 123—130 (1973).
192. PAGE E. S., *An improvement to Wald's approximation for some properties of sequential tests.* J. Roy. Statist. Soc., **B**, *16*, 136—139 (1954).
193. PARENT, Jr. E. A., *Sequential Ranking Procedures.* Tech. Rep. **80**, Dept. of Statist., Stanford Univ., Stanford, California, 1965.
194. PAULSON, E., *A note on the efficiency of the Wald sequential test.* Ann. Math. Statist., *18*, 447—450 (1947).
195. PAULSON, E., *A sequential procedure for comparing several experimental categories with a standard or Control.* Ann. Math. Statist., *33*, 438—443 (1962).
196. PAULSON, E., *A sequential procedures for choosing one of k hypotheses concerning the unknown mean of a normal distribution.* Ann. Math. Statist., *34*, 549—554 (1963).
197. PAULSON, E., *A sequential procedure for selecting the population with the largest mean from k normal populations.* Ann. Math. Statist., *35*, 174—180 (1964 a).
198. PAULSON, E., *Sequential estimation and closed sequential decision procedures.* Ann. Math. Statist., *35*, 1048—1058 (1964 b).
199. PHATARFOD, R. M., *Sequential analysis of dependent observations. I.* Biometrika, *52*, 157—165 (1965).
200. PITMAN, E.J.G., *Significance tests which may be applied to sample from any populations*: I. Suppl. J. Roy. Statist. Soc., *4*, 119—130 (1937 a).
201. PITMAN, E. J. G., *Significance tests which may be applied to samples from any population*: *II. The correlation coefficient test.* Suppl. J. Roy Statist. Soc., *4*, 225—232 (1937 b).
202. PITMAN, E. J. G., *Significance tests which may be applied to sample from any populations*: *III. The analysis of variance test.* Biometrika, *29*, 322—335 (1938).
203. PURI, M. L., *Asymptotic efficiency of a class of c-sample tests.* Ann. Math. Statist., *35*, 102—121 (1964).

Scanned with OKEN Scanner

204. PURI, M. L., *On some tests of homogeneity of variances.* Ann. Math. Inst. Statist., *17*, 323—330 (1965 a).
205. PURI, M. L., *Some distribution-free k sample rank tests of homogeneity order against alternatives.* Comm. Pure and Appl. Math., *18*, 51—63. (1965 b).
206. PURI, M. L., *On a class of testing procedures in linear models.* The journal of Indian Statist. Ass., *3*, 1—8. (1965c).
207. PURI, M. L., *Some aspects of nonparametric inference* Inter. Statist. Rev., *40*, *3*, 299—329 (1972).
208. PURI, M. L., PURI, P. S., *Selection procedures based on ranks: scale parameter case.* Sankhyâ., *30*, 290—302 (1968).
209. PURI, M. L., PURI, P. S., *Some multiple decision procedures based on ranks for certain problems in analysis of variance.* Ann. Math. Statist., *40*, 1325—1343 (1969).
210. PURI, M. L., SEN, P. K., *On a class of multivariate multi-sample rank order tests.* Sankhyâ, *28*, 353—376 (1966).
211. PURI, M. L., SEN, P. K., *On some nonparametric procedures in two-way layouts* J. Amer. Statist. Ass., *42*, 1214—1229 (1967).
212. PURI, M, L., SEN, P. K., *On Chernoff—Savage tests for ordered alternatives in randomized blocks.* Ann. Math. Statist., *39*, 967—972 (1968).
213. PURI, M. L., SEN, P. K., *A class of rank order tests for a general linear hypotheses.* Ann. Math. Statist., *40*, 1325—1343 (1969 a).
214. PURI, M. L., SEN, P. K., *On the asymptotic normality of one sample rank order test statistics.* Teoria Veroiatnostei i ee Primenenia, *14*, 167—173 (1969 b).
215. PUTTER, J., *Sur une methode de double echantillonage pour estimer la moyenne d'une population Laplacienne stratifice.* Rev. Inst. Internat. Statist., *19*, 231—238 (1951).
216. PYKE, R., SHORACK, G. R., *Weak convergence of a two-sample empirical process and a new approach to Chernoff-Savage theorems.* Ann. Math. Statist., *39*, 755—771 (1968 a).
217. PYKE, R., SHORACK, G. R., *Weak convergence and a Chernoff-Savage theorem for a random sample size.* Ann. Math. Statist., *39*, 1675—1685 (1968 b).
218. RAY W. D. A., *A proof that the sequential probability ratio test (SPRT) of the general linear hypothesis terminates with probability unity.* Ann. Math. Statist., *28*, 521—522 (1957 a).
219. RICHTER, D., *Two-stage experiments for estimating a common mean.* Ann. Math. Statist., *31*, 1164—1173 (1960).
220. RICHTER, W., *Limit theorems for sequences of random variables with sequences of random indices.* Theory of Probability and Its Applications, *10*, 74—84, 1965.
221. ROBBINS, H., *Some aspects of the sequential design of experiments.* Bull. Amer. Math. Soc., *58*, 527—535 (1952).
222. ROBBINS, H., *Statistical methods related to the law of the iterated logarithm.* Ann. Math. Statist., *41*, 1397—1409 (1970).
223. ROBBINS, H., MONRO, S., *A stochastic approximation method.* Ann. Math. Statist., *22*, 400—407 (1951).
224. ROBBINS H., SAMUEL, E., *An extension of a lemma of Wald.* J. Appl. Probability, *3*, 272—273 (1966).
225. ROBBINS, H., SIEGMUND, D., *Sequential tests involving two populations.* J. Amer. Statist. Assoc., *69*, 132—139 (1974).
226. ROBINSON, J., *A note on exact sequential analysis.* Univ. of California Publ. in Math. (New Series) *1*, 241—246, 1948.
227. RUSHTON, S., *On a sequential t-test.* Biometrika, *37*, 326—333 (1950).
228. SACKS, J., *A note on the sequential t-test.* Ann. Math. Statist., *36*, 1867—1869 (1965).
229. SAMUEL—CAHN, E., *Repeated significance test II, for hypotheses about the normal distribution.* Comm. Statist., 3(*8*), 711—733, 1974.
230. SAMUEL, E., *Estimators with prescribed bound on the variance for the parameters in the binomial and Poisson distribution based on two-stage sampling.* J. Amer. Statist. Assoc., *61*, 220—227 (1966).
231. SAMUEL, E., *Sequential maximum likclihood estimation of the size of a population* Ann. Math. Statist., *39*, 1057—1069 (1968).
232. SAMUEL, E., *Randomized sequential tests. A comparison between curtailed singe-sampling plans and sequential probability ratio tests.* J. Amer. Statist. Ass., *65*, 431—437 (1970).
233. SAVAGE, I. R., *Contributions to the theory of rank order statistics.* Ann. Math. Statist., *27*. 590—615 (1956).
234. SAVAGE, I. R., *Contribution to the theory of rank order statistics; the one- sample case,* Ann. Math. Statist., *30*, 1018—1023 (1959).
235. SAVAGE, I. R., SAVAGE, L. J., *Finite stopping time and finite expected stopping time.* J. Roy. Statist. Soc., **B.**, *27*, 284—289 (1965).
236. SAVAGE, I. R., SETHURAMAN, J., *Stopping time of a rank order sequential probability ratio test based on Lehmann alternatives.* Ann. Math. Statist., *37*, 1154—1160 (1966), corecție Ann. Math. Statist., *38*, 1309 (1967).

Scanned with OKEN Scanner

237. Savage, L. J., *A uniqueness theorem for unbiased sequential estimation.* Ann. Math. Statist., *18*, 295—297 (1947).
238. Scheffé, H., *Statistical inference in the nonparametric case.* Ann. Math. Statist., *14*, 305—332 (1943).
239. Schwarz, G., *Asymptotic shapes of Bayes sequential testing regions.* Ann. Math. Statist., *33*, 224—236 (1962).
240. Sen, P. K., *On some permutation tests based on U-statistics.* Calcutta Statistical Ass. Bull., *14*, 106—126 (1965).
241. Sen, P. K., *On a distribution-free method of estimating the asymptotic efficiency of a class of nonparametric tests.* Ann. Math. Statist., *37*, 1759—1770 (1966).
242. Sen, P. K., *On some convergence properties of one-sample rank order statistics.* Ann. Math. Statist., *41*, 2140—2143 (1970).
243. Sen P. K., *Asymptotic sequential tests for regular functionals of distribution functions.* Theor. Probability Appl., *18*, 235—249 (1973),
244. Sen, P. K., *The invariance principle for one sample rank order statistics.* Ann. Statist., *2*, 49—62 (1974).
245. Sen, P. K., Ghosh, M., *On bounded length sequential confidence intervals based on one sample rank order statistics.* Ann. Math. Statist., *42*, 189—203 (1971).
246. Sen, P. K., Ghosh, M., *A law of interated logarithm for one-sample rank order statistics and an application.* Ann. Math. Statist., *1*, 568—576 (1973 a).
247. Sen, P. K., Ghosh M., *A Chernoff-Savage representation of rank-order statistics for stationary ϕ — mixing process.* Sankhya. A., *35*, 157—172 (1973 b).
248. Sen, P. K., Ghosh, M., *Sequential Rank tests for Location.* Ann. Math. Statist., *2*, 540—552 (1974).
249. Sen, P. K., Puri, M. L., *On robust nonparametric estimation in some multivariate linear models Multivariate Analysis II* (ed. P. R. Krishnaiah) 33—52 Academic Press, New York, 1969.
250. Seth, G. R., *On the variance of estimates.* Ann. Math. Statist., *20*, 1—27, 1949.
251. Sethuraman, J., *On the probability of large deviation of families of sample means.* Ann. Math. Statist., *35*, 1304—1316 (1964).
252. Sethuraman, J., *Stopping time of a rank order sequential probability ratio test based on Lehmann alternatives II.* Ann, Math. Statist., *41*, 1322—1333 (1970).
253. Shepp, L. A., *A first passage problem for the Wiener process.* Ann. Math. Statist., *38*, 1912—1914 (1967).
254. Siegmund, D. O., *Some one-sided stopping rules.* Ann. Math. Statist., *38*, 1641—1646 (1967).
255. Simons, G., *Lower bounds for average sample number of sequential multihypothesis tests.* Ann. Math. Statist., *38*, 1343—1364 (1967 a).
256. Simons, G., *A sequential three hypothesis test for determining the mean of a normal population with known variance.* Ann. Math. Statist., *38*, 1365—1375 (1967 b).
257. Simons, G., *A class of sequential procedures for choosing one of K hypothesis concerning the unknown drift parameter of the Wiener process.* Ann. Math. Statist., *38*, 1376—1383 (1967 c).
258. Simons, G., *On the cost of not knowing the variance when making a fixed-width confidence interval for the mean.* Ann. Math. Statist., *39*, 1946—1952 (1968).
259. Smirnov, N. V., *Approximation of random variables by empirical data.* Uspehi Mat Nauk., *10*, 179—206 (1944).
260. Starr, N., *The performance of a sequential procedure for the fixed-width intervals estimate.* Ann. Math. Statist., *39*, 36—50 (1966 a).
261. Starr, N., *On the asymptotic efficiency of a sequential procedure for estimating the mean.* Ann. Math. Statist., *37*, 1173—1185 (1966 b).
262. Stein, C.. *A two-sample test for a linear hypothesis whose power is independent of the variance.* Ann. Math. Statist., *16*, 243—258 (1945).
263. Stein C., *A note on cumulative sums.* Ann. Math. Statist., *17*, 498—499 (1946).
264. Stein, C., *Some problems in sequential estimation.* Econometrica, *17*, 77—78 (1949).
265. Stockman, C. M., *A method of obtaining an approximation for the operating characteristic of a Wald sequential probability test applied to a binomial distribution.* Brit. Min. Supply Adv. Serv., Stat. Meth. and Qval. Cont. Tech. Rep. QC/R/19 (1944).
266. Strassen, V., *Almost sure behavior of sample sums of independent random variables and martingales.* Proc. Fifth Berkeley Symp. Math. Statist. Prob., *2*, 315—343 Univ. of California Press, 1967.
267. Sukhatme, B. V., *Testing the hypothesis that two population differ anly in locations.* Ann. Math. Satist., *29*, 60—78 (1958 a).
268. Sukhatme, B. V., *A two-sample distribution free test for comparing variances.* Biometrika, *45*, 544—549 (1958 b).
269. Tamura, R., *On the nonparametric tests based on certain U-statistics.* Bull. Math. Statist. (Japonia) *9*, 61—68 (1960).

Scanned with OKEN Scanner

270. Tukey, J. W., *Nonparametric estimation III. Statistically equivalent blocks and multivariate tolerance regions-the discontinous case.* Ann. Math. Statist., *19*, 30—39 (1948).
271. Van der Waerden, B. L., *Order tests for the two sample problem and their power.* Proceedings Koninklijka Nederlands Academie Van Wetenschoppen, **A**, *55*, 453 (1952/53).
272. Van der Waerden, B.L., *Ein neuer test fur das problem der zwei stichproben.* Math. Annalen, **126**, 93—107 (1953).
273. Văduva, I. *Analiză dispersională*, Ed. Tehnică București 1970.
274. Vodă, V. Gh., *On the „inverse Rayleigh" distributed random variable.* Rep. Stat. Appl. Res. JUSE (Tokyo) **19**, *4*, 13—21 (1972).
275. Vodă, V. Gh., *A note on the one-parameter inverse Gausstan distribution.* Revista de Ciências Mathemáticas ; **A**. vol IV 47—55 (1973).
276. Vodă, V. Gh., *Studiul unei repartiții de tip gama.* Studii și Cercetări Matematice, **26** *2* 311—322 (1974).
277. Vodă V. Gh., *Note on the truncated Rayleigh variate.* Revista Columbiana de Matematicas, **IX**, 1—7 (1975).
278. Vodă. V. Gh., *New tendencies in industrial statistics : is SQC in a crisis?* Revista Columbiana de Mathemátias, **IX**, 161—171 (1975).
279. Vodă, V. Gh., *Statistical inference for the time distribution of standard Brownian motion.* Trabajos de Estadistica (Madrid), **XXVII**, 201—218 (1976).
280. Von Mises, R., *On the asymptotic distribution of differentiable statistical functions.* Ann. Math. Statist, **18**, 309—348 (1947).
281. Wald, A., *An extension of Wilk's method for setting tolerance limits.* Ann. Math. Statist., *14*, 45—55 (1943).
282. Wald, A., *Sequential analysis of statistical data : theory.* Stat. Res. Group. Rep., **75**, Columbia Univ. 1943.
283. Wald, A., *Sequential tests of statistical hypothesis.* Ann. Math. Statist, *16*, 117—186 (1945).
284. Wald, A., *Differentiation under the expectation sign in the fundamental identity of sequential analysis.* Ann. Math. Statist., *17*, 493—497 (1946).
285. Wald, A., *Sequential Analysis.* Wiley, New York, 1947 ; 1963.
286. Wald, A., Wolfowitz, J. *Statistical tests based on permutations of the observations.* Ann Math. Statist. *15*, 358—372 (1944).
287. Wasan, M. T., *Sequential optimum procedures for unbiased estimation of a binomial parameter.* Technometrics, *6*, 259—272 (1964).
288. Weed, D. Jr. H., Bradley, R. A., *Sequential one sample grouped signed rank tests for symetry.* J. Amer. Statist. Ass., *66*, 321—336 (1971).
289. Weed, Jr., H. D., Bradley, R. A., Govindarajulu, Z., *Stopping times of two rank order sequential probability ratio tests for symetry based on Lehmann alternatives.* Ann. Statist., *2*, 1314—1322 (1974).
290. Weiss, L., *Testing one simple hypothesis against another.* Ann. Math. Statist., *24*, 273—281 (1953).
291. Weiss, L., *On sequential tests which minimize the maximum expected sample size.* J. Amer. Statist. Ass., *57*, 551—566 (1962).
292. Weiss, L., Wolfowitz, J., *An asymptotically Efficient, Sequential Equivalent of the t-test.* J. R. Statist. Soc. **B**, *34*, *3*, 456—461 (1972).
293. Wetherill, G. B., *Sequential Methods in Statistics.* Methuen, London, 1966.
294. Whittaker, E. T., Watson, G. S., *Modern Analysis.* Cambridge Univ. Press, London, New York, 1947.
295. Wiener, N. *The ergodic theorem.* Duke. Math. J. *5*, 1—18. 1939.
296. Wijsman, R. A., *Cross sections of orbits and their application to densities of maximal invariants.* Proc. Symp. Math. Statist. Probability. 5 th Berkeley 1965. 1. 389—400 Univ. of California Press. Berkeley 1967 a.
297. Wijsman, R. A., *General proof of termination with probability one the invariant sequential probability ratio tests based on multivariate normal observations.* Ann. Math. Statist., *38*, 8—24 (1967 b).
298. Wijsman R. A., *Bounds on the sample size distribution for a class of invariant sequential probability ratio tests*, Ann. Math. Statist., *39*, 1048—1056 (1968).
299. Wijsman, R. A., *Exponentially bounded stopping time of invariant sequential probability ratio test* Proc. Symp. on Decision Theory and Related Topics. Purdue Univ. Lafayette. Indiana 1970. 217—224. Academic Press, New York, 1971.
300. Wijsman, R. A., *Examples of exponentially bounded stopping time of invariant sequential probability ratio tests when the model may be false.* Proc., Symp. Math. Statist. Probability, 6th Berkeley, 1970, *1*, 109—128, Univ., of California Press Berkeley, 1972.
301. Wijsman, R. A., *A theorem on obstructive distribution.* Ann. Math. Statist., *43*, 1709—1715 (1972).

Scanned with OKEN Scanner

„Numerele sînt lucruri sigure"
„Dacă ceea ce afirmi se poate măsura şi exprima în numere, atunci poţi spune că cunoşti ceva despre acest lucru; cînd însă nu-l poţi măsura şi exprima în numere, cunoaşterea dobîndită este slabă şi nesatisfăcătoare"

KELVIN

„Probabilitatea este însăşi îndrumătorul vieţii"

CICERO

Cele mai importante probleme ale vieţii sînt în fapt, în cea mai mare parte, simple probleme de probabilitate"

LAPLACE

„Este un adevăr foarte bine stabilit că, atunci cînd nu este în puterea noastră că determinăm ceea ce este adevărat, trebuie să ne luăm după ceea ce este mai probabil"

DESCARTES

„Într-o zi, gîndirea statistică va fi la fel de necesară oricărui cetăţean folositor societăţii, ca şi scrisul sau cititul"

H. G. WELLS

„Omul merge spre cunoaştere pe drumul raţionamentului"

. . . . .

„Unii pleacă în raţionamentele lor de la o teză fixă, care s-a format în mintea lor, în care cred şi la care îşi ajustează apoi deducţiile"

GALILEO GALILEI

Scanned with OKEN Scanner